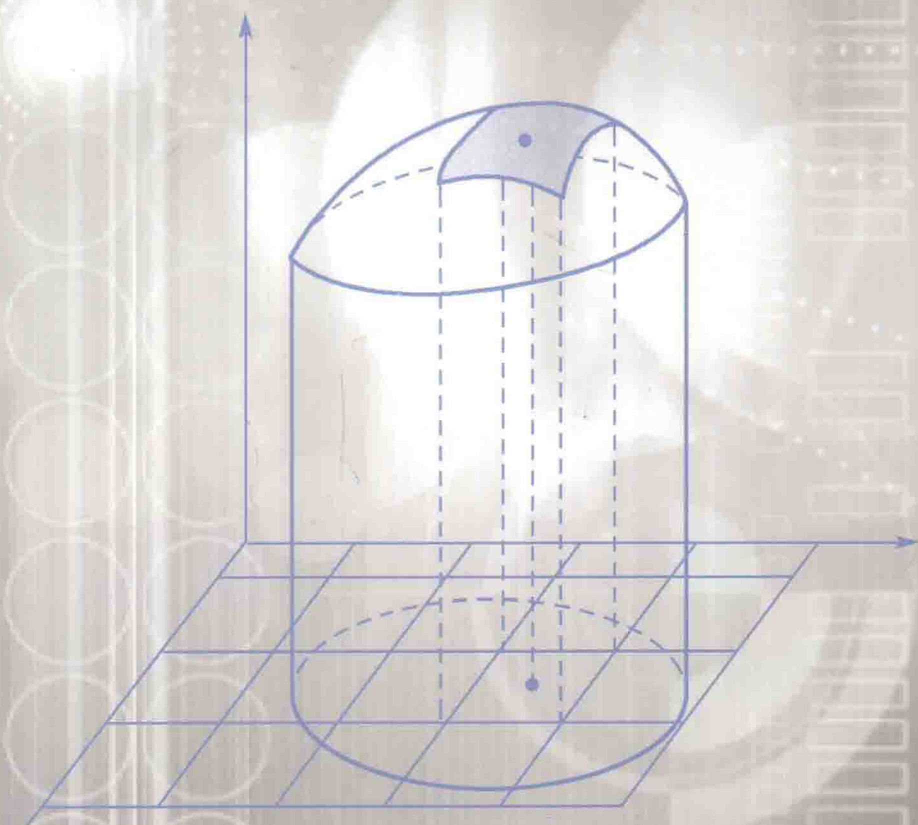
高职高专“十二五”规划教材 公共课系列

# 应用高等数学

主审 余小三 主编 黄长琴



南京大学出版社

高职高专“十二五”规划教材

公共课系列

# 应用高等数学

主审　余小三
主编　黄长琴

南京大学出版社

## 内 容 简 介

本书共三篇17章，上篇是基础数学，包括极限与连续、导数与微分、积分及其应用（其中包括常微分方程初步）、多元函数微积分、无穷级数等5章；中篇是应用数学，包括线性代数初步、线性规划初步、概率初步、数理统计初步等4章；下篇是数学软件，系统介绍*Mathematica*软件在上述各章的具体应用．每章列举大量与各专业密切联系的实际案例，并配备适量的练习．

本书可作为高职、高专、成人高校、继续教育学院及民办高校的经济、管理及工科专业的高等数学教材，也可作为数学实验课程和经济、工程应用人员的参考资料．

**图书在版编目（CIP）数据**

应用高等数学／黄长琴主编．—南京：南京大学出版社，2011.8

高职高专“十二五”规划教材·公共课系列

ISBN 978－7－305－08668－7

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①黄…　Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第155765号

出版发行　南京大学出版社

社　　址　南京市汉口路22号　　　邮　编　210093

网　　址　http://www.NjupCo.com

出 版 人　左　健

丛 书 名　高职高专“十二五”规划教材·公共课系列

**书　　名　应用高等数学**

主　　编　黄长琴

责任编辑　王　年　　　　编辑热线　025－83597482

照　　排　南京玄武湖印刷实业有限公司

印　　刷　丹阳市兴华印刷厂

开　　本　787×1092　1/16　印张21　字数524千

版　　次　2011年8月第1版　2011年9月第2次印刷

ISBN　978－7－305－08668－7

定　　价　39.00元

发行热线　025－83594756

电子邮箱　Press@NjupCo.com

Sales@NjupCo.com（市场部）

# 前 言

随着高职教育的发展壮大,高职教育课程改革向纵深发展,高等数学服务于专业课程的工具性尤为明显,同时高等数学不仅仅是学习专业课程的一种工具,也是高级蓝领们知识和能力的一部分,是复合型人才科学素养的一个方面.本书以《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为依据,以服务于专业课程为导向,以学生可接受性和发展性为出发点编写而成.

全书分为上、中、下三篇.上篇包括极限与连续,导数与微分,积分及其应用,多元函数的微积分,无穷级数;中篇包括线性代数初步,线性规划初步,概率初步及数理统计初步;下篇为 Mathematica 软件介绍及应用.在知识模块编排上,经典的知识体系中加强了应用性教学内容,不同的专业及课时要求可对模块做相应选择.

本书在编写过程中,充分考虑学生的可接受性与发展性.概念的引入以及案例分析多为实际生活或专业课程的案例,深入浅出,通俗易懂.课后练习难易适中,可供不同能力的学生选用.数学建模思想及方法贯穿全书,便于提高学生应用数学知识解决实际问题的能力.

在编写过程中,我们征求了高职院校专业课教师、毕业生对高等数学课程教学内容的要求,参考了国内众多院校常用的教材和书籍,主审余小三教授提出了很多宝贵意见,谨此表示感谢,同时对支持本书编写的领导、专家及同仁表示衷心感谢.

由于编者水平有限,本书若有不足之处,敬请得到专家、同行和读者的指正,使本书在教学实践中不断完善.

编 者

2011 年 6 月

# 目　　录

## 上　篇

## 中 篇



## 下 篇

【上篇】

# 第一章　极限与连续

微积分是高等数学的重要内容之一，而微积分的基本理论是极限. 极限方法的萌芽起源于公元 5 世纪，到 17 世纪中后期牛顿-莱布尼兹对微积分的创立，经历了漫长的理论探索与问题实践. 极限理论是高等数学的基石，是微积分的基础. 极限方法也是微积分的最基本方法. 因此，掌握极限概念与极限运算是学好高等数学的第一步.

本章将介绍极限概念、常用的求极限方法以及极限的简单应用.

## §1.1　函　数

### 1.1.1　函数的概念

**定义 1－1**　设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是 $R$ 的非空子集，对于任意的 $x\in D$，通过对应关系 $f$，变量 $y$ 都有确定的值与它相对应，则称**变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数**，记作

$$y=f(x)\qquad x\in D$$

其中 $x$ 为**自变量**，$y$ 为**因变量**，$D$ 为**函数的定义域**，$f$ 为**函数关系**，$y$ 的取值范围为**函数的值域**，记为 $M$.

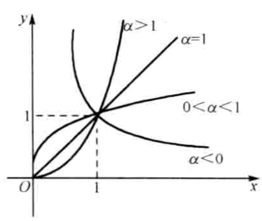
**必须注意的是**：定义域和函数关系是函数的两个要素，当函数的两个要素相同时，即为同一个函数.

### 1.1.2　函数关系

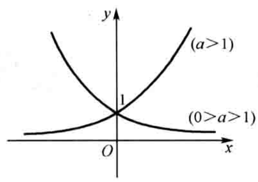
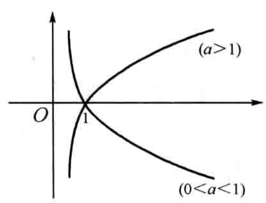
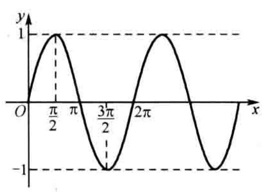
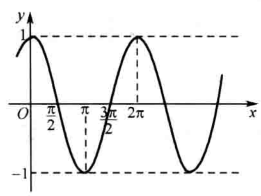
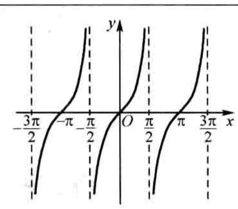
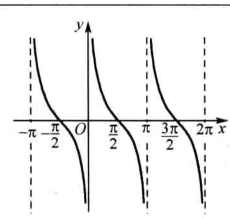
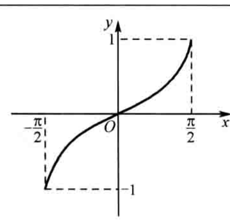
函数关系的表示上又分为图像法、表格法和解析式法，下面先介绍解析式函数关系的几种常见类型.

**1. 基本初等函数**

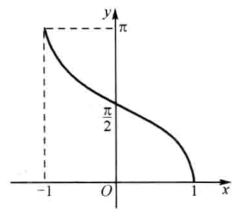
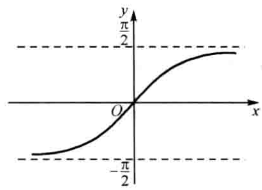
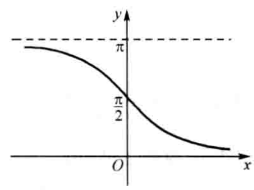
**表 1.1**

| 名称 | 解析式 | 定义域和值域 | 图　像 | 主要性质 |
|---|---|---|---|---|
| 幂函数 | $y=x^{\alpha}$<br>($\alpha\in\mathbf{R}$) | 依 $\alpha$ 不同而异 |  | 图形都经过点(1,1).<br>在第一象限内，<br>当 $\alpha>0$ 时，函数单调增加；<br>当 $\alpha<0$ 时，函数单调减少 |

**(续表 1.1)**

| 名称 | 解析式 | 定义域和值域 | 图像 | 主要性质 |
|---|---|---|---|---|
| 指数函数 | $y=a^x$<br>$(a>0$ 且 $a\neq1)$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(0,+\infty)$ |  | 图形都分布在 $x$ 轴上方，都过点(0,1).<br>当 $0<a<1$ 时，函数单调减少；当 $a>1$ 时，函数单调增加 |
| 对数函数 | $y=\log_a x$<br>$(a>0$ 且 $a\neq1)$ | $x\in(0,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 图形都分布在 $y$ 轴右侧，都过点(1,0).<br>当 $0<a<1$ 时，函数单调减少；当 $a>1$ 时，函数单调增加 |
| 三角函数 | $y=\sin x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[-1,+1]$ |  | 奇函数，周期为 $2\pi$，图形分布在两直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间 |
| | $y=\cos x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[-1,+1]$ |  | 偶函数，周期为 $2\pi$，图形分布在两直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间 |
| | $y=\tan x$ | $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,<br>$(k\in\mathbf{Z})$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数，周期为 $\pi$，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 |
| | $y=\cot x$ | $x\neq k\pi$,<br>$(k\in\mathbf{Z})$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数，周期为 $\pi$，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 |
| 反三角函数 | $y=\arcsin x$ | $x\in[-1,1]$<br>$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ |  | 奇函数，单调增加，有界 |

（续表 1.1）

| 名称 | 解析式 | 定义域和值域 | 图　　像 | 主要性质 |
|---|---|---|---|---|
| 反三角函数 | $y=\arccos x$ | $x\in[-1,1]$<br>$y\in[0,\pi]$ |  | 单调减少，有界 |
| | $y=\arctan x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ |  | 奇函数，单调增加，有界 |
| | $y=\operatorname{arccot} x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(0,\pi)$ |  | 单调减少，有界 |

**2. 复合函数**

我们知道，当动点在单位圆上以 $A(0,1)$ 为起点做逆时针匀速运动时，动点在 $y$ 轴上的投影的纵坐标 $y$ 是角度 $\theta$ 的函数 $y=\sin\theta$，如果角速度为 $\omega$，则角度 $\theta$ 是时间 $t$ 的函数 $\theta=\omega t$. 显然，对于大于或等于零的任意时间 $t$，动点在 $y$ 轴上的投影纵坐标 $y$ 都是确定的，因此，$y$ 也是时间 $t$ 的函数，即 $y=\sin(\omega t)$. 我们把这样一种函数关系定义如下.

**复合函数**　一般地，如果函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D_f$，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $W_\varphi$，当 $D_f$ 与 $W_\varphi$ 交集 $I$ 为非空集时，设与 $I$ 相对应的 $x$ 的取值范围为 $D$（显然 $D\subseteq D_\varphi$），那么，对于任意 $x\in D$，通过函数 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u\in I$ 与之相对应，由于 $I\subseteq D_f$，因此对于这个 $u$，通过函数 $y=f(u)$ 有确定的 $y$ 值与之相对应. 这样，对于任意 $x\in D$，通过变量 $u$ 有确定的 $y$ 值与之相对应，从而得到一个以 $x$ 为自变量、$y$ 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中，变量 $u$ 称为复合函数的**中间变量**. 为方便起见，我们把 $y=f(u)$ 称为**外函数**，把 $u=\varphi(x)$ 称为**内函数**.

**必须注意的是**：(1) 当且仅当 $D_f$ 与 $W_\varphi$ 交集 $I$ 为非空集时，两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合才是有意义的. 例如：$y=f(u)=\arcsin u$、$u=\varphi(x)=x^2+2$，这两个函数就不能复合. 因为，无论 $x$ 取任何值，都有 $u\geqslant 2$，而对于任意绝对值大于常数 1 的 $u$，相应的反正弦值都不存在；(2) 如果没有特别说明，复合函数的定义域是使复合函数有意义的自变量的取值范围. 例如：函数 $y=\sin(\omega t)$ 的定义域为全体实数集 $\mathbf{R}$，$y=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. (3) 多个函数也可以进行类似的复合运算. 例如：$y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=$

$x^2+1$ 就可以复合成复合函数 $y=\sqrt{\sin(x^2+1)}$.

**例 1-1** 分解下列复合函数：

(1) $y=\cos^2 3x$; (2) $y=\sqrt{\ln\sin(x^2+x+1)}$.

**解** (1) $y=u^2, u=\cos v, v=3x$;

(2) $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=\sin\omega, \omega=x^2+x+1$.

**例 1-2** 已知 $f(x-1)=x^3-x+1$,求 $f(x)$.

**解** 设 $x-1=u$,则 $x=u+1$,于是 $f(u)=(u+1)^3-(u+1)+1=u^3+3u^2+2u+1$,所以

$$f(x)=x^3+3x^2+2x+1$$

**例 1-3** 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求函数 $f(x+1)$,$f(e^x)$的定义域.

**解** 因为 $f(x+1)$ 由 $y=f(u)$,$u=x+1$ 复合而成,必须使 $u=x+1\in D_f$,即 $x+1\in[0,1]$. 所以$x\in[-1,0]$.

因为 $f(e^x)$由 $y=f(u)$,$u=e^x$ 复合而成,必须使 $u=e^x\in D_f$,即 $e^x\in[0,1]$,所以 $x\in(-\infty,0]$.

**3. 初等函数**

我们把由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成并可以用一个解析式表示的函数,称为**初等函数**. 例如:$y=x^2$,$y=2x+\ln\sin x$,$y=3\arctan\sqrt{x^2+1}$ 等都是初等函数. 本教材所涉及的函数绝大多数都是初等函数.



**4. 分段函数**

我们把在不同的定义域区间所对应的函数解析式不同的函数统称为**分段函数**,如邮资函数、电话费用函数、个人收入所得税函数等,还有高等数学课程中会涉及的如下几个分段函数:

符号函数 $y=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0;\\ -1 & x<0\end{cases}$

取整函数 $y=[x]=n, x\in[n,n+1), n=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

这里符号函数和取整函数都是非初等函数,但绝对值函数 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 也可以用一个解析式表示,是初等函数.

**例 1-4** 《中华人民共和国个人所得税法》和《中华人民共和国个人所得税法实施条例》自 2011 年 9 月 1 日起施行的个人所得税税率表(工资、薪金所得适用)如表 1.2 所示.

**表 1.2**

| 级数 | 全月应纳税所得额 | 税率% | 级数 | 全月应纳税所得额 | 税率% |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 不超过 1 500 元的 | 3 | 5 | 超过 35 000 元至 55 000 元的部分 | 30 |
| 2 | 超过 1 500 元至 4 500 元的部分 | 10 | 6 | 超过 55 000 元至 80 000 元的部分 | 35 |

(续表 1.2)

| 级数 | 全月应纳税所得额 | 税率% | 级数 | 全月应纳税所得额 | 税率% |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 超过 4 500 元至 9 000 元的部分 | 20 | 7 | 超过 80 000 元的部分 | 45 |
| 4 | 超过 9 000 元至 35 000 元的部分 | 25 | | | |

上述表 1.2 中"全月应纳税所得额"是从月工资、薪酬收入减去 3 500 元后的余额. 求个人所得税函数 $y=f(x)$以及当月纳税为 120 元时的月薪.

**解**　个人所得税函数为

$$y=f(x)=\begin{cases}0 & 0<x\leqslant 3\,500\\(x-3\,500)\times 3\% & 3\,500<x\leqslant 5\,000\\(x-5\,000)\times 10\%+45 & 5\,000<x\leqslant 8\,000\\(x-8\,000)\times 20\%+345 & 8\,000<x\leqslant 12\,500\\(x-12\,500)\times 25\%+1\,245 & 12\,500<x\leqslant 38\,500\\(x-38\,500)\times 30\%+7\,745 & 38\,500<x\leqslant 58\,500\\(x-58\,500)\times 35\%+13\,745 & 58\,500<x\leqslant 83\,500\\(x-83\,500)\times 45\%+22\,495 & x>83\,500\end{cases}$$

从纳税函数可以看出,纳税函数分 8 段,月纳税额分 8 个层次,分别是 $y=0$,$0<y\leqslant 45$,$45<y\leqslant 3\,455$,…,$y>22\,495$,显然 $y=120$ 属于第三段,函数式为:

$$y=(x-5\,000)\times 10\%+45$$

反解自变量得

$$x=\frac{120-45}{10\%}+5\,000=5\,750(\text{元})$$

### 1.1.3　定义域

函数的定义域是指使函数有意义的自变量取值的集合. 解析式函数的定义域是指解析式有意义的自变量的取值范围.

**例 1-5**　求下列函数的定义域:

(1) $y=\tan(x+1)$;　　(2) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{x-1}{3}$.

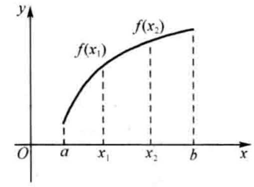
**解**　(1) 要使函数有意义,必须 $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1$,$k\in\mathbf{Z}$.

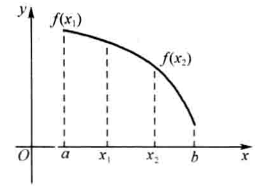
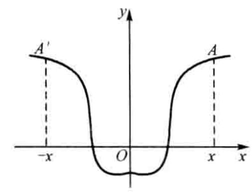
(2) 要使函数有意义,必须 $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\-1\leqslant\dfrac{x-1}{3}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 3\\-2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$,即 $x\in[-2,3]$.

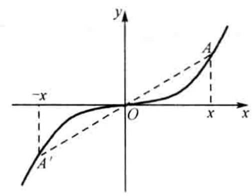
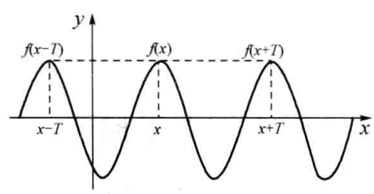
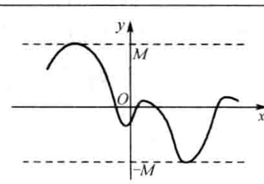
### 1.1.4　函数的性质

函数的几种常用性质对比几何意义罗列如表 1.3 所示($D$ 为函数 $f(x)$的定义域).

**表 1.3**

<table>
<tr><th>性质</th><th>定　　义</th><th>几　何　意　义</th></tr>
<tr><td>单调性</td><td>设区间 $I \subseteq D$,若对任意的 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上单调增加;若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上单调减少</td><td>


</td></tr>
<tr><td>奇偶性</td><td>设函数 $f(x)$的定义域 $D$ 关于原点对称,对任意的 $x \in D$,若有 $f(-x) = f(x)$,则函数 $f(x)$ 为偶函数;若有 $f(-x) = -f(x)$,则函数 $f(x)$为奇函数</td><td>


</td></tr>
<tr><td>周期性</td><td>若存在常数 $T \neq 0$,使对任意的 $x \in D$,有 $x + T \in D$,且 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数</td><td>
</td></tr>
<tr><td>有界性</td><td>设区间 $I \subseteq D$,对任意的 $x \in I$,存在正数 $M$,有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立,则称 $f(x)$在区间 $I$ 上有界</td><td>
</td></tr>
</table>

## 1.1.5　经济分析中的函数举例

在经济分析中,经常会涉及生产成本 $C$、销售收益 $R$、利润 $L$ 等与生产量 $Q$ 之间的函数关系,我们把这些函数关系分别称为**成本函数、收益函数、利润函数**;也会遇到商品的供给 $Q$、需求 $Q$ 与价格 $P$ 之间的函数关系,我们把这些函数关系分别称为**供给函数、需求函数**,它们的反函数就是**价格函数**.

**例 1-6**　某厂生产某种产品,固定成本为 100 元,每生产一件产品需增加 6 元成本,又知该产品的需求函数为 $Q = 1\,000 - 100p$($p$ 表示价格),求:

(1) 总成本 $C$ 与产量 $Q$ 间的函数关系；
(2) 总收益 $R$ 与产量 $Q$ 间的函数关系；
(3) 利润 $L$ 与产量 $Q$ 间的函数关系.

**解**　(1) 总成本为固定成本与可变成本之和，于是 $C(Q)=100+6Q$.

(2) 由需求函数 $Q=1\,000-100p$ 的反函数为价格函数，得 $p=\dfrac{1\,000-Q}{100}=10-\dfrac{Q}{100}$. 于是，总收益为 $R(Q)=Qp=10Q-\dfrac{Q^2}{100}$.

(3) 利润等于总收益与总成本之差，因而有

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)=10Q-\frac{Q^2}{100}-100-6Q=4Q-\frac{Q^2}{100}-100$$

即

$$L(Q)=4Q-\frac{Q^2}{100}-100$$

**练习 1－1**

1. 填空题.

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & -3\leqslant x<0\\ x-1 & 0\leqslant x<4\end{cases}$，则 $f(0)=$__________.

(2) 若函数 $f(x)=\begin{cases}1+x & -\infty\leqslant x<-1\\ e^x & -1\leqslant x<+\infty\end{cases}$，则函数 $f(x)$ 的定义域为__________.

(3) 函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域是__________.

(4) 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$，那么 $f(x)=$__________.

2. 选择题.

(1) 基本初等函数与初等函数的关系，下列说法错误的是__________.
　(A) 基本初等函数就是初等函数
　(B) 初等函数包括基本初等函数
　(C) 基本初等函数与初等函数的解析式都只能是一个
　(D) 初等函数中的运算关系有四则运算，而基本初等函数中没有四则运算

(2) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，则 $f[f(x)]=$__________.
　(A) $\dfrac{1}{1-x}$　　(B) $\dfrac{1}{1+x}$　　(C) $1+\dfrac{1}{x}$　　(D) $1-\dfrac{1}{x}$

(3) 下列函数中，有界的函数是__________.
　(A) $f(x)=\dfrac{10}{1+x^2}$　　(B) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$
　(C) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$　　(D) $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$

(4) 如果函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则函数 $f[2^x]$ 的定义域为__________.
　(A) $[0,1]$　　(B) $[-1,0]$　　(C) $(0,+\infty)$　　(D) $(-\infty,0]$

3. 设 $f(x)=x^3$,求$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

4. 求下列函数的复合函数：

(1) $y=\sqrt{1+u}, u=v^2, v=\sin x$;

(2) $y=\lg u, u=\cos v, v=2^x$.

5. 将下列初等函数分解为简单函数：

(1) $y=\sin^2(1-2x)$;　　(2) $y=\arcsin\dfrac{1}{3x+2}$.

6. 某工厂单位时间内生产 $Q$ 单位的某种产品的成本为 $C$ 万元,其中固定成本为 300 元,每生产 1 单位的产品,成本增加 15 元. 设该产品的需求函数为 $Q=150-3p$($p$ 为单价),且产品均可售出. 试将该产品的利润 $L$ 表示为产量 $Q$ 的函数.

7. 某品牌的照相机,每台售价为 240 元时,市场的供给量为 50 台;若每台价格为 245 元时,则市场的供给量为 55 台. 若供给量和价格之间呈线性关系,求此照相机的供给量 $Q$ 与价格的 $p$ 函数关系.

## §1.2　函数的极限

极限概念是由于求某些问题的精确解答而产生的,也是微积分的理论基础.



### 1.2.1　问题举例

**割圆术**　我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)创造了"割圆术",即利用圆内接正多边形的面积来推算圆的面积,他认为不断增加圆内接正多边形的边数,"割之弥细,所失弥少. 割之又割,以至于不可割,则与圆周合体,而无所失矣."对于圆的面积的计算,先从圆内接正六边形算起,依次将边数加倍,如果把圆内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n$,显然,正多边形的边数 $n$ 越大,则正多边形的面积 $A_n$ 就和圆的面积越接近,当 $n$ 无限增大时,圆内接正多边形的面积就无限接近于圆的面积.

**水温的变化趋势**　将一盆 80℃的热水放在室温恒为 20℃的房间里,显然,水温 $T$ 将随时间 $t$ 的增加而逐渐降低,随着时间 $t$ 的推移,水温会越来越接近于室温 20℃.

**单摆运动**　单摆离开垂直位置一定的距离后,在重力作用下左右摆动,如果不施加外力作用,那么,单摆在摩擦力和空气阻力作用下,其振幅会不断减小,时间越长,振幅也就越小,当时间无限延长时,那么单摆的振幅就无限接近于零.

**细胞分裂**　假设某细胞分裂的周期为 1 分钟,则细胞数量 $y$ 与时间 $t$ 的函数关系为 $y=2^{[t]}$,显然,当时间变量越大,则对应的细胞数量就越多,当 $t\to+\infty$,对应的细胞数量也就无限增多.

### 1.2.2　函数的极限

上述举例反映出相同的规律,即当自变量沿着某方向变化时,对应的函数值是否无限接近于一个确定的常数. 我们把函数的这种变化趋势定义为极限. 根据自变量的变化方式,我们又把函数的极限分为以下两种类型：

**1. $x\to\infty$时函数的极限**

对于函数 $f(x)$,当自变量 $x$ 的绝对值无限增大时,如果对应的函数值 $f(x)$无限接近于

唯一确定的常数 $A$，则称 **$A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

当自变量 $x$ 的绝对值无限增大时，如果对应函数的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称极限不存在，或称极限为无穷大，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

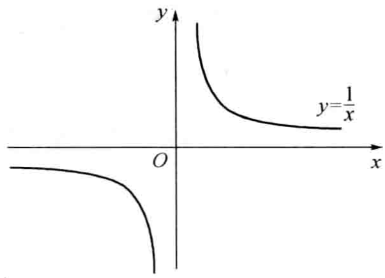



图 1.1

例如：对于函数 $y=\dfrac{1}{x}$，当自变量 $x$ 的绝对值无限增大时，对应的函数值无限接近于常数零，在函数图形上表现为：当函数曲线向左右两侧无限延伸时，曲线和 $x$ 轴无限接近，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，如图 1.1 所示.

特别地，当自变量 $x$ 取正值方向无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于唯一确定的常数 $A$，则称 **$A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty)$$

当自变量 $x$ 取负值方向无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于唯一确定的常数 $A$，则称 **$A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty)$$

例如：对于函数 $y=e^x$，当自变量 $x$ 取负值无限增大时，即当 $x\to-\infty$ 时，对应函数值无限接近于常数零，即 $e^x\to0\ (x\to-\infty)$，如图 1.2 所示. 对于函数 $y=\arctan x$，当 $x\to-\infty$ 时，对应的函数值无限接近于常数 $-\dfrac{\pi}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to+\infty$ 时，对应的函数值无限接近于常数 $\dfrac{\pi}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，如图 1.3 所示.

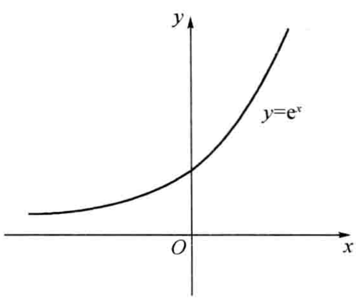



图 1.2

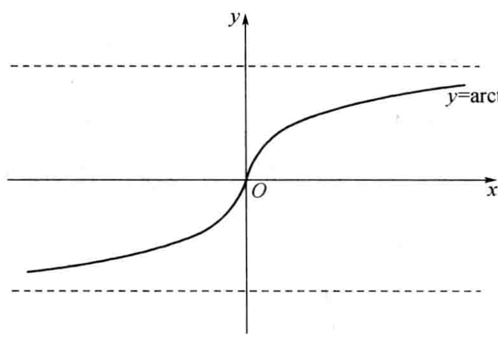



图 1.3

**必须注意的是**：对于极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，自变量的变化方向包括 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 两种方式，只有当 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 两种方式下函数 $f(x)$ 的极限都存在而且相等时，函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限存在，否则，$f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限不存在.

例如：函数 $y=e^x$，$y=\arctan x$ 当 $x\to\infty$ 时极限不存在.

**结论** 如果 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$；$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$；$A=B\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

下面，我们分析当自变量无限接近于一个确定的值时，对应函数的变化趋势.

例如：对于函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当 $x=1$ 时函数无意义，但是，当自变量 $x$ 从 1 的左右两侧无限接近于 1 时，对应的函数值无限接近于唯一确定的常数 2，如图 1.4 所示.

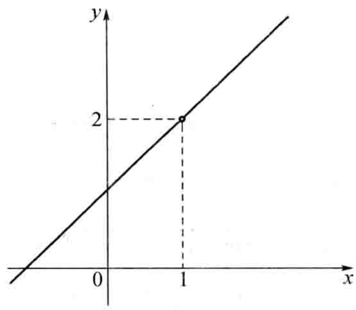



**图 1.4**

**2. $x\to x_0$ 时函数的极限**

**定义 1-2** 设函数 $f(x)$在点 $x_0$ 近旁有意义，当自变量 $x$ 无限接近于 $x_0$ 时，如果对应的函数值 $f(x)$无限接近于唯一确定的常数 $A$，则称 **$A$ 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$



**必须注意的是**：(1) $x$ 无限接近于 $x_0$ 的方式是任意的，它包括变量 $x$ 从 $x_0$ 的左右两侧无限接近于 $x_0$；(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 反映的是在自变量 $x$ 无限接近于 $x_0$ 的过程中对应的函数值$f(x)$的变化趋势，而与函数$f(x)$在点 $x_0$ 处是否有定义以及函数值的大小无关.

例如：函数 $y=x^3$，当自变量 $x$ 无限接近于 $x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$就无限接近于 $x_0^3$，所以当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=x^3$ 的极限为 $x_0^3$，如图 1.5 所示.

对于函数 $f(x)=\begin{cases}2x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，当自变量 $x$ 无限接近于零时，对应的函数值 $f(x)$ 就无限接近于零，所以当 $x\to 0$，函数 $f(x)$ 的极限为 0(与零点处函数值 1 无关)，如图 1.6 所示.

对于函数 $g(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$，当自变量 $x$ 无限接近于零时，对应的函数值 $f(x)$不是无限接近于唯一确定的常数，因此，我们说该函数当 $x\to 0$ 时的极限不存在，如图 1.7 所示.

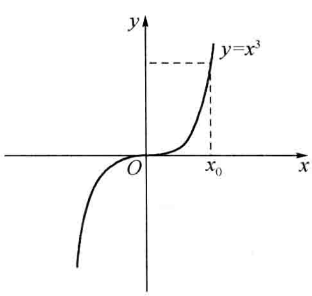



**图 1.5**

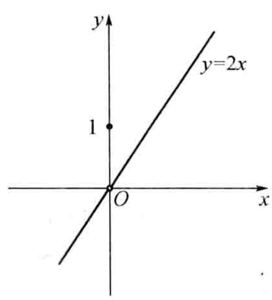



**图 1.6**

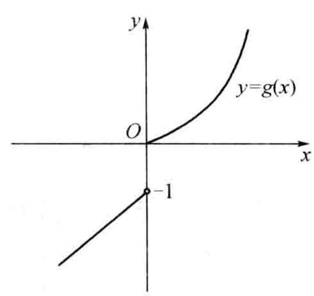



**图 1.7**