振动性与周期解理论的研究

林文贤　著

国防工業出版社
National Defense Industry Press

韩山师范学院学术文库丛书
韩山师范学院出版基金资助出版

振动性与周期解理论的研究

林文贤 著

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书主要介绍时滞微分方程的振动性、时滞差分和时标方程的振动性、偏泛函微分方程的振动性、偏泛函微分方程系统的振动性和泛函微分方程的周期解。

本书可作为高等学校数学系高年级学生、理工科相关专业研究生和教师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

振动性与周期解理论的研究/林文贤著.—北京:国防工业出版社,2014.4

ISBN 978-7-118-09312-4

Ⅰ.①振… Ⅱ.①林… Ⅲ.①微分方程—研究
Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 066506 号

※

国防工業出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 12 **字数** 278 千字

2014 年 4 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—2000 册 **定价** 48.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

微分方程和差分方程都是用来描述自然现象变化规律的有力工具,在众多科学技术领域有着非常广泛的应用。它们在几何学、力学、天文学、核物理、电子技术、空间技术和星际航空等许多尖端科技领域已成为强有力的杠杆。许多重要的动力系统都是由微分方程或差分方程来描述的。微分方程研究的历史较长,且形成了较完善的理论。

一般常微分方程描述的客观现象,总是假定事物在每个时刻发展变化的趋向仅由当时的状态决定。但客观世界有许多现象并非如此,事物在每个时刻发展变化的趋向不但依赖当时的状态,而且取决于该时刻的前后一段时间的状态。自 18 世纪末以来,在连续体力学、种群生态学、电子学、核反应堆动力学、经济学及现代控制论等领域都发现具有上述现象的大量事实。近年来,随着数学在自动控制、生物数学、通信理论及计算机网络技术等自然科与边缘科学领域的广泛应用,在很多实际问题中提出了大量时滞动力系统的数学模型,因此应用时滞微分方程描述实际问题的数学模型越来越广泛。由于泛函微分方程解空间通常是无限维的,求其通解十分困难,即大多数泛函微分方程是无法求出其精确解的,因而从理论上探讨解的存在性及解的各种定性性态具有重要的理论意义和实用价值。

振动性理论是微分方程和差分方程定性理论的一个重要分支,也是近年来定性理论研究中一个十分活跃的方向。不论在哪一种技术领域里,在哪一个物理部门里,大都会遇到某种程度的振动过程。无线电技术、交流电工学以及某些其他技术部门的基础理论有些是建立在利用振动过程的基础上的。众所周知,由 G. Sturm 建立的齐次二阶线性微分方程解的零点分布的比较理论和分离理论为微分方程振动理论的研究奠定了基础。自 1977 年以来,国内外文献大量出现,相继出版了许多有关泛函微分方程振动理论的专门著作。

周期系统与周期解反映了自然界的周期运动规律,在泛函微分方程的定性理论中,周期解的存在性问题是一个重要的研究课题,几十年来一直受到国内外学者的高度关注。拓扑度理论、不动点理论、单调半流理论、分支理论、半序方法以及临界点理论等是研究泛函微分方程周期解存在性的重要手段。最近 20 年来,这些理论通过一批数学工作者的努力,已取得了长足的发展。如何利用这些理论来讨论泛函微分方程周期解的存在性问题,始终是数学工作者非常重视的课题。

笔者长期从事泛函微分方程振动性与周期解理论的研究,得到了一些成果。本人将这些成果进行整理归类,以供相关专业的教师、学生参考,并请给予批评指正。

作　者

2014 年 1 月

目　录

第一章 时滞微分方程的振动性(Ⅰ)

第一节 问题的提出

由 C. Sturm 于 1836 年研究热传导方程时,建立的二阶线性齐次微分方程关于解的零点分布的分离定理和比较定理,为微分方程振动理论的研究奠定了基础,微分方程振动理论的研究已有很大的发展,在微分定性理论及边值问题研究中都占有很重要的地位,泛函微分方程振动理论在最近 30 多年中有了很大的发展,它与常微分方程的振动理论有着本质的区别,它的重点是揭示微分方程中偏差变元出现引起解的振动和非振动。

定义 1.1 设 $x(t)$ 是某一泛函微分方程的解,如果 $x(t)$ 不是最终零解,且存在一序列 $\{t_k\}$,使得 $x(t_k)=0$,则称 $x(t)$ 是此方程的一个振动解,或称解 $x(t)$ 是振动的;否则,称 $x(t)$ 是此方程的非振动解,或称解 $x(t)$ 是非振动的。

定义 1.2 如果一个泛函微分方程的所有非最终零解都是振动的,则称此方程为振动的。

先看下面几个例子。

例 1.1 考虑常微分方程

$$\ddot{x}(t)+x(t)=0$$

它有两个周期的振动解:$x(t)=\cos t$,$x(t)=\sin t$。

例 1.2 考虑常微分方程

$$\ddot{x}(t)-\frac{1}{t}\dot{x}(t)+4t^2x(t)=0$$

它有非周期的振动解:$x(t)=\sin t^2$。

例 1.3 考虑时滞微分方程

$$\ddot{x}(t)+\frac{1}{2}x(t+\pi)=0(t\geqslant 0)$$

它有周期的振动解:$x(t)=1-\sin t$。

例 1.4 考虑时滞微分方程

$$\ddot{x}(t)-x(-t)=0$$

它有周期的振动解 $x(t)=\sin t$ 和非振动解 $x(t)=e^t+e^{-t}$。

注 1:例 1.4 揭示了时滞方程和常微分方程的区别。

例 1.5 考虑一阶常微分方程

$$\dot{x}(t)+x(t)=0$$

它有非振动解:$x(t)=e^{-t}$。

例 1.6 考虑一阶时滞微分方程

$$\ddot{x}(t)+x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

它有两个周期的振动解：$x(t)=\cos t, x(t)=\sin t$。

例 1.7 考虑一阶时滞微分方程

$$\dot{x}(t)+x\left(t-\frac{\pi}{10}\right)=0$$

它没有振动解。

注 2：例 1.5 和例 1.6 提出偏差变元引起解的振动，例 1.6 和例 1.7 提出了一个问题，究竟偏差变元多大时才使解振动。

第二节 二阶时滞微分方程的振动性

讨论具有连续偏差变元的二阶非线性中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)+p(t)x(t-\tau)]\right]+\int_a^b q(t,\xi)f(x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)=0 \quad (1.1)$$

解的振动性。

式中：τ 为一正常数；$p(t)\in C([t_0,+\infty),[0,1))$；$q(t,\xi)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],\mathbf{R}^+)$；$r(t)\in C^1([t_0,+\infty),\mathbf{R}^+)$，$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{r(t)}\mathrm{d}t=+\infty$，$\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$；$g(t,\xi)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],\mathbf{R}^+)$；$g(t,\xi)\leqslant t$，$\xi\in[a,b]$；$g(t,\xi)$ 分别关于 t、ξ 非减，并且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\min\{g(t,\xi)\}=+\infty$；$f(x)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$\sigma(\xi)\in C([a,b],\mathbf{R})$，且 $\sigma(\xi)$ 关于 ξ 非减；积分是 Stieltjes 积分 。

定理 1.1 若

$$-f(-x)\geqslant f(x)\geqslant\lambda x>0(x>0,\lambda\text{ 是一正常数}) \quad (1.2)$$

且

$$\int_{t_0}^{+\infty}\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s=+\infty \quad (1.3)$$

则方程(1.1)的所有解振动。

证明：设 $x(t)$ 是方程(1.1)的非振动解，不妨设 $x(t)>0(t\geqslant t_0)$。令

$$y(t)=x(t)+p(t)x(t-\tau) \quad (1.4)$$

则由条件 $\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{\xi\in[a,b]}\{g(t,\xi)\}=+\infty$ 可知，存在 $t_1\geqslant t_0$，使得 $x(t-\tau)>0, x[g(t,\xi)]>0(t\geqslant t_1,\xi\in[a,b])$，因而有 $y(t)>0(t\geqslant t_1)$。且由式(1.1)和式(1.4)，有 $[r(t)y'(t)]'\leqslant 0(t\geqslant t_1)$。

因此，$r(t)y'(t)$ 在 $[t_1,\infty)$ 上单调递减，可得 $r(t)y'(t)\geqslant 0(t\geqslant t_1)$；否则，必存在 $T\geqslant t_1$，使得 $r(T)x'(T)<0$。于是当 $t\geqslant T$ 时，有 $y'(t)\leqslant\frac{r(T)y'(T)}{r(t)}$，从而有

$$y(t)-y(T)\leqslant r(T)y'(T)\int_T^t\frac{1}{r(s)}\mathrm{d}s(t\geqslant T)$$

所以 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=-\infty$。这与假设“$y(t)>0$”矛盾。特别地，由于 $r(t)>0$，因而有 $y'(t)\geqslant 0$ $(t\geqslant t_1)$。

由式（1.2），进一步有

$$
\begin{aligned}
0 &= [r(t)y'(t)]' + \int_a^b q(t,\xi)f(x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi) \\
&\geqslant [r(t)y'(t)]' + \lambda\int_a^b q(t,\xi)x[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi) \\
&\geqslant [r(t)y'(t)]' + \lambda\int_a^b q(t,\xi)\{y[g(t,\xi)] - \\
&\quad p[g(t,\xi)]x[g(t,\xi)-\tau]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)
\end{aligned}
$$

由于 $y(t)\geqslant x(t)$，且 $y(t)$ 递增，因而

$$
[r(t)y'(t)]' + \lambda\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}y[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0 \tag{1.5}
$$

选取常数 $C>0$，使得 $y(C)>0$，由假设条件知存在 $T>t_1$，使得 $g(t,\xi)>C(t\geqslant T,\xi\in[a,b])$，且由 $y'(t)\geqslant 0$，有 $y[g(t,\xi)]\geqslant y(C)$，从而可得

$$
[r(t)y'(t)]' + \lambda y(C)\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0 \tag{1.6}
$$

对式(1.6)从 T 到 $t(t>T)$ 积分，得

$$
r(t)y'(t)\leqslant r(T)y'(T) - \lambda y(C)\int_T^t\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s \tag{1.7}
$$

让 $t\to+\infty$，式(1.7)与条件式(1.3)矛盾。定理 1.1 证毕。

定理 1.2 设式（1.2)成立，且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t,a)$ 存在。若存在递增函数 $\varphi(t)\in C^1([t_0,+\infty),(0,+\infty))$，使得对任意常数 $m>0$，满足

$$
\int_{t_0}^{+\infty}\left[\lambda\varphi(s)\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - m\varphi'(s)\right]\mathrm{d}s = +\infty \tag{1.8}
$$

则方程(1.1) 的所有解振动。

证明：设 $x(t)$ 是方程(1.1)的一个非振动解，不妨设 $x(t)>0$。类似定理1.1的证明，存在 $t_1\geqslant t_0$，使得 $y(t)>0$，$[r(t)y'(t)]'\leqslant 0$ 和 $y'(t)>0(t\geqslant t_1)$。且

$$
[r(t)y'(t)]' + \lambda\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}y[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0 \tag{1.9}
$$

由 $g(t,\xi)$ 关于 ξ 非减，有 $g(t,a)\leqslant g(t,\xi)$（$\xi\in[a,b]$）。由 $y(t)$ 的单增性及式(1.9)，得

$$
[r(t)y'(t)]' + \lambda y[g(t,a)]\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0
$$

令
$$
z(t)=\frac{\varphi(t)r(t)y'(t)}{y[g(t,a)]}
$$

则 $z(t)>0(t\geqslant t_1)$。且有

$$
z'(t)=\frac{\varphi'(t)r(t)y'(t)}{y[g(t,a)]} - \frac{\varphi(t)r(t)y'(t)y'[g(t,a)]}{y^2[g(t,a)]} + \frac{\varphi(t)[r(t)y'(t)]'}{y[g(t,a)]}
$$

$$\leqslant \frac{\varphi'(t)r(T)y'(T)}{y[g(T,a)]} - \lambda\varphi(t)\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

取 $m=\dfrac{r(T)y'(T)}{y[g(T,a)]}>0$，则

$$z'(t)\leqslant -\left[\lambda\varphi(t)\int_a^b q(t,\xi)\{1-p[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - m\varphi'(t)\right]$$

对上式从 T 到 $t(t>T)$ 积分，得

$$z(t)\leqslant z(T) - \int_T^t\left[\lambda\varphi(s)\int_a^b q(s,\xi)\{1-p[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - m\varphi'(s)\right]\mathrm{d}s$$

令 $t\to+\infty$，由 式(1.8)知上式与 $z(t)>0$ 矛盾。定理1.2 证毕。

例1.8 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}x\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]\right]+\int_0^1(t+\xi)x\left(\frac{t}{2}+\xi\right)\mathrm{e}^{x^2\left(\frac{t}{2}+\xi\right)}\mathrm{d}\xi=0,t\geqslant 2 \tag{1.10}$$

不难验证，定理1.1 的条件全部满足，因而，方程(1.10)的一切解振动。

讨论一类一般形式的二阶中立型微分方程

$$\left[r(t,x(t))\left[x(t)+\sum_{i=1}^m c_i(t)x(\tau_i(t))\right]'\right]'+\int_a^b p(t,\xi)f(x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)=0 \tag{1.11}$$

式中：$r\in C([t_0,+\infty)\times\mathbf{R},\mathbf{R})$，$0<r(t,x(t))\leqslant h(t)$，$h\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R}^+)$，$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{h(t)}\mathrm{d}t=+\infty$；$c_i,\tau_i\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R}^+)$，$\lim\limits_{t\to\infty}\tau_i(t)=\infty\ (i=1,2,\cdots,m)$；$p\in C([t_0,+\infty)\times[a,b]\times\mathbf{R},\mathbf{R}^+)$；$f\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$；$g(t,\xi)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],\mathbf{R}^+)$，$g(t,\xi)\leqslant t\ (\xi\in[a,b])$，$g(t,\xi)$ 分别关于 t、ξ 非减，并且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{\xi\in[a,b]}\{g(t,\xi)\}=+\infty$；$\sigma(\xi)\in C([a,b],\mathbf{R})$，且 $\sigma(\xi)$ 关于 ξ 非减。

定理1.3 设 $\sum\limits_{i=1}^m c_i(t)\leqslant 1$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t,a)$ 存在。且有：

(1) $-f(-x)\geqslant f(x)\geqslant\lambda x>0(x>0,\lambda$ 是一正常数)； (1.12)

(2) 存在单调递增函数 $\psi(t)\in C^1([t_0,+\infty),(0,+\infty))$，使得对任意常数 $k>0$，有

$$\int_{t_0}^{+\infty}\left[\psi(s)\int_a^b p(s,\xi)\{1-c[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)-k\psi'(s)\right]\mathrm{d}s=+\infty \tag{1.13}$$

则方程(1.11)的一切解振动。

证明：设 $x(t)$ 是方程(1.11)的非振动解，不失一般性，可设 $x(t)>0(t\geqslant t_0)$，由定理条件知，存在 $t_1\geqslant t_0$，使得 $x(\tau_i(t))>0$，$x[g(t,\xi)]>0(t\geqslant t_1,\xi\in[a,b],i=1,2,\cdots,m)$，令

$$y(t)=x(t)+\sum_{i=1}^m c_i(t)x(\tau_i(t)) \tag{1.14}$$

则

$$y(t) \geqslant x(t), y(t) > 0(t \geqslant t_1) \tag{1.15}$$

且

$$[r(t,x(t))y'(t)]' = -\int_a^b p(t,\xi)f(x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi) \leqslant 0(t \geqslant t_1) \tag{1.16}$$

令 $t \to \infty$，由式(1.16)可知 $r(t,x(t))y'(t)$ 是 t 的减函数，且可证明 $y'(t) \geqslant 0(t \geqslant t_1)$。由式(1.14)，方程(1.11)可改写为

$$[r(t,x(t))y'(t)]' + \lambda \int_a^b p(t,\xi)x[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi) \leqslant 0$$

再由式(1.14)、式(1.15)、$g(t,\xi)$ 关于 ξ 非减及 $y(t)$ 是增函数，得

$$[r(t,x(t))y'(t)]' + \lambda y[g(t,a)]\int_a^b p(t,\xi)\{1 - \sum_{i=1}^m c_i[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) \leqslant 0$$

令

$$z(t) = \frac{\varphi(t)r(t,x(t))y'(t)}{y[g(t,a)]}$$

则 $z(t) > 0(t \geqslant t_1)$。当 $t > T$ 时，有

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\varphi'(t)r(t,y(t))y'(t)}{y[g(t,a)]} - \frac{\varphi(t)r(t,y(t))y'(t)y'[g(t,a)]}{y^2[g(t,a)]} + \frac{\varphi(t)[r(t,y(t))y'(t)]'}{y[g(t,a)]} \\ &\leqslant \frac{\varphi'(T)r(T,x(T))y'(T)}{y[g(T,a)]} - \lambda\varphi(t)\int_a^b p(t,\xi)\{1 - \sum_{i=1}^m c_i[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) \end{aligned}$$

其中 $T \geqslant t_1$，使得 $z'[g(t,a)] > 0(t \geqslant T)$。令 $k = \dfrac{r(T,y(T)z'(T)}{z[g(T,a)]} > 0$，则

$$z'(t) \leqslant -[\lambda\psi(t)\int_a^b p(t,\xi)\{1 - \sum_{i=1}^m c_i[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - k\psi'(t)] \tag{1.17}$$

对式(1.17)从 T 到 $t(t > T)$ 积分，得

$$z(t) \leqslant z(T) - \int_T^t [\lambda\psi(s)\int_a^b p(s,\xi)\{1 - \sum_{i=1}^m c_i[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - k\psi'(s)]\mathrm{d}s$$

令 $t \to +\infty$，由式 (1.13)知上式与 $z(t) > 0$ 矛盾。定理 1.3 证毕。

推论 1.1 设 $\sum_{i=1}^m c_i(t) \leqslant 1$，条件式(1.13)成立，且有

$$\int_{t_0}^{+\infty}\int_a^b p(s,\xi)\{1 - c[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s = +\infty$$

则方程(1.11)的所有解振动

定理 1.4 设条件式(1.13)和式(1.14)成立，且 $c_i(t) \equiv c_i \geqslant 0, \tau_i(t) = t - \tau_i, \tau_i$ 为正常数。若：

(1) 存在函数 $g'_t(t,\xi) \in C([t_0, +\infty) \times [a,b], \mathbf{R}^+)$；

(2) 存在函数 $\varphi(t) \in C([t_0, +\infty) \times (0, +\infty)$，使得

$$p(t,\xi) \geqslant \varphi(t) \qquad (t \geqslant t_0, \xi \in [a,b]) \tag{1.18}$$

并且

$$\int_{t_0}^{+\infty}\varphi(s)\mathrm{d}s = +\infty \tag{1.19}$$

则方程 (1.11)的一切可微解的导数振动。

证明:设方程 (1.11)存在一可微解 $y(t)$,使得最终有

$$y(t) > 0, y'(t) > 0 \qquad (t \geqslant t_1 \geqslant t_0) \tag{1.20}$$

或

$$y(t) > 0, y'(t) < 0 \qquad (t \geqslant t_1 \geqslant t_0) \tag{1.21}$$

首先假设式(1.20)成立,定义函数

$$w(t) = r(t,y(t))z'(t) \Big/ \int_a^b y[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

则

$$w(t) > 0 \qquad (t \geqslant t_2) \tag{1.22}$$

由方程 (1.11) 知 $y''(t)$存在,因而 $y'(t)$连续。注意到定理 1.4 条件(1),容易得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b y[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}g} \cdot g'_t(t,\xi)\mathrm{d}\sigma(\xi) \geqslant 0$$

由定理 1.4 条件(2)得

$$w'(t) \leqslant \frac{[r(t,y(t))z'(t)]'}{\int_a^b y[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)} \leqslant -\frac{\lambda \int_a^b p(t,\xi)y[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)}{\int_a^b y[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)} \leqslant -\lambda\varphi(t)$$

对上式关于 T 到 $t(t>T)$积分,得

$$w(t) \leqslant w(T) - \lambda\int_T^t \varphi(s)\mathrm{d}s$$

令 $t \to +\infty$,由式(1.19)得 $w(t) \leqslant 0$,这与式(1.22)矛盾。

其次假设式(1.21)成立。由式(1.19)可证明,存在 $T \geqslant t_0$ 使得 $\int_T^t \varphi(s)\mathrm{d}s > 0(t \geqslant T)$。事实上,令

$$G(t) = \int_{t_0}^t \varphi(s)\mathrm{d}s, \ T = \sup\{\eta \geqslant t_0 \mid F(\eta) = 0\}$$

由式(1.19)可知,$G(T)=0$ 且 $G(t)>0(t>T)$,因而

$$\int_T^t \varphi(s)\mathrm{d}s = G(t) - G(T) = G(t) > 0$$

进一步可得

$$\int_T^t \int_a^b p(s,\xi)y[g(s,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s \geqslant \int_T^t \varphi(s)\mathrm{d}s \cdot \int_a^b y[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi) > 0$$

对方程 (1.11)关于 t 从 T 到 $t(t>T)$积分,得

$$r(t,y(t))z'(t) - r(T,y(T))z'(T) = -\int_T^t \int_a^b f(s,\xi,y[g(s,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s < 0 \tag{1.23}$$

由假设及式(1.23)得

$$z'(t) < \frac{r(T,y(T))z'(T)}{r(t,y(t))} \leqslant \frac{r(T,y(T))z'(T)}{h(t)} \tag{1.24}$$

对式(1.24)从 t 到 T_1 积分,得

$$z(t) < z(T_1) + r(T,y(T))z'(T)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{T_1}^{t}\frac{1}{h(s)}\mathrm{d}s \tag{1.25}$$

对式(1.25)令 $t\to+\infty$,得 $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=-\infty$,这与 $z(t)>0$ 矛盾。

若对于方程(1.11),终有 $y(t)<0,y'(t)>0$ 或 $y(t)<0,y'(t)<0$,则类似上述讨论也可导致矛盾。证毕。

例 1.9 考虑中立型方程

$$\left[\frac{t}{1+y^2(t)}[y(t)+(1-\mathrm{e}^{-2t})y(t-\tau)]'\right]' + \int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{2(t+\xi)}y\left(\frac{t}{3}+\xi\right)\mathrm{d}\xi = 0(t>0) \tag{1.26}$$

由推论 1.1 可知,方程(1.26)的所有解振动。

例 1.10 考虑中立型方程

$$\left[\frac{1}{t(1+|y(t)|)}[y(t)+cy(t-\tau)]\right]' + \int_{1}^{2}\frac{\xi^2}{t}y\left(\frac{t}{2}+\sqrt{\xi}\right)\mathrm{d}\xi = 0(t\geqslant 2\sqrt{2}) \tag{1.27}$$

由定理 1.4 可知,方程(1.27)的所有可微解的导数振动。

下面考虑一类具连续分布滞量的二阶非线性中立型泛函微分方程方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[x(t)+c(t)x(t-\tau)] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)+c(t)x(t-\tau)] + \int_a^b f(t,\xi,x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi) = 0 \tag{1.28}$$

式中:τ 为非负常数;$c(t)\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R})$,$0\leqslant c(t)\leqslant 1$;$f(t,\xi,x)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b]\times\mathbf{R},\mathbf{R})$;$g(t,\xi)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],\mathbf{R}^+)$,$g(t,\xi)\leqslant t,\xi\in[a,b]$,$g(t,\xi)$ 分别关于 t、ξ 非减,并且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{\xi\in[a,b]}\{g(t,\xi)\}=+\infty$;$\sigma(\xi)\in C([a,b],\mathbf{R})$,且 $\sigma(\xi)$ 关于 ξ 非减。

定理 1.5 设存在函数 $Q(t,\xi)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],\mathbf{R}^+)$ 和 $F(x)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$,使得

$$f(t,\xi,x)\operatorname{sgn}x \geqslant Q(t,\xi)F(x)\operatorname{sgn}x \tag{1.29}$$

$$-F(-x)\geqslant F(x)\geqslant \lambda x>0(x>0,\lambda\text{ 为正数}) \tag{1.30}$$

又若

$$\int_{t_0}^{+\infty}\int_a^b Q(s,\xi)\{1-c[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s = +\infty \tag{1.31}$$

则方程(1.28)的所有解振动。

证明: 设 $x(t)$ 是方程(1.28)的非振动解,不妨设 $x(t)>0(t\geqslant t_0)$。令

$$y(t) = x(t)+c(t)x(t-\tau) \tag{1.32}$$

由假设条件 $\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{\xi\in[a,b]}\{g(t,\xi)\}=+\infty$ 可知,存在 $t_1\geqslant t_0$,使得 $x(t-\tau)>0$, $x[g(t,\xi)]>0$ $(t\geqslant t_1,\xi\in[a,b])$。因而有 $y(t)>0(t\geqslant t_1)$。由式(1.29)和式(1.30)得

$$y''(t)+y'(t)\leqslant -\int_a^b Q(t,\xi)F(x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0(t\geqslant t_1) \tag{1.33}$$

从而

$$[\mathrm{e}^t y'(t)]'\leqslant -\mathrm{e}^t\int_a^b Q(t,\xi)F(x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0(t\geqslant t_1)$$

所以 $\mathrm{e}^t y'(t)$ 在 $[t_1,\infty)$ 上单调减少，从而 $y'(t)$ 是单调减少，即 $y''(t)\leqslant 0,(t\geqslant t_1)$。事实上，对 $\forall\alpha<\beta,\mathrm{e}^\beta y'(\beta)\leqslant \mathrm{e}^\alpha y'(\alpha)$，有 $y'(\beta)\leqslant \mathrm{e}^{\alpha-\beta}y'(\alpha)\leqslant y'(\alpha)$。

又可以推得 $y'(t)>0(t\geqslant t_1)$。若不成立，则存在 $T>t_1$，使 $y'(T)<0$，由 $y'(t)$ 是单调减少函数可得

$$y(t)-y(T)=\int_T^t y'(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_T^t y'(T)\mathrm{d}s=y'(T)(t-T)(t>T)$$

因而 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=-\infty$。这与 $y(t)>0(t\geqslant t_1)$ 矛盾。

由式(1.30)，得

$$F(x[g(t,\xi)])\geqslant\lambda x[g(t,\xi)]>0$$

进一步有

$$\begin{aligned}0&=[\mathrm{e}^t y'(t)]'+\mathrm{e}^t\int_a^b f(t,\xi,x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)\\&\geqslant[\mathrm{e}^t y'(t)]'+\lambda\mathrm{e}^t\int_a^b Q(t,\xi)x[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)\\&\geqslant[\mathrm{e}^t y'(t)]'+\lambda\mathrm{e}^t\int_a^b Q(t,\xi)\{y[g(t,\xi)]-c[g(t,\xi)]x[g(t,\xi)-\tau]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\end{aligned}$$

注意到 $y(t)\geqslant x(t)$，得

$$[\mathrm{e}^t y'(t)]'+\lambda\mathrm{e}^t\int_a^b Q(t,\xi)\{1-c[g(t,\xi)]\}y[g(t,\xi)-\tau]\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0$$

因 $y(t)$ 在 $[t_1,\infty)$ 上为增函数，可得

$$[\mathrm{e}^t y'(t)]'+\lambda\mathrm{e}^t\int_a^b Q(t,\xi)\{1-c[g(t,\xi)]\}y[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0(t\geqslant t_1)$$

选取常数 $A>0$，使得 $y(A)>0$，由假设条件知存在 $t_2>t_1$，使得 $g(t,\xi)>A(t\geqslant t_2,\xi\in[a,b])$；且由 $y'(t)\geqslant 0$，有 $y(g(t,\xi))\geqslant y(A)$；又因 e^t 是增函数，从而可得

$$[\mathrm{e}^t y'(t)]'+\lambda y(A)\mathrm{e}^{t_2}\int_a^b Q(t,\xi)\{1-c[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0(t\geqslant t_2) \tag{1.34}$$

对式(1.34)由 t_2 到 $t(t>t_2)$ 积分，得

$$\mathrm{e}^t y'(t)\leqslant \mathrm{e}^{t_2}y'(t_2)-\lambda y(A)\mathrm{e}^{t_2}\int_{t_2}^t\int_a^b Q(s,\xi)\{1-c[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s$$

$$\int_{t_2}^t Q(s,\xi)\{1-c[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{\lambda y(A)\mathrm{e}^{t_2}}[\mathrm{e}^{t_2}y'(t_2)-\mathrm{e}^t y'(t)] \tag{1.35}$$

因为 $[\mathrm{e}^t y'(t)]'\leqslant 0$ 且 $\mathrm{e}^t y'(t)\geqslant 0$，所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^t y'(t)$ 存在且为有限数，故在式(1.35)中令 $t\to+\infty$ 得

$$\int_{t_2}^{+\infty} Q(s,\xi)\{1 - c[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\mathrm{d}s < +\infty$$

这与式(1.31)矛盾。

若 $x(t)<0$,可做变换 $z(t)=-x(t)$, 则方程(1.28)为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[z(t)+c(t)z(t-\tau)]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[z(t)+c(t)z(t-\tau)]+\int_a^b f^*(t,\xi,z[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)=0$$

式中

$$f^*(t,\xi,z[g(t,\xi)])\equiv -f(t,\xi,-z[g(t,\xi)])$$

由式(1.29)和式(1.30)可得

$$\begin{aligned}f^*(t,\xi,z[g(t,\xi)]) &\equiv -f(t,\xi,-z[g(t,\xi)])\\ &\geqslant Q(t,\xi)\{-F(-z[g(t,\xi)]\}\geqslant Q(t,\xi)F(z[g(t,\xi)])\end{aligned}$$

因此,采用与证明方程(1.28)当 $x(t)>0$ 时的相同方法,也可证明得出矛盾。定理1.5证毕。

定理1.6 设式(1.29)和式(1.30)成立,且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t,a)$ 存在。若存在单调递增函数 $\varphi(t)\in C^1([t_0,+\infty),(0,+\infty))$, 使得

$$\int^{\infty}\left\{\lambda\varphi(s)\mathrm{e}^s\int_a^b p(s,\xi)\{1-c[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)-\frac{\mathrm{e}^{g(s,a)}[\varphi'(s)]^2}{4\varphi(s)g'(s,a)}\right\}\mathrm{d}s=+\infty \tag{1.36}$$

则方程(1.28)的所有解振动。

证明:设 $x(t)$ 是方程(1.28)的一个非振动解,不妨设 $x(t)>0$。令 $y(t)=x(t)+c(t)x(t-\tau)$, 类似定理1.5的证明,存在 $t_1\geqslant t_0$,使得 $y(t)>0$, $[\mathrm{e}^t y'(t)]'\leqslant 0$ 和 $y'>0, t\geqslant t_1$。且

$$[\mathrm{e}^t y'(t)]'+\lambda\mathrm{e}^t\int_a^b Q(t,\xi)\{1-c[g(t,\xi)]\}y[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0 \tag{1.37}$$

由假设条件, $g(t,\xi)$ 关于 ξ 非减,有 $g(t,a)\leqslant g(t,\xi)(t\geqslant t_1,\xi\in[a,b])$。

由 $y(t)$ 的单增性及式(1.37)得

$$[\mathrm{e}^t y'(t)]'+\lambda y[g(t,a)]\mathrm{e}^t\int_a^b Q(t,\xi)\{1-c[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0$$

令

$$z(t)=\frac{\varphi(t)\mathrm{e}^t y'(t)}{y[g(t,a)]}$$

则 $z(t)>0(t\geqslant t_1)$。于是

$$\begin{aligned}z'(t) &= \frac{\varphi'(t)\mathrm{e}^t y'(t)}{y[g(t,a)]}-\frac{\varphi(t)\mathrm{e}^t y'(t)y'[g(t,a)]g'(t,a)}{y^2[g(t,a)]}+\frac{\varphi(t)[\mathrm{e}^t y'(t)]'}{y[g(t,a)]}\\ &\leqslant -\lambda\varphi(t)\mathrm{e}^t\int_a^b Q(t,\xi)\{1-c[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi)+\\ &\frac{\varphi'(t)\mathrm{e}^t y'(t)}{y[g(t,a)]}-\frac{\varphi(t)\mathrm{e}^t y'(t)y'[g(t,a)]g'(t,a)}{y^2[g(t,a)]}\end{aligned}$$

注意到$[e^t y'(t)]'\leqslant 0$，有

$$\frac{\varphi(t)(e^t y'(t))^2 g'(t,a)}{e^{g(t,a)} y^2[g(t,a)]} \leqslant \frac{\varphi(t)e^t y'(t) y'[g(t,a)]g'(t,a)}{y^2[g(t,a)]}$$

因而

$$z'(t) \leqslant -\lambda\varphi(t)e^t\int_a^b Q(t,\xi)\{1-c[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) + \frac{e^{g(t,a)}[\varphi'(t)]^2}{4\varphi(t)g'(t,a)} -$$

$$\left[e^t\sqrt{\frac{\varphi(t)g'(t,a)}{e^{g(t,a)}}}\frac{y'(t)}{y[g(t,a)]} - \frac{\varphi'(t)}{2\sqrt{\varphi(t)g'(t,a)/e^{g(t,a)}}}\right]^2$$

$$\leqslant -\left\{\lambda\varphi(t)e^t\int_a^b Q(t,\xi)\{1-c[g(t,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - \frac{e^{g(t,a)}[\varphi'(t)]^2}{4\varphi(t)g'(t,a)}\right\}$$

对上式由t_1到$t(>t_1)$积分，得

$$z(t) \leqslant z(t_1) - \int_{t_1}^t\left\{\lambda\varphi(s)e^s\int_a^b Q(s,\xi)\{1-c[g(s,\xi)]\}\mathrm{d}\sigma(\xi) - \frac{e^{g(s,a)}[\varphi'(s)]^2}{4\varphi(s)g'(s,a)}\right\}\mathrm{d}s$$

令$t\to+\infty$，由式(1.36)知上式与$z(t)>0$矛盾。

若$x(t)<0$，可得利用与定理1.5证明中同样的方法，即令$z(t)=-x(t)$，也可推出矛盾。定理1.6证毕。

例1.11 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[x(t)+\frac{1}{2}e^{-t}x(t-\frac{1}{2})\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)+\frac{1}{2}e^{-t}x(t-\frac{1}{2})\right]+$$

$$\int_0^1\frac{t+\xi}{\cos\xi}x(\frac{t}{2}+\xi)e^{x^2(\frac{t}{2}+\xi)}\mathrm{d}\xi = 0(t\geqslant 2)$$

式中

$$c(t)=\frac{1}{2}e^{-t},\tau=\frac{1}{2},g(t,\xi)=\frac{t}{2}+\xi,F(t,\xi,x)=\frac{t+\xi}{\cos\xi}xe^{x^2}$$

注意到

$$\frac{t+\xi}{\cos\xi}xe^{x^2}\mathrm{sgn}x \geqslant (t+\xi)xe^{x^2}\mathrm{sgn}x(t\geqslant 2,0\leqslant\xi\leqslant 1)$$

选取

$$Q(t,\xi)=t+\xi,f(x)=xe^{x^2},\lambda=1$$

不难验证，定理1.6的条件全部满足，因而，该方程的一切解振动。

下面讨论二阶时滞泛函微分方程

$$\{a(t)[x(t)+c(t)x(t-\tau)]'\}'+\int_a^b F(t,\xi,x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)=0 \qquad (1.38)$$

的区间振动性，它不同于大多数振动结果依赖于整个区间$[t_0,\infty)$的性质，而是仅依赖于半直线上的某些子区间列的性质。它还适用于极端情形，例如

$$\int_{t_0}^{\infty}q(t)[1-p(t-\tau)]\mathrm{d}t=-\infty。$$

式(1.38)中：$a(t)\in C^1([t_0,+\infty),\mathbf{R}_+)$；$c(t)\in C([t_0,+\infty),[0,1])$，$F(t,\xi,x)\in C([t_0,$

$+\infty)\times[a,b]\times\mathbf{R},\mathbf{R})$，$F(t,\xi,x)\operatorname{sgn}x\geqslant q(t,\xi)f(x)\operatorname{sgn}x,\dfrac{f(x)}{x}>\lambda\,(x\neq 0)$；$q(t,\xi)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],\mathbf{R}_+)$，$f(x)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$\int_{t_0}^{\infty}\dfrac{1}{a(t)}\mathrm{d}t=\infty$，且 τ 是一非负常数；$g(t,\xi)\in C([t_0,+\infty)\times[a,b],\mathbf{R}_+)$，$g(t,\xi)\leqslant t,\xi\in[a,b]$，$g(t,\xi)$ 分别关于 t、ξ 非减，并且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{\xi\in[a,b]}\{g(t,\xi)\}=+\infty$；$\sigma(\xi)\in C([a,b],\mathbf{R})$，$\sigma(\xi)$ 关于 ξ 非减；积分是 Stieltjes 积分 。

首先定义函数类 S。称一个函数 $H=H(t,s)\in S$，如果 $H(t,s)\in C(D,\mathbf{R}_+)$，其中 $D=\{(t,s)\mid -\infty<s\leqslant t<+\infty\}$，满足

$$H(t,t)=0(t\geqslant t_0),H(t,s)>0(t>s\geqslant t_0)$$

且在 D 上存在偏导数$\partial H/\partial t$ 和$\partial H/\partial s$，使得

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial t}=h_1(t,s)H(t,s),\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}=-h_2(t,s)H(t,s)$$

式中：$h_1,h_2\in L_{\mathrm{loc}}(D,R)$。

设 $\rho\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R}_+)$，$k\in C([t_0,+\infty),\mathbf{R}_+)$。现在定义两个积分变换

$$X_{T,t}^{H,\rho}(k)=\int_T^t H(s,T)k(s)\rho(s)\mathrm{d}s,Y_{T,t}^{H,\rho}(k)=\int_T^t H(s,T)k(s)\rho(s)\mathrm{d}s(t\geqslant T\geqslant t_0)$$

为了方便，假设给定两个函数 $\Phi\in C^1([t_0,+\infty),\mathbf{R}_+)$ 和 $\phi\in C^1([t_0,+\infty),\mathbf{R})$，定义

$$\Theta(t)=\Phi(t)\left\{\int_a^b q(t,\xi)[1-c(g(t,\xi))]\mathrm{d}\sigma(\xi)+\frac{\phi^2(t)}{a(g(t,a))}-\phi'(t)\right\}$$

$$\Psi(t)=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}+\frac{2g'(t,a)}{a(g(t,a))}\phi(t),\quad g(t)=\frac{a(g(t,a))\Phi(t)}{g'(t,a)}$$

定理 1.7 如果对任意的 $T\geqslant t_0$，存在函数 $H\in S,\rho,\Phi\in C^1([t_0,+\infty),\mathbf{R}_+)$，$\phi\in C^1([t_0,+\infty),\mathbf{R}_+)$，和 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 使得 $T\leqslant a<c<b$，以及

$$\frac{1}{H(c,a)}X_{a,c}^{H,\rho}\left[\Theta-\frac{1}{4}g\left(h_1+\Psi+\frac{\rho'}{\rho}\right)^2\right]+\frac{1}{H(b,c)}Y_{c,b}^{H,\rho}\left[\Theta-\frac{1}{4}g\left(h_2-\Psi-\frac{\rho'}{\rho}\right)^2\right]>0 \tag{1.39}$$

则方程(1.38)的所有解振动。

证明：假设 $x(t)$ 是方程(1.38)的一个非振动解。不失一般性，不妨设 $x(t)>0(t\geqslant t_0)$，则根据条件，必存在某个 $T_0\geqslant t_0$，使得 $x(t-\tau)>0,x[g(t,\xi)]>0(t\geqslant T_0,\xi\in[a,b])$。

令 $y(t)=x(t)+c(t)x(t-\tau)$，显然当 $t\geqslant T_0$ 时有 $y(t)>x(t)>0$，且由条件方程(1.38)变为

$$[a(t)y'(t)]'\leqslant-\lambda\int_a^b q(t,\xi)x[g(t,\xi)]\mathrm{d}\sigma(\xi)\leqslant 0 \tag{1.40}$$

因而，$a(t)y'(t)$ 是$[T_0,\infty)$上的一个递减函数，可推出 $a(t)y'(t)>0(t\geqslant T_0)$；否则，必存在某个 $t_1>T_0$，使得 $a(t_1)y'(t_1)\leqslant 0$。于是当 $t\geqslant t_1$ 时，有 $a(t)y'(t)\leqslant a(t_1)\cdot y'(t_1)$，即