



普通高等教育“十二五”规划教材  
电气工程、自动化专业规划教材

# 电能变换与控制

巫付专 沈虹 主编  
王晓雷 主审



电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育“十二五”规划教材  
电气工程、自动化专业规划教材

# 电能变换与控制

巫付专 沈虹 主编

王晓雷 主审

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书筛选了常用变换电路,在精讲原理的同时,增加了检测算法和控制策略的分析及仿真,同时附有典型的 DSP 程序代码,以方便读者更加深刻理解电能变换与控制技术的原理与应用。

全书共分为 6 章,主要讲述电能信号检测与处理所需要的一些基础知识,PWM 的控制方法,常用的 DC/DC 变换(包括升压 Boost、降压 Buck、具有隔离功能 DC/DC 变换等)的基本原理、控制方法、仿真及实现,PWM 变流器统一控制模型与原理,典型电能变换装置原理及实现的方法,以及电能变换装置中常用电感、变压器的设计方法。

本书可作为高等学校电气工程及其自动化、自动化等专业教材使用,也可作为研究生和从事智能电网、柔性输电及新能源发电等相关的科技人员的参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

### 图书在版编目(CIP)数据

电能变换与控制/巫付专,沈虹主编. —北京:电子工业出版社,2014.5

电气工程、自动化专业规划教材

ISBN 978-7-121-23064-6

I. ①电… II. ①巫… ②沈… III. ①电能—变换器—高等学校—教材 IV. ①TN712

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 926 号



策划编辑:陈晓莉

责任编辑:陈晓莉

印 刷:北京市李史山胶印厂

装 订:北京市李史山胶印厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×1 092 1/16 印张:20.5 字数:550 千字

印 次:2014 年 5 月第 1 次印刷

定 价:45.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlt@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

# 前 言

近年来在我国经济持续高速发展的背景下,传统能源的消耗量也大幅增长,由此引发的能源短缺和环境污染等问题成为制约我国经济又好又快发展的瓶颈,为此,发展新能源产业势在必行。《中国新能源产业发展与安全报告(2011—2012)》指出,我国新能源产业总体而言对外依存度较高,风能产业、光伏产业、生物质能产业与地热产业的关键设备及核心技术尚需从欧美引进。随着我国新能源产业迅速发展,国家科研投入的不断加大,作为新能源产业关键设备的核心技术之一——电能变换与控制技术,近年来在高校和科研院所也涌现出了大批科研成果。例如,仅2012年11月19~20日在福州大学召开的国家自然科学基金电工学科08/10年度批准项目交流会上,就有120余项研究成果公布,其理论水平和实验室级的成果已接近或达到欧美水平。然而这些成果在工业化的过程中却出现了严重的滞后。本书编写的初衷是想搭建一个由科研成果到工业产品转化的桥梁,使具备电力电子技术基础知识的读者,能迅速掌握常用电能变换与控制技术,并能胜任该方向的研究与应用工作。

本书的特点为:在筛选了常用变换电路并精讲其原理的同时,增加了检测算法和控制策略的分析以及该电路的模型仿真,同时附有典型的DSP程序代码,以方便读者更加深刻理解电能变换与控制技术的原理与应用。

全书共分为6章。第1章主要讲述信号检测与处理所需要的一些基础知识,包括信号的检测方法与滤波、锁相环技术、瞬时无功理论及坐标变换等。第2章主要讲述PWM的控制方法,包括正弦脉宽调制SPWM、空间矢量SVPWM、滞环控制和三角波比较控制,在三角波比较控制中增加了PID调节的基本原理和离散数学模型。第3章主要讲述常用的DC/DC变换(包括升压Boost、降压Buck、具有隔离功能DC/DC变换等)的基本原理、控制方法、仿真及实现。第4章主要讲述PWM变流器统一控制模型与原理,在此基础上分析了AC/DC和DC/AC变换的基本原理、控制方法、仿真及DSP实现。其中AC/DC变换采用SVPWM控制技术实现,DC/AC变换采用SPWM控制技术实现。第5章讲述典型电能变换装置原理及实现的方法,包括静止无功发生器、有源电力滤波器、动态电压恢复器、功率因数校正器和统一电能质量调节器。其中,静止无功发生器采用滞环控制技术实现;有源电力滤波器采用三角波比较控制技术实现。第6章主要讲述电能变换装置中常用电感、变压器的设计方法。同时,在各章主要内容的后面附有典型的程序,程序代码都经过了调试,但限于篇幅的原因有一定的删减,仅供学习使用。本书中针对不同变换所采用的控制技术和仿真参数选取以及DSP程序并非最优,主要目的是为了便于对相关原理的学习与理解,在实际中具体采用哪种控制技术和仿真参数可视情况选取。

考虑到与其他电力电子技术教材的区别与分工。本书在编写中,简要介绍了电能变换的基本原理和基本概念。着重分析了典型电能变换电路检测算法和控制策略,对应用相对较少AC/AC变换,晶闸管整流的AC/DC变换等本书没有涉及,建议修完电力电子技术和DSP课程后使用。本书可作为电气工程及其自动化、自动化本科生或研究生的专业教材使用,也可作

为从事智能电网、柔性输电及新能源发电等相关科技人员的参考书。

本书第1章的第1、2、3节主要由王双红编写；第2章主要由巫付专编写；第3章的第1、2节由新疆塔里木大学刘媛杰编写；第4章由郑州职业技术学院朱海云编写；第1章第4、5节和第5章的第1、3节由彭圣编写；第6章主要由王耕编写；裴素萍编写了第3章第3节和第5章第4节；燕山大学沈虹编写了第2章第5节和第5章第2、5节；侯婷婷、韩梁、冯占伟编写了第1、3、5、6章的控制部分及应用实例。赵义勇、王小星、曾幼涵和巫曦等同学完成了部分图例的输入工作。感谢恩耐基电气有限公司王斌斌，北京鼎英科技有限公司的马海波，杭州和利时自动化有限公司的封燕芳，武汉大学的严攀以及李建等老师提供的帮助，本书最后由巫付专和沈虹负责统稿。

本书的主审王晓雷教授在百忙之中认真地阅读了本书，提出了许多建设性的意见，在此表示衷心的感谢。

由于编写者水平所限，经验不足、参阅文献有限，书中的缺点和错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

编者

2014年4月

# 目 录

<b>第 1 章 电能信号的检测与处理</b> .....	1
1.1 信号分析与处理基础 .....	1
1.1.1 周期信号的傅里叶级数表示 .....	1
1.1.2 离散信号 .....	8
1.1.3 快速傅里叶变换 .....	10
1.2 信号检测方法 .....	14
1.2.1 均方根法 .....	14
1.2.2 傅里叶法 .....	15
1.2.3 瞬时无功功率理论 .....	17
1.2.4 其他检测方法 .....	26
1.3 信号滤波器 .....	27
1.3.1 滤波器概述 .....	27
1.3.2 模拟滤波器 .....	31
1.3.3 数字滤波器 .....	37
1.4 信号检测调理电路设计 .....	45
1.4.1 检测元件及电路 .....	45
1.4.2 调理电路设计 .....	47
1.5 锁相环技术 .....	49
1.5.1 锁相环基本原理 .....	49
1.5.2 锁相环的捕捉、跟踪过程与倍频 .....	52
思考与练习 .....	53
<b>第 2 章 PWM 控制原理与方法</b> .....	55
2.1 正弦脉宽调制 SPWM .....	55
2.1.1 SPWM 原理 .....	55
2.1.2 产生 SPWM 的算法 .....	59
2.1.3 SPWM 的仿真及 DSP 程序实现 .....	63
2.2 空间矢量 SVPWM .....	65
2.2.1 三相空间矢量电压的分布 .....	66
2.2.2 空间电压矢量的合成 .....	67
2.2.3 SVPWM 的仿真及 DSP 程序实现 .....	69
2.3 滞环控制产生 PWM 的控制方法 .....	81
2.3.1 滞环比较控制方式的原理 .....	81
2.3.2 滞环比较控制分析 .....	81

2.3.3	滞环控制仿真与 DSP 程序的实现 .....	84
2.4	三角波比较法 .....	87
2.4.1	PI 调节 .....	87
2.4.2	三角波比较法的原理 .....	96
2.4.3	三角波比较控制仿真及 DSP 程序的实现 .....	97
2.5	PWM 波其他控制方法简介 .....	99
2.5.1	定频电流滞环最优矢量控制 .....	100
2.5.2	不定频电流滞环最优矢量控制 .....	105
	思考与练习 .....	110
<b>第 3 章</b>	<b>DC-DC 变换原理与控制</b> .....	<b>112</b>
3.1	降压斩波变换电路 .....	112
3.1.1	降压斩波变换电路组成及工作原理 .....	112
3.1.2	降压斩波变换电路稳态分析 .....	112
3.1.3	降压斩波变换电路状态空间平均模型 .....	117
3.1.4	降压斩波变换电路仿真 .....	121
3.2	升压斩波变换电路 .....	124
3.2.1	升压斩波变换电路组成及工作原理 .....	124
3.2.2	升压斩波变换电路稳态分析 .....	124
3.2.3	升压斩波变换电路状态空间平均模型 .....	128
3.2.4	升压斩波变换电路系统仿真 .....	131
3.3	带变压器隔离的 DC-DC 变换电路 .....	133
3.3.1	单端 DC-DC 变换电路原理及设计 .....	133
3.3.2	双端推挽式(PUSH-PULL)DC-DC 变换电路 .....	141
3.3.3	半桥式 DC-DC 变换电路原理及设计 .....	144
3.3.4	全桥 DC-DC 变换电路原理 .....	149
3.4	其他形式的 DC-DC 变换电路 .....	152
3.4.1	直接半桥 DC-DC 变换电路 .....	152
3.4.2	直接全桥 DC-DC 变换电路 .....	153
3.4.3	多相、多重 DC-DC 变换电路简介 .....	159
	思考与练习 .....	160
<b>第 4 章</b>	<b>AC/DC、DC/AC 变换原理与控制</b> .....	<b>161</b>
4.1	PWM 变流器的工作原理 .....	161
4.1.1	PWM 变流器的分类 .....	163
4.1.2	电压型 PWM 变流器数学模型 .....	163
4.2	AC/DC 变换 .....	167
4.2.1	AC/DC 变换的控制策略 .....	167
4.2.2	基于 SVPWM 的控制方法分析 .....	169
4.2.3	AC/DC 变换仿真与 DSP 程序的实现 .....	171
4.3	DC/AC 变换 .....	181
4.3.1	DC/AC 变换的原理 .....	181

4.3.2	DC/AC 变换的控制策略	183
4.3.3	DC/AC 变换仿真与 DSP 程序的实现	186
	思考与练习	195
<b>第 5 章</b>	<b>电能变换的其他应用</b>	<b>198</b>
5.1	静止无功发生器	198
5.1.1	静止无功发生器的工作原理及主电路设计	198
5.1.2	静止无功发生器的检测算法	202
5.1.3	静止无功发生器的控制策略	205
5.1.4	静止无功发生器仿真与 DSP 程序的实现	207
5.2	有源电力滤波器	215
5.2.1	有源电力滤波器的工作原理及主电路设计	215
5.2.2	有源电力滤波器的检测算法	219
5.2.3	有源电力滤波器的控制策略	222
5.2.4	有源电力滤波器仿真及 DSP 程序实现的流程	223
5.3	动态电压恢复器	231
5.3.1	动态电压恢复器工作原理及分类	231
5.3.2	动态电压恢复器检测算法	232
5.3.3	动态电压恢复器的补偿策略	235
5.3.4	动态电压恢复器主要参数的确定	236
5.3.5	动态电压恢复器仿真与 DSP 程序实现的流程	243
5.4	有源功率因数校正器	248
5.4.1	有源功率因数校正的基本原理	249
5.4.2	有源功率因数校正器的控制策略	250
5.4.3	有源功率因数校正器的实例分析与仿真	252
5.4.4	UC3854 简介	260
5.5	统一电能质量调节器(UPQC)	266
5.5.1	统一电能质量调节器的工作原理	266
5.5.2	统一电能质量调节器检测算法及检测硬件电路设计	269
5.5.3	统一电能质量调节器的控制策略	269
5.5.4	统一电能质量调节器的主电路设计	279
5.5.5	统一电能质量调节器的软件设计	284
	思考与练习	286
<b>第 6 章</b>	<b>磁性元件的设计</b>	<b>287</b>
6.1	磁性元件概述	287
6.1.1	磁性元件	287
6.1.2	磁性元件的发展趋势	287
6.2	磁性材料及磁芯结构	288
6.2.1	磁性材料的基本特性	288
6.2.2	磁性材料的分类	290
6.2.3	磁芯材料的选择	293



6.2.4 磁芯结构 .....	295
6.3 变压器的设计 .....	296
6.3.1 变压器概述 .....	296
6.3.2 电子变压器的分类 .....	296
6.3.3 电子变压器的设计 .....	297
6.4 电感的设计 .....	308
6.4.1 电感的种类与特性 .....	308
6.4.2 电感值计算 .....	310
6.4.3 电感的设计 .....	311
思考与练习 .....	319
<b>主要参考文献</b> .....	<b>320</b>

# 第 1 章 电能信号的检测与处理

电能变换主要包括交流一直流(AC/DC)、直流一直流(DC/DC)、直流一交流(DC/AC)和交流一交流(AC/AC)这 4 种。要使这些变换能够准确地完成相应的功能,就需要对信号进行检测与处理。电能信号检测与处理的实时性和准确性是完成电能变换的关键。所以,在分析各种变换与控制之前首先介绍信号检测与处理的基本知识。本章拟讲述信号的基本概念、信号检测与处理的方法以及硬件电路的实现。主要内容包括傅里叶变换、瞬时无功理论、信号滤波和锁相环等。

## 1.1 信号分析与处理基础

为了充分地获取信息和有效利用信息,必须对信号进行分析和处理。信号分析就是通过解析方法或测试方法找出不同信号的特征,从而了解其特性,并掌握它随时间或频率变化的规律及过程。

通过信号分析可以将一个复杂的信号分解成若干个简单信号的分量之和,或者用有限的一组参量去考察信号的特性。信号分析是获取信号源或信号传递系统特征信息的重要手段,人们往往通过对信号特征的深入分析得到信号源的特征、运行情况甚至故障等信息,这正是故障的诊断基础。

若信号在其定义域内除有限个间断点以外均有定义,则称这种信号为连续时间信号,通常记为  $x(t)$ ,时间变量  $t$  为实数。若连续时间信号的自变量连续,函数值也连续,则称为模拟信号。若信号仅在离散的时间点上有定义,而在其他时间没有定义,则称为离散时间信号,通常记为  $x(n)$ ,其中  $n$  为整数。若离散时间信号的自变量离散,函数值连续,则称为抽样信号,若函数值也离散则称为数字信号。

信号分析的基本方法有:时域分析法、频域分析法、复频域分析法。本节我们主要讨论连续时间信号的频域分析和复频域分析。

### 1.1.1 周期信号的傅里叶级数表示

由信号分解(可查阅相关信号分析书籍)的思想可知,三角函数集和复指数函数集是完备正交函数集,任意信号都可以分解为三角函数表达式。换言之,任意信号都可视为一系列正弦信号的组合,这些正弦信号的频率、相位等特性势必反映了原信号的性质,这样就出现了用频率域的特性来描述时间域信号的方法,即信号的频域分析法。

周期信号是定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,每隔一定时间  $T$  按相同规律变化的信号,其表达式可表示为

$$x(t) = x(t + mT) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-1)$$

若周期信号满足狄里赫利条件,则在一个周期内,周期函数具有如下特性:

- (1) 有限个间断点;
- (2) 有限个极值点;

(3) 函数绝对可积, 即  $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$ 。

电能变换系统和其他实际工程系统一样, 其需要处理的信号一般都能满足狄里赫利条件, 因此, 无特殊需要, 不再专门加以阐明。任意周期函数可展成正交函数线性组合的无穷级数, 若正交函数集是三角函数集或复指数函数集, 则展成的级数分别为三角形式和复指数形式的傅里叶级数。

### 1. 三角形式的傅里叶级数

设周期函数  $x(t)$ , 其周期为  $T_0$ , 傅里叶级数的三角形式为

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1-2)$$

式(1-2)中,  $\omega_0$  是角频率, 满足  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ;  $a_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 、 $b_n (n=1, 2, \dots)$  为傅里叶系数,

它们满足:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt \quad (1-3)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1-4)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1-5)$$

显然, 式(1-3)可以合并到式(1-4)中, 并且  $a_n$  和  $b_n$  分别是  $n$  的偶函数和奇函数。将式(1-2)中的同频率项合并可得

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1-6)$$

式(1-6)中,  $A_0 = a_0$ 。比较式(1-2)和式(1-6)可以看出傅里叶级数中各变量之间有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= A_n \cos \varphi_n \\ b_n &= A_n \sin \varphi_n \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \end{aligned} \right\} n = 1, 2, 3, \dots \quad (1-7)$$

式(1-6)称为周期信号  $x(t)$  的余弦型傅里叶级数展开式。可以看出其有以下特性:

(1) 等式左端为一复杂信号的时域表示, 右端则是简单的正弦信号的线性组合, 利用傅里叶级数的变换可以把复杂的问题分解为简单问题进行分析处理;

(2) 虽然等式左端是信号的时域表示, 右端是信号的频域表示, 但表示的是同一信号, 并且完全等效;

(3) 任意周期信号可以分解为直流分量和一系列正弦、余弦分量, 这些正弦、余弦分量的频率必定是基频  $\omega_0$  的整数倍, 通常把频率为  $\omega_0$  的称为基波, 频率为  $2\omega_0$ 、 $3\omega_0$  …… 分别称为二次谐波、三次谐波等;

(4) 各分量的幅度  $A_n$  以及相位  $\varphi_n$  的大小取决于信号的时域波形, 而且是频率  $n\omega_0$  的函数。

例 1 求图 1-1 所示的周期矩形脉冲信号的三角傅里叶级数表达式。

解:根据傅里叶级数的公式可得:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) \cos n\omega_0 t dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) \sin n\omega_0 t dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \frac{1}{n\omega_0} \cos n\omega_0 t \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{2}{T} \frac{1}{n\omega_0} (-\cos n\omega_0 t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

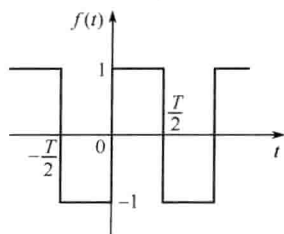


图 1-1 周期矩形脉冲信号

所以,周期矩形脉冲信号的傅里叶级数为:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots + \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t \right] \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

## 2. 复指数形式的傅里叶级数

复指数函数集  $\{e^{jn\omega_0 t}\} (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  在区间  $(t_0, t_0 + T)$  内是一个完备的正交函数集,因此,对任意的周期信号也可以表示成  $\{e^{jn\omega_0 t}\}$  的线性组合,即傅里叶级数的指数形式。

根据欧拉公式:

$$\sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}, \quad \cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

则式(1-6)可以写成为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} [e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \varphi_n)}] \\ &= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-jn\omega_0 t} e^{-j\varphi_n} \end{aligned}$$

因为  $a_n$  和  $b_n$  分别是  $n$  的偶函数和奇函数,上式可以写为

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n} + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} A_n e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n}$$

由  $\varphi_0=0, A_0$  可表示为  $A_0 e^{j\varphi_0} e^{jn\omega_0 t}$ ,所以上式可进一步化简为

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (1-8)$$

式(1-8)就是傅里叶级数的指数形式,其中  $X(n\omega_0) = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n}$  称为复指数形式傅里叶系数,可求得:

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} [A_n \cos \varphi_n + j A_n \sin \varphi_n] = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) [\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t] dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-9)
\end{aligned}$$

例 2 求图 1-2 所示的周期矩形脉冲信号的复指数形式傅里叶级数的表达式。

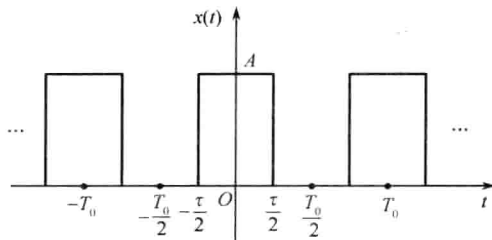


图 1-2 周期信号

解: 图 1-2 所示的矩形脉冲信号在一个周期内可表示为

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

按式(1-9)可求得复指数形式傅里叶系数为

$$\begin{aligned}
X(n\omega_0) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-jn\omega_0 t} dt \\
&= \frac{A}{T_0} \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{A\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{1}{2} n\omega_0 \tau}{\frac{1}{2} n\omega_0 \tau}
\end{aligned}$$

式中出现的  $\frac{\sin(x)}{x}$  函数在信号理论中经常遇到, 称其为取样函数, 记作  $S_a(x)$ , 其变化规律如图 1-3 所示。

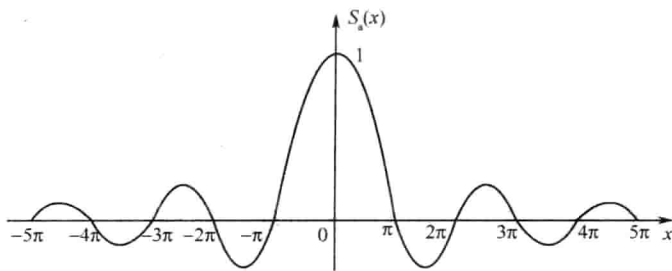


图 1-3 取样函数  $S_a(x)$

由图 1-3 可知  $S_a(x)$  是偶函数, 且当  $x=0$  时,  $S_a(x)$  取得最大值 1, 随着  $|x|$  的增大, 取样函数  $S_a(x)$  成衰减趋势,  $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  为过零点。即  $X(n\omega_0)$  可写为

$$X(n\omega_0) = \frac{A\tau}{T_0} S_a\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

### 3. 信号波形的对称性在傅里叶级数中的应用

已知周期信号  $x(t)$  展开为傅里叶级数的形式, 如果  $x(t)$  为实函数且其波形满足某种对称性, 则在其傅里叶级数中有些项将不出现, 留下的各项系数的表示式也变得比较简单。周期信号的对称关系主要有两种: 一种是整个周期相对于纵坐标轴的对称关系, 这取决于周期信号是偶函数还是奇函数, 也就是展开式中是否含有正弦项或余弦项; 另一种是整个周期前后的对称关系, 这将决定傅里叶级数展开式中是否含有偶次项或奇次项。下面简单说明函数的对称性与傅里叶系数的关系。

#### (1) 偶函数

若周期为  $T_1$  的周期信号  $x(t)$  满足偶函数特性, 即

$$x(t) = x(-t) \quad (1-10)$$

则周期信号  $x(t)$  的傅里叶级数的三角形形式  $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$  中的各个系数分别为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} x(t) \cos n\omega_1 t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) \sin n\omega_1 t dt = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

所以, 在偶函数的傅里叶级数中不会有正弦项, 只可能含有直流量和余弦分量。

#### (2) 奇函数

若周期为  $T_1$  周期信号  $x(t)$  满足奇函数特性, 即

$$x(t) = -x(-t) \quad (1-11)$$

则周期信号  $x(t)$  的傅里叶级数的三角形形式  $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$  中的各个系数分别为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) dt = 0 \\ a_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) \cos n\omega_1 t dt = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} x(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

所以, 在奇函数的傅里叶级数中不会含有直流量和余弦分量, 只可能包含正弦分量。

#### (3) 奇谐函数

若周期为  $T_1$  周期信号  $x(t)$  满足奇谐函数特性, 即

$$x\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right) = -x(t) \text{ 或 } -x\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right) = x(t) \quad (1-12)$$

则周期信号  $x(t)$  的傅里叶级数的三角形形式  $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$  中的各个系数分别为

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_n &= \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} x(t) \cos n\omega_1 t dt & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases} \\
 b_n &= \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} x(t) \sin n\omega_1 t dt & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}
 \end{aligned}$$

可见,在奇谐函数的傅里叶级数中,只会含有基波和奇次谐波的正弦、余弦分量,而不会包含直流和偶次谐波分量。

#### (4) 偶谐函数

若周期为  $T_1$  周期信号  $x(t)$  满足偶谐函数特性,即

$$x\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right) = x(t) \quad (1-13)$$

则周期信号  $x(t)$  的傅里叶级数的三角形式  $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$  中的各个系数分别为

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} x(t) dt \\
 a_n &= \begin{cases} \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} x(t) \cos n\omega_1 t dt & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ 0 & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases} \\
 b_n &= \begin{cases} \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} x(t) \sin n\omega_1 t dt & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ 0 & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}
 \end{aligned}$$

可见,在偶谐函数的傅里叶级数中,只会含有直流量与偶次谐波的正弦、余弦分量,而不会包含奇次谐波分量。

熟悉并掌握周期信号的奇、偶和奇谐、偶谐等性质后,对于一些波形所包含的谐波分量常可以做出迅速判断,并使傅里叶级数系数的计算得到一定的简化。

#### 4. 周期信号的频谱

由上文所述,周期信号由一系列余弦信号的和来表示,即

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (1-14)$$

式(1-14)表明,一个周期为  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  的信号,除直流分量外还包含了频率为原信号频率以及原信号频率整数倍的一系列余弦信号,依次将它们称为基波信号 ( $n=1$ ),二次谐波 ( $n=2$ ),以及三次、四次谐波信号等,它们的振幅分别为对应的  $A_n$ , 相位分别为对应的  $\varphi_n$ 。由此可见,周期信号的傅里叶级数展开式全面地描述了组成信号的各余弦分量的特征:各谐波分量的频率、相位和幅值。即相当于全面地描述了原信号  $x(t)$  本身。对于一个周期信号而言,只要掌握了信号的  $\omega_0$ 、各谐波的幅值  $A_n$  和相位  $\varphi_n$ ,就相当于掌握了该信号的所有特征。

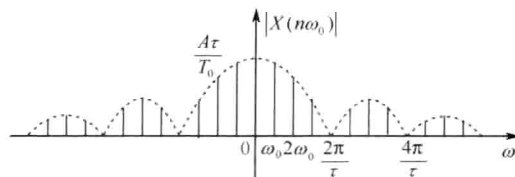
为了既方便又明确地表示一个信号中含有哪些频率分量,各频率分量所占的比重如何,便可以画出频谱图来直观地表示。如果以频率为横轴,以幅值或相位为纵轴,绘出  $A_n$  及  $\varphi_n$  等的变化关系,便可直观地看出各频率分量的相对大小和相位情况,这样的图就称为三角形式表示的信号幅度频谱和相位频谱。指数形式的傅里叶级数表达式中复变量  $X(n\omega_0) = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n}$  是离散频率  $n\omega_0$  的复函数,其模  $|X(n\omega_0)| = \frac{1}{2} A_n$  反映了各谐波分量的幅值,它的相角  $\varphi_n$  反映了各谐波分量的相位,因此它能完全描述任意波形的周期信号。

**例 3** 画出例 2 周期矩形脉冲信号的幅度频谱、相位频谱以及二者合成的频谱图,其中取  $A=1, T_0=4\tau$ 。

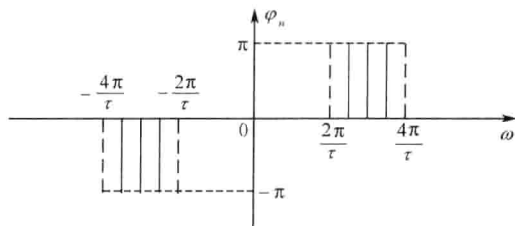
**解:**从例 2 中已经求出:

$$X(n\omega_0) = \frac{A\tau}{T_0} S_a\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

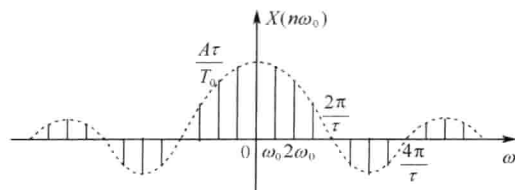
可以看出,  $X(n\omega_0)$  为实数,其相位只有 0 和  $\pm\pi$ ,故可以直接画出其幅度频谱图、相位频谱图以及二者的合成频谱图,如图 1-4 所示。



(a) 周期矩形脉冲信号的幅度谱



(b) 周期矩形脉冲信号的相位谱



(c) 周期矩形脉冲信号的频谱图

图 1-4 周期矩形脉冲信号的幅度谱、相位谱及其频谱图

图 1-4 反映了周期信号频谱的一些性质,实际上它也是所有周期信号频谱的普遍特性。

(1) 离散性:指频谱由频率离散而不连续的谱线组成,这种频谱称为离散频谱或谱线。

(2) 谐波性:指各次谐波分量的频率都是基波频率  $\omega_0$  的整数倍,而且相邻谐波的频率间隔是均匀的,即谱线在频率轴上的位置是  $\omega_0$  的整数倍。

(3) 收敛性:指谱线幅度随  $n \rightarrow \infty$  而衰减到零,因此这种频谱具有收敛性或衰减性。

对于连续信号的频域分析,主要分为周期信号与非周期信号。周期信号频域分析一般展



开为信号的傅里叶级数表示,而对于非周期信号其傅里叶级数没有实际意义,在信号分析领域非周期信号的频域分析要求对信号进行傅里叶变换,而本书涉及的信号为周期信号,所以关于信号的傅里叶变换及其性质方面的内容,读者可参阅关于信号分析方面的书籍,在此不再赘述。

## 1.1.2 离散信号

离散信号是指在时间上是离散的,即只在某些不连续的规定时刻给出信号的函数值,而在其他时刻没有定义。时域离散时间信号可以从时域连续时间信号进行采样得到,也就是在采样瞬间保留原来连续信号的幅度值,这种信号称为采样信号或抽样信号。它的特点是在时间上是离散的,而在幅度上是具有无限精度的连续值。为了对信号进行数字化处理,必须按要求对其幅度的精度进行有限位量化,以便被数字系统所接受,这种时间上离散、幅度上被量化的信号称为数字信号。只有数字信号才能用数字系统进行各种处理,以达到分析、识别或使用的目的。

### 1. 连续时间信号的采样

离散时间信号通常是由连续时间信号经周期采样得到。完成采样功能的器件称为采样器,图 1-5 为采样器及其连续信号采样过程示意图。

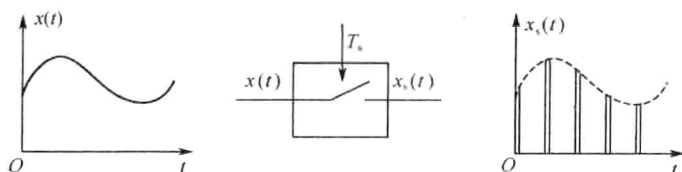


图 1-5 连续信号的采样过程示意图

连续信号  $x(t)$  经过采样器,其开关周期性地开闭,开闭周期为  $T_s$ ,每次闭合时间为  $\tau$ ,  $\tau = T_s$ ,这样采样器的输出端就得到一串时间上离散的脉冲信号  $x_s(t)$ 。一般情况下,  $T_s$  是一个定值,即均匀采样,称  $T_s$  为采样周期,其倒数  $f_s = 1/T_s$  为采样频率,或  $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T_s$  为采样角频率。理想情况下,由于  $\tau = T_s$ ,可认为  $\tau \rightarrow 0$ ,即  $x_s(t)$  由一系列冲激函数构成。每个冲激函数的强度等于连续信号在该时刻的抽样值  $x(nT_s)$ 。其采样过程模型如图 1-6 所示。

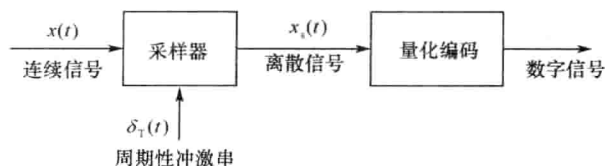


图 1-6 采样过程模型图

根据图 1-6 的采样过程,理想化的采样过程是一个将连续信号进行脉冲调制的过程,即

$x_s(t)$  表示为连续信号  $x(t)$  与周期性冲激串  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$  的乘积:

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (1-15)$$

设连续信号  $x(t)$  的傅里叶变换为  $X(\omega)$ ,离散信号  $x_s(t)$  的傅里叶变换为  $X_s(\omega)$ ,已知周