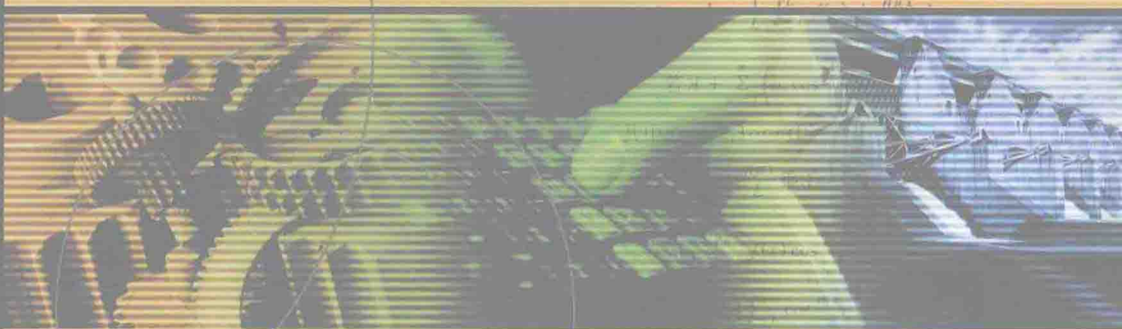
修訂二版

Basic
Engineering
Mathematics



基礎

工程數學

黃學亮　編著

全華圖書股份有限公司 印行

基礎工程數學(修訂二版)

黃學亮 編著

全華圖書股份有限公司　印行

國家圖書館出版品預行編目資料

基礎工程數學 / 黃學亮編著. --三版. -- 臺
北縣土城市 : 全華圖書, 2008.04
面 ; 公分
ISBN 978-957-21-6305-4(平裝)
1. 工程數學

440.11 97005566

基礎工程數學(修訂二版)

作　　者	黃學亮
執行編輯	邱冠銘
發 行 人	陳本源
出 版 者	全華圖書股份有限公司
地　　址	23671 台北縣土城市忠義路 21 號
電　　話	(02) 2262-5666 (總機)
傳　　眞	(02) 2262-8333
郵政帳號	0100836-1 號
印 刷 者	宏懋打字印刷股份有限公司
圖書編號	0386002
三版一刷	2008 年 4 月
定　　價	新台幣 350 元
I S B N	978-957-21-6305-4 (平裝)

全華圖書
www.chwa.com.tw
book@ms1.chwa.com.tw

全華科技網 OpenTech
www.opentech.com.tw

作者序

工程數學對大多數工學院學生而言是一門相當艱深的學科，學生在這門課往往產生挫折感，甚至阻礙了他們專業課程學習品質的提昇，爲什麼會如此？我想其原因大概有二：一是一般學生對工程數學的預修課程 —— 微積分 —— 並未奠定良好的基礎，尤其是積分的運算都還未熟稔，以致於有時無法很順遂地達成學習目標，二是傳統工程數學中有許多章節在數學系裡都是獨立課程，如微分方程式、線性代數，如何濃縮在一本書裡，在編輯上便有所取捨，筆者有時看到一些完美主義傾向的作者，其編寫的書就讓許多教學者望書興嘆。因此一本淺顯易懂的工程數學或許對初學者能有所幫助，克服其學習上的挫折感。在此前提下，本書在寫作上儘量保持下列原則：

1. 避免過於繁瑣的定理證明、例題與習題：本書所有的定理證明即在讓讀者了解不同內涵的數學推理技巧而已，我相信會解 $2x+1=3$ 的人也會解出 $3.054x+5.111=7.896$，只要他夠細心(更重要的是信心)。本書的定理證明、例題與習題均屬基本的微積分運算，目的即在奠定讀者對工程數學學習上的信心，同時也能使讀者聚焦在有關的定義、定理之應用，而不必受複雜微積分運算的干擾。
2. 本書在各節例題後附有「隨堂練習」，這是近年來在國內數學教育常用的方式，老師們如果能夠善用，讓同學在課

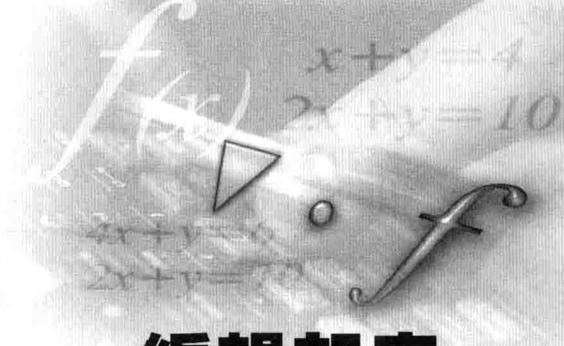
堂上練習，一則可使學生上課專注，二則也可藉此驗收成果，立刻指出其學習上的盲點。

本書在應用上，可供專科或技術學院工程數學教學之用，亦可供大學工學院工程數學或大一微積分之補充教材，本書亦適用於工業界在職訓練之用。

對本書讀友而言，拙著之微積分(全華出版)提供良好之參考資料。

本書係參考國內外工程數學教材之最新趨勢及個人教授數學經驗編寫而成，然因個人才疏學淺、資質魯鈍，謬誤、疏漏之處在所難免，尚祈諸先進專家不吝指正，俾供再版補正，不勝感謝。

黃學亮



編輯部序

「系統編輯」是我們的編輯方針，我們所提供給您的，絕不只是一本書，而是關於這門學問的所有知識，它們由淺入深，循序漸進。

工程數學對於大專工程科系的學生來講是極重要的課程，本書以精簡的文字來說明，避免一般工程數學用書的艱澀解說，本書內容包含常微分方程式、拉氏轉換、富利葉分析、向量分析、矩陣、複變數分析等等，涵蓋工程數學最基礎、最重要的部份，協助讀者在短期內對工程數學有一初步了解，而能立即應用在專業課程上。

同時，爲了使您能有系統且循序漸進研習相關方面的叢書，我們列出了本公司出版，各有關圖書的書目，以減少您研習此門學問的摸索時間，並能對這門學問有完整的知識。若您在這方面有任何問題，歡迎來函聯繫，我們將竭誠爲您服務。

相關叢書介紹

書號：0565701
書名：基礎工程數學(修訂版)
編著：沈昭元
16K/384 頁/350 元

書號：05586
書名：工程數學－理論與題庫
編譯：武維疆
16K/712 頁/600 元

書號：0053201
書名：工程數學(修訂版)
編著：陳盛有
20K/352 頁/250 元

書號：05826
書名：機率－理論與題庫
編著：武維疆
16K/264 頁/300 元

書號：02672
書名：工程數學
編著：蔡繁仁.張太山
20K/528 頁/390 元

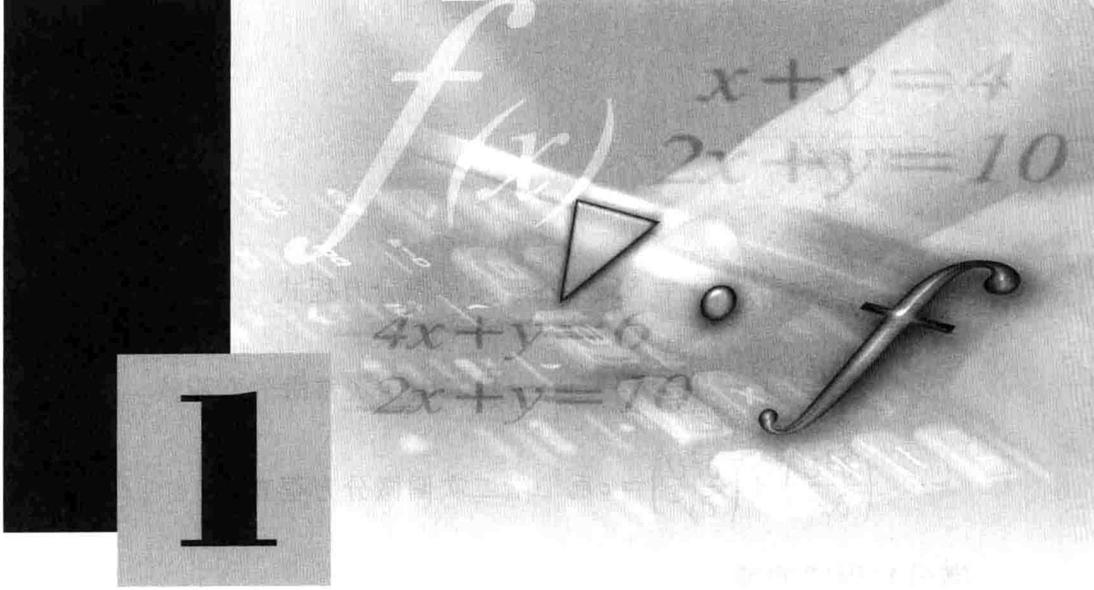
書號：05899/05900
書名：高等工程數學(上)-第九版/(下)-第九版
英譯：江昭皚
16K/688 頁/650 元
16K/592 頁/700 元

書號：02895
書名：工程數學
編著：溫坤禮.李雪銀
16K/312 頁/290 元

書號：0528902/05290
書名：工程數學(上)(修訂二版)/(下)
編著：許桂敏
16K/464 頁/450 元
16K/440 頁/450 元

◎上列書價若有變動，請以最新定價為準。

目錄



1 一階常微分方程式

1-1　微分方程式簡介

微分方程式(Differential Equations)顧名思義是含有導函數、偏導函數的方程式，只含導函數之微分方程式稱爲常微分方程式(Ordinary Differential Equations)，如$y'+2y''+y=3e^x$，$\dfrac{dx}{dy}+xy=e^x$等均是，含有偏導函數之微分方程式稱爲偏微分方程式(Partial Differential Equations)，如$U_{tt}=c^2U_{xx}$，其中$U_{tt}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}$，$U_{xx}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$。本書之第一、二章將對常微分方程式之解法作一簡介。

微分方程式之最高階導函數對應之階數即爲微分方程式之階數(Order)，而最高階導函數之次數即爲微分方程式之次數(Degree)，例如：

- $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+y=3$爲二階一次常微分方程式
- $x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4+x\left(\frac{d}{dx}y\right)+y=3$爲二階四次常微分方程式
- $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=c$爲二階二次偏微分方程式

微分方程式的解

在初等代數學中，我們知道$2x+1=3$的解爲$x=1$，這是因爲當$x=1$時$2x+1=3$，同樣的道理，例如：$y'=x^2$的解可透過積分求得$y=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c$。因爲$y=\frac{x^3}{3}+c$，$c$爲一任意常數時，滿足$y'=x^2$，因而$y=\frac{x^3}{3}+c$是$y'=x^2$之一個解。如果我們給定一個條件，如$y(0)=1$，$y(0)=1$稱爲初始條件(Initial Condition)。這表示$x=0$時$y=1$，因此初始條件便可決定$y=\frac{x^3}{3}+c$中之常數c：$\because 1=0+c$，$\therefore c=1$，因而$y=\frac{x^3}{3}+1$。在本例中$y=\frac{x^3}{3}+c$稱爲通解(General Solution)而$y=\frac{x^3}{3}+1$稱爲特解(Particular Solution)。具體言之，n階微分方程式含n個任意常數之解稱爲通解，在通解中給出一組特定值後所得之解是爲特解。

在此，我們應了解到，微分方程式的解是一個函數，這個函數可能是隱函數，也可能是顯函數。一個n階微分方程式含有n個任意常數，如果要對n階微分方程式特定化，便需有n個初始條件。(本段對初學者而言可能抽象些，建議可在研讀第一、二章後再看可能對初學者較便於吸收。)

例 1 驗證$y = xe^x + ce^x$微分方程式$y' - y = e^x$的一個解

解：

$$y = xe^x + ce^x = (x + c)e^x$$

$$y' = 1 \cdot e^x + xe^x + ce^x = (1 + x + c)e^x$$

$$\therefore y' - y = (1 + x + c)e^x - (x + c)e^x = e^x$$

即$y = xe^x + ce^x$是$y' - y = e^x$的一個解。

隨堂練習

若一曲線之斜率函數(Slope Function)爲$y' = 3x^2$且該曲線過$(-1, 1)$驗證此曲線之方程式是$y = x^3 + 2$。

微分方程式可能來自物理問題或幾何問題，但本書將只討論如何藉由消去方程式之常數以得到對應之微分方程式。

例 2 試消去指定常數以得對應之ODE。

(a)$y=ae^{2x}$ $[a]$

(b)$y=\sin(x+b)$ $[b]$

(c)$y=a\sin(x+b)$ $[a,b]$

解：

(a)$y' = 2ae^{2x}=2y$ $\therefore y' = 2y$

(b)$y' = \cos(x+b)$ $\therefore y^2+(y')^2 = [\sin(x+b)]^2+[\cos(x+b)]^2=1$

(c)$y' = a\cos(x+b)$，$y''=-a\sin(x+b)$，$y'''=-a\cos(x+b)$

$\therefore y'''+y'=0$

例 3 試消去指定常數以得對應之 ODE。

(a) $y=a+bx+cx^2$ $[a,b,c]$

(b) $y=ax+\frac{b}{x}+c$ $[a,b,c]$

解：

(a) $y'=b+2cx \quad y''=2c \quad y'''=0 \quad \therefore y'''=0$

(b) $y'=a-\frac{b}{x^2} \quad y''=\frac{2b}{x^3} \quad y'''=\frac{-6b}{x^4}$

$$\therefore \frac{y''}{y'''}=\frac{\frac{2b}{x^3}}{\frac{-6b}{x^4}}=-\frac{x}{3}$$ 即 $y''+\frac{x}{3}y'''=0$ 或 $xy'''+3y''=0$

【補充資料】

一些特殊之積分式，(如 $\int x^n e^{bx}\,dx$，$\int x^n \sin bx\,dx$，$\int x^n \cos bx\,dx$ …)我們可用所謂的積分表而得以速解，這對工程數學尤其是拉氏轉換、富利葉分析極有幫助。

給定一個積分題 $\int fg\,dx$，(暫時忘了 $\int u\,dv$ 那個公式，其積分表是由二個直欄組成，左欄是由 f，f'，f'' … 直到 $f^{(k)}=0$ 爲止所組成，($f^{(k-1)}\neq 0$)，右欄是由 g 開始不斷地積分，I_g 表示 $\int g$ 但積分常數不計，$I^2g=I(I_g)\cdots I^{k-1}g$，$I^k g$。如此，我們可由積分表讀出各項式，(在右表之斜線部份表示相乘，連續之＋，－號表示乘積之正負號，你可由下表看出＋，－號之規則是由＋號開始正負相間)，同時由微分經驗可知

$$\int x^n e^{bx}(\cos bx, \sin bx)dx \quad n \in N$$

這類問題 f 一定是擺 x^n，g擺e^{bx}，$\cos bx$，$\sin bx$。我們將舉一些例子說明之：

$$\begin{array}{ccc}
f & + & g \\
f' & - & Ig \\
f'' & + & I^2 g \\
f''' & - & I^3 g \\
f^{(4)} & + & I^4 g \\
\vdots & & \vdots \\
f^{(k)} & + & I^k g \\
\end{array}$$

....

例 4 $\int x^2 e^x dx = ?$

解：

$$\begin{array}{ccccc}
 & x^2 & + & e^x & \\
\text{微} & 2x & - & e^x & \text{積} \\
\text{微} & 2 & + & e^x & \text{積} \\
\text{微} & 0 & & e^x & \text{積} \\
\end{array}$$

$$\therefore \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

例 5 $\int x^2 \cos x dx = ?$

解：

$$
\begin{array}{ccc}
x^2 & + & \cos x \\
2x & - & \sin x \\
2 & + & -\cos x \\
0 & & -\sin x
\end{array}
$$

$$\therefore \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2x(-\cos x) + 2(-\sin x) + c$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

例 6 $\int x^3 e^{2x} dx$

解：

$$
\begin{array}{ccc}
x^3 & + & e^{2x} \\
3x^2 & - & \frac{1}{2} e^{2x} \\
6x & + & \frac{1}{4} e^{2x} \\
6 & - & \frac{1}{8} e^{2x} \\
0 & & \frac{1}{16} e^{2x}
\end{array}
$$

$$\therefore \int x^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x} + c$$

$\int e^x \sin x dx$

如果碰到$\int e^x \sin x dx$的例子，我們也可用積分表，我們取$f=\sin x$，$g=e^x$ (當然你也可取$f=e^x$，$g=\sin x$)

$$\begin{array}{lcl}
\sin x & + & e^x \\
\cos x & - & e^x \\
 & + & e^2 \\
-\sin x & \cdots\cdots & e^x \rightarrow \text{重覆出現} \rightarrow \int -\sin x e^x\, dx
\end{array}$$

(如果你不管 $\sin x$及 e^x的係數)

$$\therefore \int (\sin x) e^x\, dx = \sin x e^x - \cos x e^x - \int (\sin x) e^x\, dx$$

$$\Rightarrow \int (\sin x) e^x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

例 7 $\int e^{ax} \cos bx dx$

解：

$$\begin{array}{rcl}
\cos bx & + & e^{ax} \\
-b \sin bx & - & \frac{1}{a} e^{ax} \\
-b^2 \cos bx & + & \frac{1}{a^2} e^{ax} \rightarrow \text{重覆出現} \rightarrow \int (-b^2 \cos bx)\left(\frac{1}{a^2} e^{ax}\right) dx
\end{array}$$

$$\therefore \int e^{ax} \cos bx dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos x dx$$

可得$\int e^{ax} \cos bx dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c$
