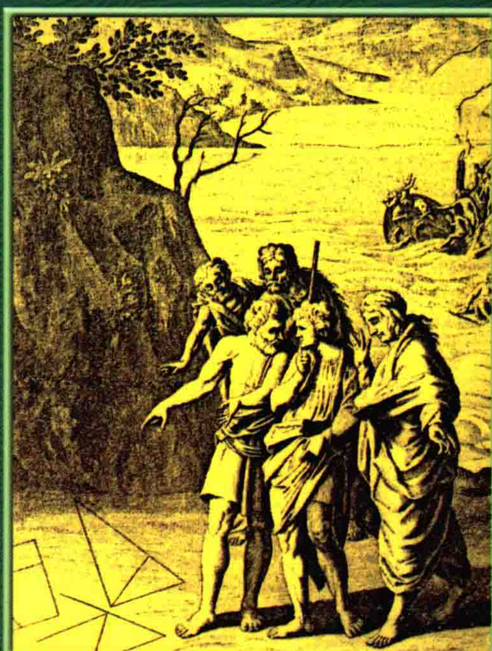
# 帕斯卡三角形

《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）



袁向东 编译

帕斯卡三角形

帕

三

给……集合的数目

与

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 帕斯卡三角形

《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）

袁向东 编译

◎帕斯卡三角形
◎帕斯卡运算
◎二项式系数
◎给定集合的子集合的数目
◎与阶乘的联系

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

帕斯卡三角形是指一种重要的数字表，有着广泛的应用. 本书在第1章中讨论了第八届莫斯科数学奥林匹克竞赛中的一道有关人员分流的问题，并用一种原则上可计算出数字解的公式表示该问题的解. 在第2章中作者提出了所谓"找到了一个问题的解"的三种解释，使读者了解用符号及相应的计算公式来表示解的方法. 第3，4章正式引入帕斯卡三角形的概念与性质，以及帕斯卡运算的定义和公式，并依此给出了人员分流问题的一种新的形式的解. 第5，6两章给出了帕斯卡三角形的两个重要的应用，解决了二项式系数问题和组合数问题. 第7章进一步用"阶乘"这种标准运算给出了上述各种问题的新的形式的解，从而加深了读者对解的含义的理解.

本书作者是莫斯科大学著名的数理逻辑学家. 全书文字十分浅显，但保持了逻辑的严谨. 适合中学生阅读.

**图书在版编目(CIP)数据**

帕斯卡三角形/袁向东编译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.3

ISBN 978-7-5603-4462-1

Ⅰ.①帕… Ⅱ.①袁… Ⅲ.①二项式系数-数理逻辑-研究 Ⅳ.①O122.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第291538号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　钱辰琛
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张4.25　字数50千字
版　　次　2014年3月第1版　2014年3月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4462-1
定　　价　18.00元

# 目录

# 引　言

# 第0章

对于不了解帕斯卡(Pascal)三角形的读者,我们先得告诉你,帕斯卡三角形并不是那种有三个角和三条边的几何三角形.我们所称的帕斯卡三角形是一种重要的数字表,它可用来解决很多计算问题.我们将考察其中的某些问题,还会顺便提及“解决问题”到底意味着什么.

阅读本书所需的预备知识不超出初中水准,只有一个例外,即一个数的零次幂的定义和记号.你必须知道,任何一个非零的数的零次幂定义为1,记作:$a^0=1$, $a\neq 0$.

# 第八届莫斯科数学奥林匹克竞赛中的一道题

## 第1章

在1945年举行的第八届莫斯科数学奥林匹克竞赛中，有一道为九年级和十年级参赛者出的题①：

给定一个由道路组成的网络(图1.1). 有$2^{1\,000}$个人从点$A$出发，其中半数沿方向$l$前进，另一半沿方向$m$前进. 当行进的人群到达第一个交点时，每群人又各自一分为二：一半沿方向$l$走，另一半沿方向$m$走. 依此类推，人群在每一个交点处都这样一分为二. 问在第1 000行的每个交点处各有多少个人？②

① 参见A·M·亚格洛姆(Yaglom)和I·M·亚格洛姆著《数学趣题及其初等解法》(San Francisco：Holden－Day，1964)，1：19，问题62b.

② 我们将对所有的行进行编号，并从0开始计数. 于是，第0行只有一个交点($A$)，第1行有两个交点，第2行有三个交点，等.

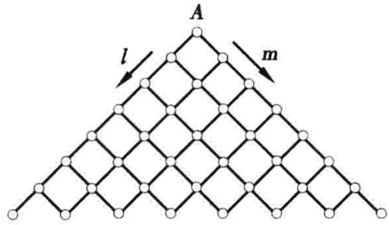



图 1.1

首先应注意,我们此刻并不知道该问题是否有解,即人群能否按问题所给的条件在每个交点处平分为两群.我们知道,若人群到达某交点需要平均分流,而其人数恰为奇数,那么按题目要求的分流就无法进行.因此,该问题有解的充分必要条件是:到达前1 000行(即从第0行到第999行)中任一行的所有交点处的人数为偶数.我们必须确认在解这一问题的整个过程中做到这一点.

让我们先规定一套符号,以表示通过道路网络中每个交点的人数.每行中的交点将从左至右地从0开始编号,于是第$n$行的交点将从0编到$n$.通过第$n$行中第$k$个交点的人数记作$H_k^n$.由于目前我们尚不知道该问题是否有解,因此并不能肯定所有的数$H_k^n$都存在,即$H_k^n$是否对每个从0到1 000的$n$以及每个从0到$n$的$k$都存在.不过,有一点是清楚的,即某些这样的数是存在的.按照我们规定的符号,我们知道

$$H_0^0 = 2^{1\,000} \tag{1.1}$$

现在,我们来确定$H_k^n(k = 0,1,2,\cdots,n)$和$H_k^{n+1}(k = 0,1,2,\cdots,n+1)$之间的关系,当然要假定所有这些数都存在.我们将证明,若所有的数$H_k^n$存在,且

都是偶数，那么所有的数 $H_k^{n+1}$ 亦存在. 让我们考察第 $n$ 行和第 $n+1$ 行中的交点，以及联结它们的道路. 在每一个交点标上适当的符号以表示到达该交点的人数(参见图 1.2). 到达第 $n$ 行第 0 个交点的人数(即 $H_0^n$)要用 2 除，即这些人中仅有一半到达第 $n+1$ 行第 0 个交点，因此

$$H_0^{n+1} = \frac{H_0^n}{2} \tag{1.2}$$

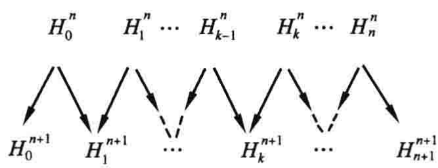



图 1.2

$H_0^n$ 中其余一半的人到达第 $n+1$ 行第 1 个交点，在那里跟离开第 $n$ 行的第 1 个交点的人数的一半(数目为$\frac{H_1^n}{2}$) 会合.

因此，$H_1^{n+1} = \frac{H_0^n + H_1^n}{2}$. 一般地说，到达第 $n+1$ 行第 $k$ 个交点的人数是两部分人数的和：离开第 $n$ 行第 $k-1$ 个交点的人数的一半(即$\frac{H_{k-1}^n}{2}$) 加上离开第 $n$ 行第 $k$ 个交点的人数的一半(即$\frac{H_k^n}{2}$). 于是

$$H_k^{n+1} = \frac{H_{k-1}^n + H_k^n}{2},\ 1 \leqslant k \leqslant n \tag{1.3}$$

最后，到达第 $n+1$ 行第 $n+1$ 个交点的人数等于离开第 $n$ 行第 $n$ 个交点的人数的一半，即

$$H_{n+1}^{n+1}=\frac{H_n^n}{2} \tag{1.4}$$

关系式(1.1)～(1.4)告诉我们一个事实:该问题有解.实际上,从公式(1.2)～(1.4)可知,若对任一固定的$n$,第$n$行上所有的数($H_0^n,H_1^n,\cdots,H_n^n$)都存在且可被$2a$除尽,则第$n+1$行上所有的数($H_0^{n+1}$,$H_1^{n+1},\cdots,H_{n+1}^{n+1}$)也存在并可被$a$除尽.因为当我们假定$H_0^n,H_1^n,\cdots,H_n^n$存在并都能被$2a$除尽的时候,必存在整数$M_0^n,M_1^n,\cdots,M_n^n$,满足下列关系式

$$H_0^n=2aM_0^n$$

$$H_1^n=2aM_1^n$$

$$\vdots$$

$$H_n^n=2aM_n^n$$

于是,我们有(利用公式(1.2)～(1.4))

$$H_0^{n+1}=\frac{H_0^n}{2}=aM_0^n$$

$$H_k^{n+1}=\frac{H_{k-1}^n+H_k^n}{2}=\frac{2aM_{k-1}^n+2aM_k^n}{2}=a(M_{k-1}^n+M_k^n),\ 1\leqslant k\leqslant n$$

$$H_{n+1}^{n+1}=\frac{H_n^n}{2}=aM_n^n$$

这就建立起了上述的结论:$H_0^{n+1},H_1^{n+1},\cdots,H_{n+1}^{n+1}$存在并都能被$a$除尽.

因此,由于第0行上所有的数(实际上只有一个,即$H_0^0$)存在并能被$2^{1\,000}$除尽(根据式(1.1)),我们就证实了第1行上所有的数

$$H_0^1,H_1^1$$

存在并能被 $2^{999}$ 除尽；第 2 行上所有的数

$$H_0^2, H_1^2, H_2^2$$

存在并能被 $2^{998}$ 除尽；依此类推，直至第 999 行上所有的数

$$H_0^{999}, H_1^{999}, \cdots, H_{999}^{999}$$

存在并能被 2 除尽；由此又导出第 1 000 行上所有的数

$$H_0^{1\,000}, H_1^{1\,000}, \cdots, H_{1\,000}^{1\,000}$$

存在（且能被 1 除尽）.

关系式(1.2) ~ (1.4) 不仅证明了该问题有解，而且提供了由第 $n$ 行中的数

$$H_0^n, H_1^n, \cdots, H_n^n$$

来计算第 $n+1$ 行中的数

$$H_0^{n+1}, H_1^{n+1}, \cdots, H_{n+1}^{n+1}$$

的一种方法.

从理论上讲，只要从第 0 行（利用式(1.1)）开始反复利用这些关系式，我们必能算出直到第 1 000 行的所有 501 501 个交点处的数 $H_k^n$，其中包括第 1 000 行中的每个交点处的人数，于是解决了开始时提出的问题. 对于前几行的具体计算如下

$$H_0^1 = \frac{H_0^0}{2} = \frac{2^{1\,000}}{2} = 2^{999}$$

$$H_1^1 = \frac{H_0^0}{2} = \frac{2^{1\,000}}{2} = 2^{999}$$

$$H_0^2 = \frac{H_0^1}{2} = \frac{2^{999}}{2} = 2^{998}$$

$$H_1^2 = \frac{H_0^1 + H_1^1}{2} = \frac{2^{999} + 2^{999}}{2} = 2^{999}$$

$$H_2^2 = \frac{H_1^1}{2} = \frac{2^{999}}{2} = 2^{998}$$

$$H_0^3 = \frac{H_0^2}{2} = \frac{2^{998}}{2} = 2^{997}$$

$$H_1^3 = \frac{H_0^2 + H_1^2}{2} = \frac{2^{998} + 2^{999}}{2} = 3 \times 2^{997}$$

$$\vdots$$

# “一个问题解决了”意味着什么

# 第2章

好了，第 1 章中的问题解决了……

“怎么解决的?”一位不信服上述说法的读者有怀疑(信服的读者知道作者将要说些什么，他不会有任何怀疑之处).“我看不出我们已经解决了那个问题.”

**作者**:嗯，我们当然已经解决了.你知道，“一个问题解决了”意味着我们找到了它的解.而我们刚好找到了这个解.

**读者**(有点不满):这真是一个解吗?

**作者**(装作他不理解读者到底碰到了什么难点):喔，难道真的出了

错?

**读者**:不,“它”是对的,但“它”不是一个解.

**作者**:那么解应是什么样的呢?

**读者**:应是一行数,表明到达第 1 000 行中每个交点处各是多少人.

**作者**:可是这行数包含 1 001 个数. 难道第八届莫斯科数学奥林匹克竞赛的组织者会要参赛者写出 1 001 个数吗?

**读者**:……(静下来开始想问题)

**作者**:我有个建议,为了不让那长长的数列把事情搞得太复杂,我们不妨先选定一个交点,而且只关心到达这个交点的人数,行吗?

**读者**:同意.

**作者**:现在我们来考虑什么才是下述问题的一个解:有多少人到达第 4 行中的第 3 个交点?

**读者**:嘿,无非是个数.

**作者**:写成什么样的形式?

**读者**(有点惊讶):嗯,用十进制数系中的数的形式.

**作者**:那么像“$H_3^4$”这样的形式就不是一个解,是吗?

**读者**:当然不是. 我们要的是解!

**作者**:在上章末尾我们开始做了一系列的演算,只要继续做下去,很容易证明有 $2^{998}$ 个人到达第4行中的第 3 个交点,那么答案“$2^{998}$”是这个问题的解吗?

**读者**(尚未觉察作者所设的圈套):当然是的.

**作者**:但是,“$2^{998}$”这种表达式并不是十进制数系

中的表达方式. 这种表达式由两个十进制数“2” 和“998” 组成. 这两个数摆放的位置表明,为了得到你所希望的数还要进行依赖于这两个数的某种运算.

**读者**:可是“$2^{998}$” 这种表达形式很容易转换成十进制数的形式.

**作者**:不是那么容易的,不妨试着算算 2 的 998 次幂. 但这还不是麻烦之所在,麻烦的是你刚才所说的跟你先前的说法相矛盾. 先前你只同意考虑用十进制数系中的数作为解. 从你这种对解的定义的观点来看,表达式“$2^{998}$” 仍不是解(它只不过是能导出解的所谓的“半成品”). 当然,只要能做到前后始终一贯,这种观点也是可以接受的. 但我们也可以持另一种观点,即认为 $2^{998}$ 就是一个解. 这种观点也许能澄清你的思想. 你知道,数学问题的最简单的答案常常并不是直接写成十进制数的形式,而是采用相关的“非直接” 的形式. 记住了这一点,再来看我们的例子 —— 有多少人到达第 4 行第 3 个交点的问题,我们应该满足于什么样的“解” 呢?

**读者**:在这个例子中,我们必须接受任何一种有如下性质的表达形式的解,即存在一种方法可使我们由这种形式得到数值答案(写成十进制数的形式). 这就是说,$2^{998}$ 是一个解. 尽管这时为得到十进制数解的方法(连续做 997 次乘法) 十分冗长,但原则上它是可行的.

**作者**:那么 $H_3^4$ 为什么不是解呢?此时同样存在一种方法可得到十进制数的答案,它由关系式(1.1) ~ (1.4) 所确定.

给读者难住了.

**作者**(他已成功地将这位读者引入了一条死胡同,颇感满意,那是位没有经验的读者,要知道,经验丰富的读者会把作者引进死胡同):总结一下,对于到达指定交点处人数的问题,我们所指的解至少有三种解释.

第一种解释:所谓它的解,我们指一个十进制数系中的数.

第二种解释:所谓它的解,我们指某种表达式,它表示着一个数,并且我们知道一种方法可从这个表达式得到它所表示的那个十进制数(即所谓第一种解释的解).

第三种解释:所谓它的解,我们指某种表达式,它代表着一个数(可写成十进制数的形式),并且它是由数和某些被认为是“标准的”运算①(如通常的算术运算)所组成的.我们要求针对每一种标准运算都要有相应的一种方法,使得能够从应用了这种运算的十进制数出发得到十进制数形式的答案(就像使用算术运算一样).于是,对于每一种允许使用的表达式,都存在一种方法,我们能从表达式中出现的十进制数出发得到该表达式所表示的数,这样一来,按第三种解释得到的解就自动成为在第二种解释下的解了.

根据第一种解释,$H_3^4$ 和 $2^{998}$ 都不是“到达第 4 行第 3 个交点处的人数”这一问题的解.为了得到解,我们

---

① 这组标准的运算必须事先指定.我们还需要强调:第三种解释依赖于对这组运算的选择.于是,当指数运算包括在指定的标准运算之内时,表达式 $2^{998}$ 将是第三种解释下的一个解.

必须将 $2^{998}$ 用十进制数表示出来;然而,后者将由 300 多个数字组成,只有靠计算机进行相当长的时间的运算才能得到.

根据第二种解释,$H_3^4$ 和 $2^{998}$ 都是解.

根据第三种解释,一切都取决于事先对标准运算的选择:如果标准运算包括指数运算,则 $2^{998}$ 是解;如果不包括,则 $2^{998}$ 就不是解. 同样,如果标准运算包括运算 $H$,该运算意为从数 $n$ 和 $k$ 出发来计算 $H_k^n$(注意,关系式(1.1) ~ (1.4) 给出了实行这种运算的方法,所以它满足我们对标准运算的要求),则 $H_3^4$ 就是所讨论问题的解;反之则不然.

随之而来的问题是我们能否随意地选定标准运算. 从道理上讲是可以的,但在实践中,我们应选择这样的标准运算(我们希望能通过它们表达任何问题的解),它们会出现在许许多多的问题的解答中,或者至少应出现在重要问题的解答中. 这类运算包括四种算术运算和其他若干种运算,诸如指数运算和阶乘运算(参见第 7 章). 如果运算 $H$ 对一些重要的问题是需要的,或者我们这里的涉及交点的问题很重要,那么,$H$ 也许值得被列入标准运算之内. 然而,在我们引进我们的问题前,运算 $H$ 没有值得注意之处,至今也没什么价值. 在第 4 章中,我们将考虑一种跟 $H$ 类似的运算. 我们会发现它值得包括在标准运算之内.

现在我们得回到我们最初提出的有关第 1 000 行中的交点处的问题了. 对应于上述有关“解”的三种解释,我们可以用三种形式找出其解.

1. 用十进制数系中的数的形式,求出 1 001 个数.

我们将不去寻找这样的解(因为我们发现这件事太困难了,甚至在求第4行上的一个交点处的解就很不容易).

2. 找到一个表达式,在原则上我们能根据它算出到达第1 000行上的每个交点处的人数(即算出该数的十进制的形式). 我们已经找出了这样的解:$H_k^{1\,000}$,它的具体计算方法由关系式(1.1) ~ (1.4)给出.

3. 找出一个表达式,它不仅能使我们对从0到1 000的任意一个$k$来计算$H_k^{1\,000}$,而且它是由某些标准运算所组成的. 我们将要寻找的正是这种形式的解. 在以下的讲解中,我们会清楚地看到,为了我们的目标,哪种运算将被认为是标准的.