21世纪高等学校规划教材 | 计算机科学与技术

离散数学

邓米克 邵学才 编著

清华大学出版社

21世纪高等学校规划教材 | 计算机科学与技术

离散数学

邓米克 邵学才 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书根据培养工程应用型人才的目标，以“淡化理论，加强应用”为指导思想，力图做到“宜教易学”。书中内容包括集合论（集合、二元关系与函数）、组合计数初步、图论、数理逻辑（命题逻辑、谓词逻辑）、代数系统简介5个主要部分。在涵盖离散数学各方面内容的同时，提供多层次的精选例题，并给出多种解题思路与方法，意在提高学生的解题能力及技巧。

本书面向工程应用型大学的计算机专业师生，对考研复习也不失为很好的辅助资料。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/邓米克，邵学才编著. —北京：清华大学出版社，2014

21世纪高等学校规划教材·计算机科学与技术

ISBN 978-7-302-36160-2

Ⅰ. ①离…　Ⅱ. ①邓…　②邵…　Ⅲ. ①离散数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第072653号

责任编辑：郑寅堃　王冰飞
封面设计：傅瑞学
责任校对：白　蕾
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：18.25　　**字　　数**：445千字
版　　次：2014年8月第1版　　**印　　次**：2014年8月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：35.00元

产品编号：047765-01

出版说明

随着我国改革开放的进一步深化，高等教育也得到了快速发展，各地高校紧密结合地方经济建设发展需要，科学运用市场调节机制，加大了使用信息科学等现代科学技术提升、改造传统学科专业的投入力度，通过教育改革合理调整和配置了教育资源，优化了传统学科专业，积极为地方经济建设输送人才，为我国经济社会的快速、健康和可持续发展以及高等教育自身的改革发展做出了巨大贡献。但是，高等教育质量还需要进一步提高以适应经济社会发展的需要，不少高校的专业设置和结构不尽合理，教师队伍整体素质亟待提高，人才培养模式、教学内容和方法需要进一步转变，学生的实践能力和创新精神亟待加强。

教育部一直十分重视高等教育质量工作。2007 年 1 月，教育部下发了《关于实施高等学校本科教学质量与教学改革工程的意见》，计划实施“高等学校本科教学质量与教学改革工程”（简称“质量工程”），通过专业结构调整、课程教材建设、实践教学改革、教学团队建设等多项内容，进一步深化高等学校教学改革，提高人才培养的能力和水平，更好地满足经济社会发展对高素质人才的需要。在贯彻和落实教育部“质量工程”的过程中，各地高校发挥师资力量强、办学经验丰富、教学资源充裕等优势，对其特色专业及特色课程（群）加以规划、整理和总结，更新教学内容、改革课程体系，建设了一大批内容新、体系新、方法新、手段新的特色课程。在此基础上，经教育部相关教学指导委员会专家的指导和建议，清华大学出版社在多个领域精选各高校的特色课程，分别规划出版系列教材，以配合“质量工程”的实施，满足各高校教学质量和教学改革的需要。

为了深入贯彻落实教育部《关于加强高等学校本科教学工作，提高教学质量的若干意见》精神，紧密配合教育部已经启动的“高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作”，在有关专家、教授的倡议和有关部门的大力支持下，我们组织并成立了“清华大学出版社教材编审委员会”（以下简称“编委会”），旨在配合教育部制定精品课程教材的出版规划，讨论并实施精品课程教材的编写与出版工作。“编委会”成员皆来自全国各类高等学校教学与科研第一线的骨干教师，其中许多教师为各校相关院、系主管教学的院长或系主任。

按照教育部的要求，“编委会”一致认为，精品课程的建设工作从开始就要坚持高标准、严要求，处于一个比较高的起点上。精品课程教材应该能够反映各高校教学改革与课程建设的需要，要有特色风格、有创新性（新体系、新内容、新手段、新思路，教材的内容体系有较高的科学创新、技术创新和理念创新的含量）、先进性（对原有的学科体系有实质性的改革和发展，顺应并符合 21 世纪教学发展的规律，代表并引领课程发展的趋势和方向）、示范性（教材所体现的课程体系具有较广泛的辐射性和示范性）和一定的前瞻性。教材由个人申报或各校推荐（通过所在高校的“编委会”成员推荐），经“编委会”认真评审，最后由清华大学出版

社审定出版。

目前，针对计算机类和电子信息类相关专业成立了两个“编委会”，即“清华大学出版社计算机教材编审委员会”和“清华大学出版社电子信息教材编审委员会”。推出的特色精品教材包括：

(1) 21世纪高等学校规划教材·计算机应用——高等学校各类专业，特别是非计算机专业的计算机应用类教材。

(2) 21世纪高等学校规划教材·计算机科学与技术——高等学校计算机相关专业的教材。

(3) 21世纪高等学校规划教材·电子信息——高等学校电子信息相关专业的教材。

(4) 21世纪高等学校规划教材·软件工程——高等学校软件工程相关专业的教材。

(5) 21世纪高等学校规划教材·信息管理与信息系统。

(6) 21世纪高等学校规划教材·财经管理与应用。

(7) 21世纪高等学校规划教材·电子商务。

(8) 21世纪高等学校规划教材·物联网。

清华大学出版社经过三十多年的努力，在教材尤其是计算机和电子信息类专业教材出版方面树立了权威品牌，为我国的高等教育事业做出了重要贡献。清华版教材形成了技术准确、内容严谨的独特风格，这种风格将延续并反映在特色精品教材的建设中。

清华大学出版社教材编审委员会

联系人：魏江江

E-mail：weijj@tup.tsinghua.edu.cn

前言

离散数学是理工科高等院校计算机和信息类专业必修的、重要的专业基础课程。离散数学课程主要介绍计算机科学的基础理论，它通常由集合论(包括二元关系与函数)、数理逻辑、图论和代数结构四部分组成。它不仅为后续课程(数据结构、算法分析、编译原理、操作系统、人工智能等)作必要的理论准备，而且离散数学中的综合、分析、归纳、演绎、递推等方法在计算机科学技术中有着广泛的用途，该课程还能有效地提高学生的逻辑思维、抽象思维和创新能力。

本书是供以培养应用型人才为主的教学型大学计算机和信息类专业本科生使用的教材。应用型人才既不同于研究型大学培养的计算机科学的研究人才，也不同于高等职业教育所培养的以实践能力为主的实用型人才。应用型人才应当具有一定的理论素质，也应当具有较强的计算机有关方面的研发能力。因此，为了适应应用型人才培养的要求，在本教材中对于重要的定理都给出了详尽的证明，并且用众多的例题有层次地剖析定理，提示定理的实质和内涵，使学生对定理有比较深刻的理解，从而提高学生的理论修养；另外，本教材中有大量的科学理论应用于实践的范例，以培养并增强学生如何实施"科学理论—技术—生产力"转化的观念和方法，提高学生适应社会的能力。

在本教材中，除了保留传统的离散数学的主要内容外，还增加了在计算机应用技术中有着广泛用途的"组合计数初步"。在介绍"组合计数初步"时，主要介绍了容斥原理与递推关系、生成函数等。

由于离散数学的内容与后续课程(如数据结构等)关系密切，因此本书也可以作为报考计算机或信息类专业研究生的参考资料。

本书由北京工业大学计算机学院讲课教授邓米克和邵学才共同编写。其中，第 1～3 章由邵学才编写；第 4～7 章由邓米克编写。在教材的编写过程中，北京工业大学原计算机科学系系主任刘玉林教授提出了颇有见地的建设性建议，使本教材增色不少，他的厚实、稳重的长者风范，作者铭记在心；既有坚实的理论素养，又有丰富的软件研发经验的周小兵教授的意见使作者受益匪浅；此外，编者还得到了任强、吴士秀、董淑芳等教师的悉心帮助，作者在此一并对他们深表谢意。

最后，还要感谢北京工业大学计算机学院段红峰教务科长，他对教材建设深远意义的深刻理解，使他自始至终关切本教材的编写工作。本教材能顺利地完成编写工作是和段红峰科长的支持和帮助分不开的。

由于作者水平有限，教材中难免有不足之处，敬请读者指正。

作　者

2014 年 5 月于北京

目录

第1章 集合

集合论是现代数学的基础，由于集合具有普遍适用的特性，其在各个科技领域得到广泛应用。集合论的内容是极其丰富的，有创建于19世纪后期的朴素集合论和创建于20世纪初的公理化集合论等，本章主要介绍朴素集合论的基础知识，包括什么是集合，以及有关子集、空集、全集、补集、幂集等基本概念，集合的基本运算和集合代数的有关公式等。

1.1 集合的基本概念

集合是一种原始概念，它和几何学中的点、线一样，无法给出明确的定义，只能给出说明性的描述。

集合就是具有某种特点的研究对象的聚合，其中每一个研究对象称为这个集合的元素。例如，当研究对象为中国大学生时，上海大学的全体学生可以构成一个集合，而上海大学的每一个学生就是这个集合中的一个元素。在初等数论中，研究的对象是整数，所以奇数的全体或偶数全体都可以构成集合，且每一个奇数或每一个偶数分别是这两个集合中的元素。

通常用大写的英文字母A、B、C、…来代表集合；用小写的英文字母a、b、c、…来代表元素，如果a是集合A中的元素，称a属于A，并记作

$$a \in A$$

如果a不是集合A中的元素，称a不属于A，并记作

$$a \notin A$$

1.1.1 集合的表示方法

集合有多种表示方法，下面介绍两种常用的表示方法。

1. 列举法

这种表示方法是把集合中的所有元素一一列举出来，元素之间用逗号分开，并用花括号括起来。如集合A中有5个元素，它们分别为2、3、5、7、11。用列举法可以把集合A表示为

$$A=\{2,3,5,7,11\}$$

易见，$2\in A$，但$6\notin A$。

当集合中的元素数较多(甚至是无限)时，如果元素之间有一定规律可循，有时也可以用

列举法来表示。如

$$B=\{2,4,6,\cdots,100\}$$

易见，集合 B 中的元素为小于等于 100 的正偶数。又如

$$C=\{1,2,3,\cdots\}$$

易见，集合 C 中的元素为所有正整数。

2. 特征法

特征法也称为叙述法，它以某个小写英文字母来统一表示集合中的元素，并指出这类元素的共同特征。如

$$P=\{x \mid x\text{ 是素数}, x\leqslant 11\}$$

这表明集合 P 中元素为素数且都小于或等于 11，即集合 P 中的元素就是 2、3、5、7、11。可见集合 P 中的元素和集合 A 中的元素是完全相同的，又如

$$Q=\{x \mid x\text{ 是正偶数}, x\leqslant 100\}$$

这表明集合 Q 中元素为正偶数且都小于或等于 100。可见集合 Q 中的元素和集合 B 中的元素是完全相同的。再如

$$R=\{x \mid x\text{ 是正整数}\}$$

易见集合 R 和集合 C 的元素完全相同。

定义 1.1.1 当集合 S 和集合 T 的元素相同时，称这两个集合相等，记作 $S=T$。

在上面提到的集合中，有 $A=P,B=Q,C=R$。

1.1.2 子集

定义 1.1.2 设 A、B 是集合，如果 A 中每一个元素又都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集。

当 A 为 B 的子集时，也称 B 包含了 A，或 A 含在 B 中，并记作：

$$B\supseteq A \quad\text{或}\quad A\subseteq B$$

如果 A 不是 B 的子集，也就是说，在 A 中总有一些元素不属于 B，则称 B 不包含 A，或 A 不含在 B 中，并记作

$$B\not\supseteq A \quad\text{或}\quad A\not\subseteq B$$

如果 A 是 B 的子集，但 $A\neq B$，亦即在 B 中总存在一些元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，并记作

$$B\supset A \quad\text{或}\quad A\subset B$$

例如，设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{1,3,5,7,9\}$。易见，B 是 A 的真子集，即有 $A\supset B$；B 也是 C 的真子集，即有 $C\supset B$；但 C 不是 A 的子集，因为 7 和 9 都是 C 的元素而都不是 A 的元素，所以 $A\not\supseteq C$；A 也不是 C 的子集，因为 2 和 4 都是 A 的元素而都不是 C 的元素，所以 $C\not\supseteq A$。

由集合间的包含关系易得下列定理。

定理 1.1.1 集合 A 和集合 B 相等的充要条件是：$A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$。

上述定理在证明集合相等时，是一种基本而有效的方法。

下面介绍空集的概念。

不含有任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$或$\{\}$。空集是任何集合的子集。

1.1.3 全集和补集

在实际工作中，我们所研究的对象总是限制在一定范围内，例如我们要研究中国妇女的生活状况时，研究对象可以是上海市的妇女，也可以是四川省的妇女，但研究对象总是限制在中国妇女这个范围内，在这种情况下，我们称“中国妇女的全体”组成的集合为全集。

一般的情况是：当我们讨论总是限制在某个集合的子集时，这个集合就是全集。

全集常用大写英文字母E或U来表示，本书采用E表示全集。

下面介绍补集。

定义 1.1.3 设A是集合，由属于全集E但不属于A的所有元素组成的集合称为A的补集，记作$\overline{A}$或$\sim A$。

例如，设全集E为北京市大学生的全体。A是北京市所有女大学生组成的集合，即有

$$E=\{x \mid x\text{是北京市的大学生}\}$$

$$A=\{x \mid x\text{是北京市的女大学生}\}$$

则A的补集为

$$\overline{A}=\{x \mid x\text{是北京市的男大学生}\}$$

1.1.4 幂集

定义 1.1.4 设A是集合，由A的所有子集作为元素构成的集合称为A的幂集，记作$P(A)$。

例如，集合$A=\{a,b,c\}$，A的子集有$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a,b\}$、$\{a,c\}$、$\{b,c\}$以及空集$\varnothing$和A（A也是A的子集），由此可知

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

又如，$A=\{1,2,3,4\}$，则A的幂集为：

$$\begin{aligned}P(A)=\{&\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\}\\&\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}\end{aligned}$$

当集合中含有有限个元素时，称为有限集，否则称为无限集。有限集A中元素的个数称为集合A的基，记作$|A|$，如$A=\{a,b,c\}$，则$|A|=3$。

易见，当$|A|=3$时，其幂集的基$|P(A)|=8=2^3$；当$|A|=4$时，其幂集的基$|P(A)|=16=2^4$，一般情况有下列结论。

定理 1.1.2 设A是具有n个元素的有限集，即$|A|=n$，则A的幂集$P(A)$的基为2^n，即$|P(A)|=2^n$。

证明 由排列组合的知识可知，幂集的基为

$$|P(A)|=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n$$

又由二项式定理可知

$$(a+b)^n=C_n^0\cdot a^n+C_n^1\cdot a^{n-1}\cdot b+\cdots+C_n^{n-1}\cdot a\cdot b^{n-1}+C_n^n\cdot b^n$$

特别取$a=b=1$，则有

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

由此证得

$$|P(A)| = 2^n$$

由定理 1.1.2 可知，当集合 A 含有 n 个元素时，其幂集 $P(A)$ 含有 2^n 个元素，因此可以把幂集 $P(A)$ 中的元素与 n 位二进制序列 $00\cdots0 \sim 11\cdots1$ 建立一一对应关系，从而得到一种比较规范的求幂集的方法。具体做法如下：

首先把集合 A 中的 n 个元素确定排列顺序，如 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，而把 $P(A)$ 中的元素写成含有下标的子集 A_k，其中 k 是 n 位二进制序列，于是 $P(A)$ 中的元素 A_k 是这样的子集：当 n 位二进制序列 k 中的第 i 位为 1 时，子集 A_k 含有元素 a_i，否则 A_k 不含有元素 a_i。

例如，$A=\{a_1,a_2,a_3\}$，其幂集 $P(A)=\{A_{000},A_{001},A_{010},A_{011},A_{100},A_{101},A_{110},A_{111}\}$，其中

$$A_{000} = \varnothing$$

$$A_{001} = \{a_3\}$$

$$A_{010} = \{a_2\}$$

$$A_{011} = \{a_2,a_3\}$$

$$A_{100} = \{a_1\}$$

$$A_{101} = \{a_1,a_3\}$$

$$A_{110} = \{a_1,a_2\}$$

$$A_{111} = \{a_1,a_2,a_3\}$$

即有

$$P(A)=\{\varnothing,\{a_3\},\{a_2\},\{a_2,a_3\},\{a_1\},\{a_1,a_3\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_2,a_3\}\}。$$

又如，设 $A=\{a,b,c,d\}$，则其幂集 $P(A)=\{A_{0000},A_{0001},A_{0010},A_{0011},A_{0100},A_{0101},A_{0110},A_{0111},A_{1000},A_{1001},A_{1010},A_{1011},A_{1100},A_{1101},A_{1110},A_{1111}\}=\{\varnothing,\{d\},\{c\},\{c,d\},\{b\},\{b,d\},\{b,c\},\{b,c,d\},\{a\},\{a,d\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b\},\{a,b,d\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\}\}$。

为了叙述方便，一些常用的数集将用特定的字母表示：

$\mathbf{N}$——自然数集；

$\mathbf{Z}$——整数集；

$\mathbf{Q}$——有理数集；

$\mathbf{R}$——实数集；

$\mathbf{C}$——复数集；

$\mathbf{Z}^+$——正整数集；

$\mathbf{Z}^-$——负整数集；

$\mathbf{Q}^+$——正有理数集；

$\mathbf{Q}^-$——负有理数集；

$\mathbf{R}^+$——正实数集；

$\mathbf{R}^-$——负实数集。

在本书中，自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ 也称为扩大自然数集。

1.2 集合的基本运算

1.2.1 交和并

定义 1.2.1 设 A、B 是集合，由 A 和 B 的所有共同元素组成的集合称为 A 和 B 的交，记作 $A\cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } A \in B\}$$

例如，集合 A 和集合 B 分别为

$$A = \{2,4,6,8\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5\}$$

则

$$A \cap B = \{2,4\}$$

又如，集合 A 和集合 B 分别为

$$A = \{a,b,c,d\}$$
$$B = \{a,c,d,e,f\}$$

则

$$A \cap B = \{a,c,d\}$$

集合的运算可以用文氏图形象地表示，在图 1.2.1 中，矩形表示全集 E，两个圆分别表示集合 A 和集合 B，图中的阴影部分就是 A 和 B 的交，即 $A\cap B$。

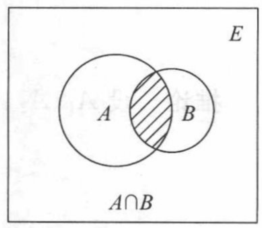

图 1.2.1

由集合交运算的定义可知，交运算具有以下性质：

(1) $A\cap B=B\cap A$；

(2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) $A\cap A=A$；

(4) $A\cap\varnothing=\varnothing$；

(5) $A\cap E=A$。

如果集合 $A\cap B=\varnothing$，也即 A 和 B 没有共同元素，则称 A 和 B 不相交。

定义 1.2.2 设 A、B 是集合，由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为 A 和 B 的并，记作 $A\cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

例如，集合 A 和集合 B 分别为

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$
$$B = \{2,4,6\}$$

则

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$$

又如，集合 A 和集合 B 分别为

$$A = \{a,b,c\}$$
$$B = \{c,d,e,f\}$$

则

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

集合并运算的文氏图表示如图 1.2.2 所示，图中的阴影部分就是 $A \cup B$。

由集合并运算定义可知，并运算具有以下性质：

(1) $A \cup B = B \cup A$；

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；

(3) $A \cup A = A$；

(4) $A \cup \varnothing = A$；

(5) $A \cup E = E$。

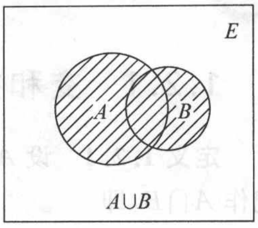

图 1.2.2

集合的交、并运算有着密切联系，下面给出交、并运算的有关公式。

定理 1.2.1 设 A、B、C 是集合，则

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

推论 设 A、B_1、B_2、…、B_n 是集合，则

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$$
$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \cdots \cap (A \cup B_n)$$

定理 1.2.1 表明集合的交运算对于并运算是可分配的，或称交运算对并运算满足分配律；并且并运算对于交运算也是可分配的，即并运算对交运算也满足分配律。

定理 1.2.2 设 A、B 是集合，则

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

推论 设 A_1、A_2、…、A_n 是集合，则

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$$
$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n$$

定理 1.2.2 就是著名的摩根律。定理 1.2.1 和定理 1.2.2 都可用定理 1.1.1 证明之，这里不再详述。

定理 1.2.3 设 A、B 是集合，则

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

证明 先证第一等式。

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap E) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (E \cup B) \\ &= A \cap E \\ &= A \end{aligned}$$

由此得证。再证第二等式。

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= (A \cap A) \cup (A \cap B) \\ &= A \cup (A \cap B) \\ &= A \end{aligned}$$

由此得证。定理 1.2.3 称为交、并运算满足吸收律。

定理 1.2.4 设 A、B 是集合，则

$$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$$

证明 由并对交的分配律可知

$$\begin{aligned} A \cup (\overline{A} \cap B) &= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) \\ &= E \cap (A \cup B) \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

定理 1.2.4 给出了一个不知名的公式，但这个公式在集合的运算使用频率极高。请读者牢记，并能熟练运用。

例 1.1 设 A、B 是集合，证明

(1) $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=A\cup B$

(2) $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$

(3) $(\overline{A}\cap\overline{B})\cap(\overline{\overline{A}\cap B})=\overline{A\cup B}$

证明 (1) 左式$=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(A\cap B)$

$=(A\cap(\overline{B}\cup B))\cup(B\cap\overline{A})$

$=(A\cap E)\cup(B\cap\overline{A})$

$=A\cup(B\cap\overline{A})$

$=A\cup B$ （见定理 1.2.4）

$=$右式

(2) 右式$=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$

$=((A\cup B)\cap\overline{A})\cup((A\cup B)\cap\overline{B})$

$=(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{B})$

$=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$

$=$左式

(3) 左式$=(\overline{A}\cap\overline{B})\cap(\overline{\overline{A}\cap B})$

$=(\overline{A}\cap\overline{B})\cap(\overline{\overline{A}}\cup\overline{B})$

$=(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{\overline{A}})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{B})$

$=\overline{A}\cap\overline{B}$

$=(\overline{A\cup B})$

$=$右式

例 1.2 证明下列等式：

$$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A}) = (A \cup B \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$$

证明 本例给出两种证明方法，以开拓思路。为了便于阅读，在解题过程中，一些重要步骤所涉及的项，都用底线标注，使读者能清晰地了解解题的思路和顺序。

方法 1 利用吸收律证明之。

右式$= (A \cup B \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$

$= ((A \cup B \cup C) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B \cup C) \cap \overline{B}) \cup ((A \cup B \cup C) \cap \overline{C})$

$= (B \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C})$