S

全国高职、高专教育高等数学系列教材

Gaozhi Jiaoyu

高等数学学习辅导

（上册）

主　编　刘书田
副主编　胡显佑　高旅端
编著者　刘书田　侯明华

北京大学出版社

全国高职、高专教育高等数学系列教材

高等数学学习辅导

（上　册）

主　编　刘书田
副主编　胡显佑　高旅端
编著者　刘书田　侯明华

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导(上册)/刘书田,侯明华编著.—北京:北京大学出版社,2001.7

全国高职高专教育高等数学系列教材

ISBN 7-301-05074-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.①刘…　②侯…　Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 036042 号

书　　　名:高等数学学习辅导(上册)
著作责任者:刘书田　侯明华　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-05074-7/O·510
出　版　者:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　印　者:北京大学印刷厂印刷
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850×1168　32 开本　10.625 印张　260 千字
2001 年 7 月第 1 版　2003 年 11 月第 3 次印刷
印　　　数:13001—18000 册
定　　　价:13.00 元

内容简介

本书是全国高等职业、高等专科教育“高等数学”基础课教材的学习辅导书.本书依照主教材《高等数学》(上、下册)的章节内容,与主教材相辅相成,同步使用,分上、下两册出版,供经济类、管理类和工科类一年级学生两学期使用.上册共分五章,内容包括函数、极限、连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用;下册共分四章,内容包括微分方程,向量代数与空间解析几何,多元函数微积分,无穷级数.书中加“*”号的内容,非工科类学生可不阅读,仅供工科类学生阅读,每章按照教学要求、内容提要与解题指导、自测题与参考解答三部分内容编写.教学要求指明学生应掌握和理解的知识点;内容提要是把重点内容和容易混淆的概念给出提示;解题指导是通过典型例题的解法教会学生数学思维方法,揭示出解题规律,并通过典型例题中的点评与说明,指出初学者易犯的错误,使学生加深对课堂上所讲内容的理解,以加强基础训练和提高学生的解题能力;自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题,可供学生检测对基础知识理解程度和解题能力,每章后附有自测题的参考解答供读者参考.

本书作者长期为高职、高专学生讲授“高等数学”课,深知高职、高专学生在学习高等数学内容时的疑难与困惑,因此本书能针对学生的接受能力、理解程度按大纲要求编写高等数学的学习辅导书,叙述通俗易懂、例题丰富、图形直观、富有启发性,便于自学,注重对学生基础知识的训练和综合能力的培养.

本书可作为高等职业、高等专科经济类、管理类和工科类学生学习高等数学的辅导教材或学习参考书,也可作为参加自学考试、文凭考试(仅用本书上册)、职大学生的学习参考书.对数学爱好者本书也是较好的自学教材.

高职、高专教育高等数学系列
教材出版委员会

全国高职、高专教育高等数学系列教材

微积分(经济类适用)	刘书田等编著	估价 15.00 元
微积分学习辅导(经济类适用)	刘书田等编著	估价 12.00 元
高等数学(上册)	刘书田等编著	定价 15.50 元
高等数学(下册)	刘书田等编著	定价 12.00 元
高等数学学习辅导(上册)	刘书田等编著	定价 13.00 元
高等数学学习辅导(下册)	刘书田等编著	定价 11.00 元
线性代数	胡显佑等编著	定价 9.00 元
线性代数学习辅导	胡显佑等编著	定价 9.00 元
概率统计	高旅端等编著	定价 12.00 元
概率统计学习辅导	高旅端等编著	定价 10.00 元

前　言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展，满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要，我们依照教育部颁布的高等职业教育高等数学教学大纲，为高职、高专经济类、管理类及工科类学生编写了本套高等数学系列教材. 本套书包括教材三个分册：《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率统计》，并编有配套辅导教材三个分册：《高等数学学习辅导》(上、下册)、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》，总共 6 分册. 需要向任课老师和读者说明的是，《高等数学》(上、下册)是供经济类、管理类和工科类一年级学生两学期使用，上册约讲授 64～68 学时，下册约讲授 32～36 学时. 书中加“*”号的内容，非工科类可不讲授，仅供工科类讲授，这些内容任课教师也可酌情选用.《线性代数》讲授 30～32 学时，《概率论与数理统计》讲授 36～40 学时. 以上建议仅供授课老师参考.

编写本套系列教材的宗旨是：以提高高等职业教育教学质量为指导思想，以培养高素质应用型人材为总目标，力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”. 因此，我们综合了高等院校高职、高专经济类、管理类及工科类高等数学教学大纲的要求，在三个分册的主教材中分别系统介绍了“微积分”、“线性代数”、“概率统计”的基本理论、基本方法及其应用. 本套系列教材具有以下特点：

1. 教材的编写紧扣教学大纲，慎重选择教材内容. 既考虑到高等数学本学科的科学性，又能针对高职班学生的接收能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度；既注重从实际问题引入基本概念，揭示概念的实质，又注重基本概念的几何解释、经济背景和物理意义，以使教学内容形象、直观，便于学生理解和掌握，并

达到“学以致用”的目的.

2. 为使学生更好地掌握教材的内容,我们编写了配套的辅导教材,教材与辅导教材的章节内容同步,但侧重点不同.辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导、自测题与参考解答三部分内容编写.教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点;内容提要把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出提示;解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明,指出初学者易犯的错误,教会学生数学思维的方法,总结出解题规律.自测题是为学生配置的适量的,难易程度适中的训练题,目的是检测学生在理解本章内容提要与解题指导的基础上,独立解题的能力.教材与辅导教材相辅相成,同步使用,以达到培养学生的思维、逻辑推理能力,运算能力及运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

3. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性,便于自学;注意用语确切,行文严谨.教材每节后配有适量习题,书后附有习题答案和解法提示.辅导教材按章配有自测题并给出较详细的参考解答,便于教师和学生使用.

本套系列教材的编写和出版,得到了北京大学出版社的大力支持和帮助,同行专家和教授提出了许多宝贵的建议,在此一并致谢!

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正.

编　者

2001 年 5 月于北京

目　　录

第一章　函数·极限·连续

一、教学要求

1. 理解函数概念，掌握函数符号的正确运用．会求函数的定义域；了解分段函数概念．

2. 了解反函数概念，会求已知函数的反函数．

3. 掌握函数的奇偶性，会用定义判定函数的奇偶性；掌握函数单调性、有界性、周期性的定义及其图形特征．

4. 熟练掌握基本初等函数的解析表达式及其基本性质．

5. 了解复合函数概念，知道初等函数的定义，熟练掌握将一个初等函数分解为基本初等函数的四则运算与复合的形式．

6. 了解数列极限与函数极限概念．

7. 了解无穷小与无穷大的概念；会进行无穷小的比较．

8. 掌握极限的四则运算法则及两个重要极限．

9. 了解函数连续的概念；了解第一类、第二类间断点，会判断简单分段函数在分界点处的连续性．

10. 知道初等函数在其定义区间上是连续函数．

11. 知道闭区间上连续函数的最值定理、有界定理、介值定理和根值定理．

二、内容提要与解题指导

（一）函数概念

在函数的定义中有三个因素：**定义域** D，**对应法则** f 和**值域** Z，其中前二者是**要素**．

函数 $y=f(x)$ 的图形通常是一条平面曲线，该曲线在 x 轴上

的投影是函数的定义域 D，在 y 轴上的投影是函数的值域 Z（图 1-1）.

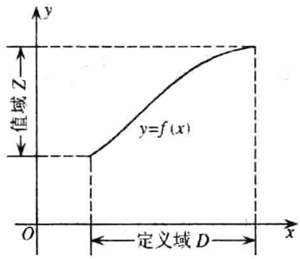

图 1-1

在理解函数定义时，应掌握以下三个问题：确定函数的定义域；判定两个函数是否相同；正确运用函数记号，会求函数值.

1. *求函数的定义域*

函数的定义域即自变量的取值范围. 当函数 $y=f(x)$ 用解析表达式给出，而又没给出自变量的取值范围时，要求函数的定义域，就是求使该解析式有意义的自变量的取值范围.

对于表示应用问题的函数关系，其自变量的取值范围应使实际问题有意义.

2. *判定两个函数相同*

由于对应法则 f 和定义域 D 是确定一个函数的要素，因此，当两个函数用不同的解析表达式表示时，而其定义域 D 和对应法则 f 都相同时，它们是同一函数.

3. *求函数值*

当函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 用解析表达式表示时，若 $x_0\in D$，将表达式中的 x 代以 x_0，便得到该函数在自变量取 x_0 时的函数值，记作

$$f(x_0) \quad 或 \quad y|_{x=x_0} \quad 或 \quad y(x_0).$$

例 1 求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(2-x)}+\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域.

解 函数式有两项，其定义域中的 x 应使两项同时有意义.

对第一项 $\frac{1}{\lg(2-x)}$，应有

$$2-x>0 \text{ 且 } 2-x\neq 1(\text{因 } \lg 1=0),$$

即

$$x<2 \quad \text{且} \quad x\neq 1.$$

对第二项 $\arcsin\frac{x-1}{2}$，反正弦函数符号下的式子，应有

$$-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1, \text{ 即 } -1\leqslant x\leqslant 3.$$

综上，函数的定义域是$[-1,1)\cup(1,2)$.

例 2 (1) 已知函数 $f(x)$的定义域是$(-\infty,0)$，求函数 $f(\ln x)$的定义域；

(2) 已知函数 $f(x)$的定义域是$(0,1]$，求 $f(x+2)$，$f(2^x)$的定义域.

解 (1) 为便于理解，已知条件可认为是，函数 $f(u)$的定义域是$(-\infty,0)$，即$-\infty<u<0$.

求函数 $f(\ln x)$的定义域，就是确定该函数自变量 x 的取值范围. 对照已知条件，$f(\ln x)$中的 $\ln x$ 应是函数 $f(u)$中之 u，所以，应有

$$-\infty<\ln x<0.$$

根据对数函数的性质，当 $x\in(0,1)$时，有$-\infty<\ln x<0$，因此，函数 $f(\ln x)$的定义域为$(0,1)$.

(2) 按上述分析，对函数 $f(x+2)$，依题设，应有

$$0<x+2\leqslant 1, \text{ 即 } -2<x\leqslant -1,$$

函数 $f(x+2)$的定义域是$(-2,-1]$.

同样，对函数 $f(2^x)$，依题设，有

$$0<2^x\leqslant 1,$$

当 $x\in(-\infty,0]$时，上式成立. 故函数的定义域是$(-\infty,0]$.

例 3 设函数 $y=\sqrt{g(x)}+\sqrt{16-x^2}$的定义域是$[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$，则 $g(x)=($　　$)$.

(A) $\sin x$；　(B) $\cos x$；　(C) $\tan x$；　(D) $\cot x$.

解 首先用筛选法.

按题干所给条件,在$[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$内必有 $g(x)\geqslant 0$. 而 $\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$,$\cot x$ 在 $x=0$ 或 $x=\pi$ 无意义;

又 $\cos x$ 在$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$内非正,故应剔除(B),(C),(D).

事实上,在$[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$内,确有 $\sin x\geqslant 0$. 故选(A).

例 4 下列各对函数中,相同的是( ).

(A) $f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

(B) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(C) $f(x)=x-1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$;

(D) $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 与 $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

解 (A) 定义域相同,都是$(-\infty,+\infty)$;由于 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 是恒等式,即对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $g(x)=1$,故它们的对应法则相同,故 $f(x)$与 $g(x)$表示相同的函数. 选(A).

(B) 两个函数的对应法则不同. 根据绝对值的性质,$\sqrt{x^2}=|x|$,即当 $x\geqslant 0$ 时,$\sqrt{x^2}=x$;而当 $x<0$ 时,$\sqrt{x^2}=-x$.

(C) 定义域不同. $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$;而 $g(x)$的定义域是$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(D) 两个函数的定义域都是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,但对应法则不同. 当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$时,$f(x)>0$;而对 $g(x)$,当 $x\in(-\infty,0)$时,$g(x)<0$.

例 5 判定下列各对函数是否相同,并说明理由:

(1) $f(x)=\cos x$,$g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$;

(2) $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$,$g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$;

(3) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,$g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$;

(4) $f(x)=\sqrt{(1-x)(2+x)}$,$g(x)=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{2+x}$.

解 (1) $f(x)$与 $g(x)$的定义域相同,都是$(-\infty,+\infty)$;但对

应规则不同.因为

$$|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x},$$

故不相同.

(2) 按对数性质,有

$$\ln(x^2-3x+2)=\ln(x-1)+\ln(x-2).$$

但上式仅在区间$(2,+\infty)$内成立.这是因为

对函数 $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$,由

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0,$$

即
$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-2>0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-1<0, \\ x-2<0, \end{cases}$$

推得
$$x>2 \quad \text{或} \quad x<1.$$

从而 $f(x)$的定义域是$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

对函数 $g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$,由

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-2>0, \end{cases} \quad \text{推得 } x>2,$$

即函数 $g(x)$的定义域是$(2,+\infty)$.

因此,函数 $f(x)$和 $g(x)$不同.

(3) 按对数性质,有

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x).$$

对函数 $f(x)$,由$\frac{1+x}{1-x}>0$,即

$$\begin{cases} 1+x>0, \\ 1-x>0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 1+x<0, \\ 1-x<0, \end{cases}$$

推得
$$\begin{cases} x>-1, \\ x<1, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x<-1, \\ x>1. \end{cases} \text{(无解)}$$

从而 $f(x)$的定义域是$(-1,1)$.

对函数 $g(x)$,易知,其定义也是$(-1,1)$.

故两个函数相同.

(4) 按根式乘积的性质,有

$$\sqrt{(1-x)(2+x)} = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{2+x}.$$

用上述类似方法,可推得,两个函数的定义域都是$[-2,1]$. 故相同.

例 6 设 $f(x)=\dfrac{1+2x}{1+x^2}$,求 $f(-2)$,$f(0)$,$f(a)$,$f(x+1)$,$f(x^2)$.

解 $f(-2)$表示已知函数 $f(x)$在 $x=-2$ 时的函数值. 用-2代换表示式 $\dfrac{1+2x}{1+x^2}$ 中的 x,便得到 $f(-2)$:

$$f(-2) = \frac{1+2\cdot(-2)}{1+(-2)^2} = -\frac{3}{5}.$$

同样,用 0 代换 $\dfrac{1+2x}{1+x^2}$ 的 x,得

$$f(0) = \frac{1+2\cdot 0}{1+0^2} = 1.$$

用 a 代换 $\dfrac{1+2x}{1+x^2}$ 中的 x,得

$$f(a) = \frac{1+2a}{1+a^2}.$$

同样

$$f(x+1) = \frac{1+2(x+1)}{1+(x+1)^2} = \frac{3+2x}{2+2x+x^2},$$

$$f(x^2) = \frac{1+2x^2}{1+(x^2)^2} = \frac{1+2x^2}{1+x^4}.$$

例 7 设 $f(x)=x^2+ax+b$,其中 a,b 为待定常数.

(1) 已知 $f(-3)=f(2)=0$,求这个函数;

(2) 求 $f(-x)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,$f(x_0+h)-f(x_0)$.

解 (1) 求这个函数,就是确定 $f(x)$的表示式 x^2+ax+b 中未知的常数 a 和 b. 由 $f(-3)=0$,$f(2)=0$,即将 $x=-3$,$x=2$ 分别代入 $f(x)$的表示式中,得方程组