Introduction to Managerial Mathematics 2e

管理數學導論

莊紹容、楊精松　編著

東華書局

Introduction to Managerial Mathematics 2e

管理數學導論

莊紹容、楊精松　編著

東華書局

國家圖書館出版品預行編目資料

管理數學導論 / 楊精松 , 莊紹容著 . -- 二版 . -- 臺北市 : 臺灣東華 , 民 103.03

408 面 ; 19x26 公分

含索引

ISBN 978-957-483-774-8 (平裝附光碟)

1. 管理數學

319 103003905

中華民國一〇三年三月二版

管理數學導論

(外埠酌加運費匯費)

編著者	楊精松　莊紹容
發行人	卓劉慶弟
出版者	臺灣東華書局股份有限公司
	臺北市重慶南路一段一四七號三樓
	電話 : (02) 2311-4027
	傳眞 : (02) 2311-6615
	郵撥 : 00064813
	網址 : www.tunghua.com.tw
直營門市 1	臺北市重慶南路一段七十七號一樓
	電話 : (02) 2371-9311
直營門市 2	臺北市重慶南路一段一四七號一樓
	電話 : (02) 2382-1762

序

一、人類在這個社會上求生存，為了個人與團體的利益，管理者隨時都會遇到衝突與對抗. 因此做為現代的管理者已不能應用以往的經營模式來制定現代化的管理決策. 必須藉用數量的方法來制定現代化的管理模式，再藉由管理模式之討論以建立決策與解決問題的方法，並提高決策的準確度. 管理數學是“計量管理”所採用的一種數學方法. 它是管理與決策的工具. 管理數學在大學的商學院列為選修，管理學院列為必修. 而有關課程的內容並無一定之課程標準，完全視學生之需求與教師之專業領域來設計課程內容.

二、本書共分為七章，內容包含：函數的應用，矩陣與行列式，機率論，線性規劃，馬克夫鏈，對局理論. 可供商管學院及科技大學之商管科系學生每週三小時，一學期講授之用. 本書中標有“*”之章節如因授課時數不夠，可予以刪除.

三、本書在編寫上，除了理論之介紹外，同時也強調其應用上的意涵，以及實際問題如何轉換成數學模型的方法與過程. 因此本書儘量將理論與實際問題相配合，以增加教學效果. 同時為了發揮教學績效，本書並附有完整的教師手冊、PowerPoint，以及學生使用的部分習題解答光碟片.

四、本書在編寫的過程中，參閱國內外管理方面的相關著作，彙編成本書. 以簡單易懂的方式，介紹管理數學的理論及應用. 同時並感謝銘傳大學財務金融系楊重任博士在編寫過程中所給予之建議並親自予以校訂.

五、本書雖經編者精心編著，惟謬誤之處在所難免，尚祈管理學者、企業先進大力斧正，以匡不逮.

六、本書得以順利出版，要感謝東華書局董事長卓劉慶弟女士的鼓勵與支持，並承蒙編輯部全體同仁的鼎力相助，在此一併致謝.

目 次

第 1 章
函數的應用

1-1 線性方程式

函數在管理數學上佔有極重要的地位，而函數可區分為線性函數與非線性函數. 首先定義線性函數.

定義 1-1-1

函數 $f(x)=ax+b$ 稱為線性函數，而方程式 $y=ax+b$ 稱之為線性方程式.

假定一直線決定於 P、Q 兩點，其坐標分別為 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2)，如圖 1-1-1 所示. 使 x_2-x_1 表橫軸增量，y_2-y_1 表縱軸增量，則直線的斜率可以下述公式表之

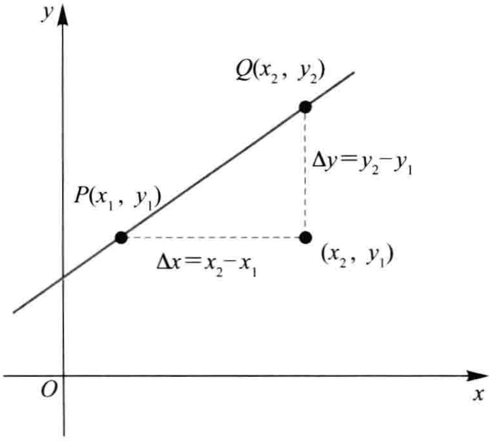


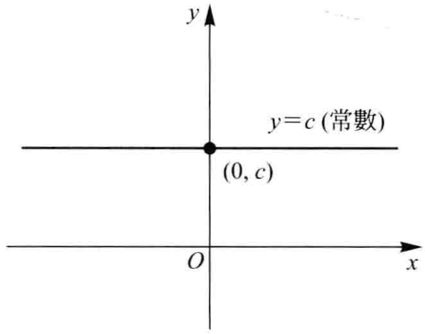
圖 1-1-1

$$m\,(\text{斜率})=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

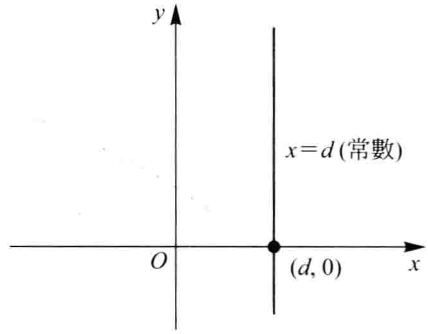
故斜率為因變數增量與自變數增量之比. 以 Δy 表 y 的增量, Δx 表 x 的增量, 則

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

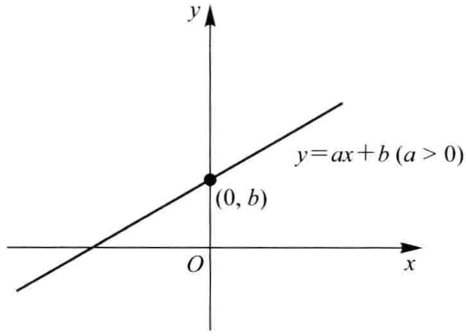
如果 $y_1=y_2$, 且 $x_1\neq x_2$, 則通過 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 之直線與 x-軸平行, 其斜率為零. 如果 $x_1=x_2$, 且 $y_1\neq y_2$, 則通過 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 之直線與 y-軸平行, 其斜率無定義 (或無限大). 如直線向右上方傾斜, 則其斜率為正. 如直線向左上方傾斜, 則其斜率為負, 如圖 1-1-2 所示.



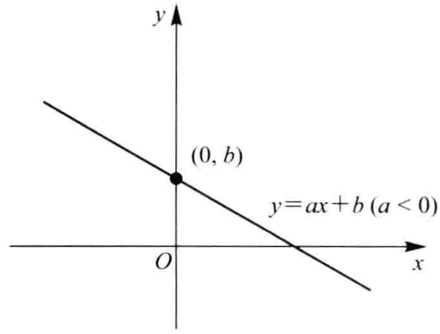
(i) 斜率為零



(ii) 斜率為無限大



(iii) 斜率為正



(iv) 斜率為負

圖 1-1-2

【例題 1】　試求通過兩點 $A(-4, 8)$ 與 $B(2, -3)$ 之直線的斜率.

【解】　選擇 $x_1=-4$、$y_1=8$、$x_2=2$ 與 $y_2=-3$，得 $\Delta y=-3-8=-11$ 與 $\Delta x=2-(-4)=6$，故斜率為

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{11}{6}$$

⏮

已知直線之斜率為 m，以及通過坐標平面上一點，則可利用下列方法求出直線之方程式.

點斜式

已知一直線之斜率為 m 且通過點 (x_1, y_1)，則其方程式為

$$y-y_1=m(x-x_1) \tag{1-1-1}$$

此方程式稱為直線之點斜式.

斜截式

已知一直線之斜率為 m 且通過點 $(0, b)$，則其方程式為

$$y=mx+b \tag{1-1-2}$$

此處 b 稱為直線之 y-截距. 此方程式稱為直線之斜截式，如圖 1-1-3 所示.

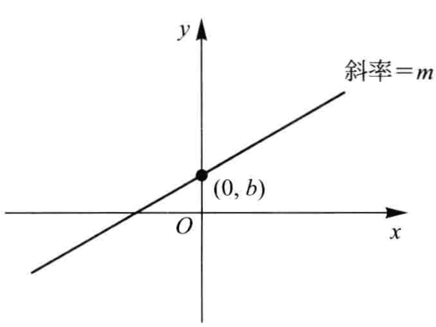


圖 1-1-3

一般式

直線方程式的一般式為

$$ax+by+c=0 \tag{1-1-3}$$

其中 a、b、c 均為常數，a、b 不均為零. 如 $b=0$，則 $ax+c=0$，$x=-\frac{c}{a}$，此為與 y-軸平行的直線. 如 $a=0$，則 $by+c=0$，$y=-\frac{c}{b}$，此為與 x-軸平行的直線. 如 $a \neq 0$，$b \neq 0$，則 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$，此表示斜率為 $-\frac{a}{b}$ 且 y-截距為 $-\frac{c}{b}$ 的直線方程式.

【例題 2】 已知一直線通過點 $(3,\ -3)$ 且垂直於直線 $2x+3y=6$，試求其方程式.

【解】 因 $2x+3y=6$，可得 $y=-\frac{2}{3}x+2$，故所求直線之斜率為 $m=\frac{3}{2}$. 所求直線之方程式為

$$y-(-3)=\frac{3}{2}(x-3)$$

即
$$y=\frac{3}{2}x-\frac{15}{2}$$

⏮

【例題 3】 已知一直線通過點 $(3,\ -3)$ 且平行於通過兩點 $(-1,\ 2)$ 及 $(3,\ -1)$ 的直線，試求其方程式.

【解】 所求直線之斜率為

$$m=\frac{(-1)-2}{3-(-1)}=-\frac{3}{4}$$

故所求之直線方程式為

$$y-(-3)=-\frac{3}{4}(x-3)$$

即
$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$$

⏮

銷售分析

要想瞭解銷售分析，我們應該先瞭解什麼是線性函數的平均變化率，以線性函數 $f(x)=mx+b$ 為例，其平均變化率為何？

定義 1-1-2

對函數 $y=f(x)$，當 x 由 x 變至 $x+\Delta x$ 時，y 對於 x 的平均變化率定義為

$$\frac{y\text{ 的變化量}}{x\text{ 的變化量}}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

依據定義 1-1-2 得知線性函數 $f(x)=mx+b$ 之平均變化率為

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{m(x+\Delta x)+b-mx-b}{\Delta x}$$

$$=\frac{m\Delta x}{\Delta x}=m.\ (\text{直線 } y=mx+b \text{ 之斜率})$$

【例題 4】　下表係說明甲、乙兩家公司在不同年度內之銷售金額.

公司	88 年銷售金額	91 年銷售金額
甲	10,000 元	16,000 元
乙	5,000 元	14,000 元

依公司管理部門之研究報告顯示，兩家公司之銷售金額均呈線性遞增 (亦即，銷售可完全用一線性函數去近似模擬).

(1) 試求甲、乙兩家公司銷售之趨勢線方程式並繪其圖形.

(2) 預估甲、乙兩家公司在 92 年之銷售金額.

(3) 甲、乙兩家公司銷售金額之平均變化率 (即成長率) 為何？

【解】　(1) 欲求甲、乙兩家公司銷售之趨勢線方程式，我們可令 $x=0$ 代表 88 年，所以 91 年對應於 $x=3$. 則依上表所示，通過點 (0，10,000) 與 (3，16,000) 之直線就代表甲公司銷售之趨勢線.

該直線之斜率為

$$\frac{16,000-10,000}{3-0}=2,000$$

利用點斜式，則可求得甲公司銷售之趨勢線方程式為

$$y-10,000=2,000(x-0)$$

即 $$y=2,000x+10,000 \cdots\cdots ①$$

如圖 1-1-4 所示.

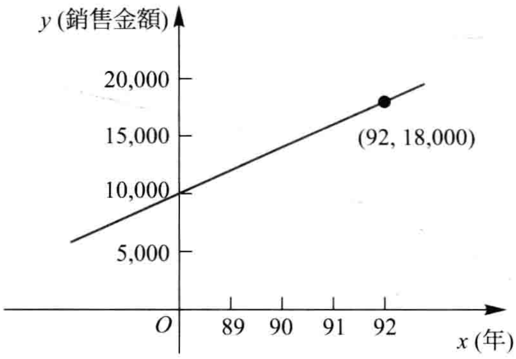


圖 1-1-4 甲公司銷售之趨勢線

同理，依上表所示，通過點 (0，5,000) 與 (3，14,000) 之直線就代表乙公司銷售之趨勢線.

利用點斜式，則可求得乙公司銷售之趨勢線方程式為

$$y-5,000=3,000(x-0)$$

即 $$y=3,000x+5,000 \cdots\cdots ②$$

如圖 1-1-5 所示.

(2) 預估甲、乙兩家公司在 92 年之銷售金額，我們以 $x=4$ 分別代入 ① 與 ② 式中，則可求得甲、乙兩公司在 92 年之銷售金額分別為

$$y=18,000 \quad 與 \quad y=17,000$$

即甲公司之銷售金額為 18,000 元，而乙公司之銷售金額為 17,000 元.

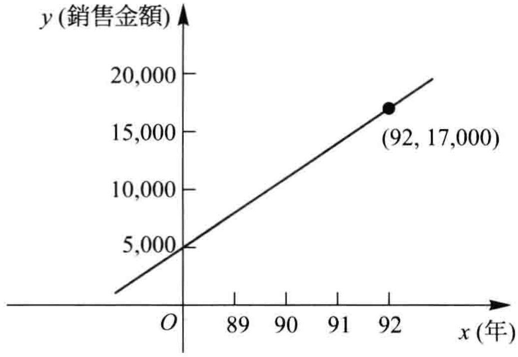


圖 1-1-5　乙公司銷售之趨勢線

(3) 甲公司之銷售金額在 88 年至 91 年的期間中由 10,000 元增至 16,000元，這表示在 3 年中全部增加 6,000 元. 故

$$\text{甲公司銷售金額之平均變化率} = \frac{6{,}000\text{ 元}}{3\text{ 年}} = 2{,}000\text{ 元／年}$$

此恰與甲公司銷售之趨勢線的斜率相同. 同理,

$$\text{乙公司銷售金額之平均變化率} = \frac{9{,}000\text{ 元}}{3\text{ 年}} = 3{,}000\text{ 元／年}$$

此恰與乙公司銷售之趨勢線的斜率相同. ⏮

成本與損益分析

若以 x 表生產某貨品 (或銷售某貨品) 之單位數，p 表每單位貨品之價格，$C(x)$ 表生產 x 單位貨品之總成本 (total cost)，則

$$C(x) = \text{固定成本} + (\text{平均可變成本}) \cdot (\text{產量}) \tag{1-1-4}$$

$$R(x) = px \tag{1-1-5}$$

$R(x)$ 表銷售 x 單位貨品之總收益 (total revenue)，又

$$P(x) = R(x) - C(x) \tag{1-1-6}$$

$P(x)$ 表銷售 x 單位貨品之總利潤 (total profit).

而利潤為零之銷售水準 (即 $R(x)=C(x)$) 稱之為損益平衡點 (break-even point)，如圖 1-1-6 所示.

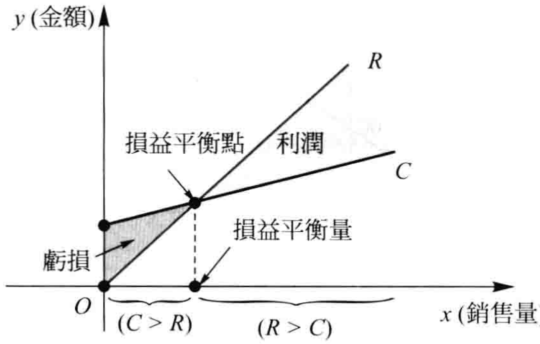


圖 1-1-6

由式 (1-1-6) 中得知,

1. 當 $R(x)>C(x)$，$P(x)>0$ 時，我們稱之為獲利，亦即，當銷售量離損益平衡點之右側愈遠則利潤就愈多.
2. 當 $R(x)<C(x)$，$P(x)<0$ 時，我們稱之為虧損.
3. 當 $R(x)=C(x)$，$P(x)=0$ 時，公司之營運呈現損益平衡狀態. 此時，使 $R(x)=C(x)$ 之 x 值，就稱之為損益平衡點.

【例題 5】　某公司之固定生產成本為 5,000 元，用以生產每單位成本 $\dfrac{22}{9}$ 元且售價 8 元的產品.

(1) 求生產之總成本函數.

(2) 求收益函數.

(3) 求利潤函數.

(4) 試分別計算在 1,800、900 及 450 單位產品的生產水準之損益情形.

【解】　(1) 總成本函數 $C(x)=5{,}000+\dfrac{22}{9}x$

(2) 收益函數 $R(x)=8x$

(3) 利潤函數 $P(x)=R(x)-C(x)=8x-\left(5{,}000+\dfrac{22}{9}x\right)=\dfrac{50}{9}x-5{,}000$

(4) $P(1{,}800)=\dfrac{50}{9}\times 1{,}800-5{,}000=5{,}000$ 元

即生產 1,800 單位產品則賺錢 5,000 元.

$$P(900)=\frac{50}{9}\times 900-5{,}000=5{,}000-5{,}000=0$$

即生產 900 單位產品不賺錢也不賠錢.

$$P(450)=\frac{50}{9}\times 450-5{,}000=-2{,}500$$

即生產 450 單位產品則賠錢 2,500 元.

【例題 6】　某公司生產且銷售 x 千台電腦，其每月之收益與成本 (以千元為單位) 分別為

$$R(x)=32x-0.21x^2\ (\text{千元})$$
$$C(x)=195+12x\ (\text{千元})$$

試決定該公司之損益平衡點.

【解】　令 $P(x)$ 為利潤函數，則

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x)-C(x)=(32x-0.21x^2)-(195+12x) \\ &= -0.21x^2+20x-195 \end{aligned}$$

損益平衡點發生於 $P(x)=0$ 時，故必須解

$$-0.21x^2+20x-195=0$$

由一元二次方程式根的公式知，

$$\begin{aligned} x &= \frac{-20\pm\sqrt{(20)^2-4(-0.21)(-195)}}{2\times(-0.21)}=\frac{-20\pm\sqrt{236.2}}{-0.42} \\ &\approx 47.62\pm 36.59 \\ &= 11.03 \text{ 或 } 84.21 \end{aligned}$$

損益平衡點發生於公司每月的生產水準達 11,030 台或 84,210 台電腦，方可使公司之營運維持損益平衡，如圖 1-1-7 所示.

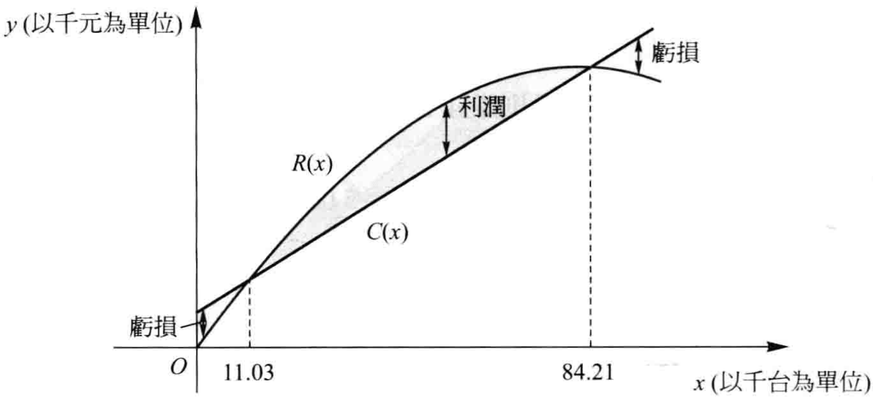


圖 1-1-7

若 $0 < x < 11{,}030$ 台，則成本大於收益. 若 $11{,}030$ 台 $< x < 84{,}210$ 台，則收益大於成本. 若 $x > 84{,}210$ 台，則成本大於收益. ⏮

【例題 7】 某公司生產且銷售個人電腦，每台電腦的成本為 25 元，且公司每月之固定成本為 10,000 元. 試將公司每月之總成本表為銷售 x 台電腦的函數，且計算當 $x=500$ 台的成本.

【解】 每月的變動成本為 $25x$ 元，於是

$$C(x)=\text{固定成本}+\text{變動成本}$$

即
$$C(x)=10{,}000+25x$$

當每月銷售 500 台電腦時，則總成本為

$$C(500)=10{,}000+25(500)=22{,}500\ (\text{元})$$

如圖 1-1-8 所示.