前　　言

本书按国家颁布的现行教学大纲及有关要求编写，试图为数学系本科各专业及其它理工科各专业提供一种统一的高等代数 (或线性代数) 教材. 本书已在黑龙江大学四个专业试用五年，现修改正式出版.

本书有以下几个特点:

1. 对线性代数中一些重要定理给出了有别于现行诸教材的证明方法. 例如行列式乘法定理，矩阵等价分解的唯一性定理，齐次线性方程组基础解系定理，实对称阵的正交对角化定理，实二次型的惯性定理等.

2. 全书重视初等变换方法及矩阵分块技术的运用和训练.

3. 注意挖掘线性代数各部分内容之间的联系. 例如对线性方程组的解的分类和 n 维向量线性相关，线性无关，线性表出等概念紧密结合叙述，收到了较好效果.

4. 安排了大量由浅入深的习题. 不仅每节后配有练习题，而且每章后有 A 、 B 、 C 三类题可供各类学生选用.

使用本书建议如下:

1. 数学系本科各专业高等代数课程中矩阵论部分可选用本书前六章，习题可使用练习题、 A 类题和 B 类题.

2. 数学系以外理工科各专业可讲授本书中除 “*” 号外的所有内容或再根据学时情况做进一步删减. 习题可使用练习题及 A 类题.

本书出版得到黑龙江大学及数学系有关领导和广大同仁的支持，在此深表谢意. 由于作者水平有限，不足之处恳请读者批评指正.

黑龙江大学数学系　曹重光

1999 年 7 月于哈尔滨

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是一个重要的数学工具，它不仅是高等代数必不可少的内容，而且对数学其它领域以及数学以外的许多领域都具有重要意义和广泛应用．本章研究行列式的基本性质和计算．

§1 预备知识

本节所叙述的几个预备知识不仅对本章而且对全书都是基本的．

(一) 数域

讨论某些问题常常在一定的数的范围内来进行．例如求一个实系数一元二次方程的实根，将一个有理系数多项式在有理数或实数范围内分解，求一个整系数方程的整数根等等．代数问题常常关心数的集合在某些运算下的封闭性质，为此引出

定义 1 设 $\mathbf{F}$ 是至少含有两个不同数的数集．如果对 $\mathbf{F}$ 中的任意数 a 和 b 来说，$a \pm b, ab$ 及 $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ 总在 $\mathbf{F}$ 中，则称 $\mathbf{F}$ 是一个**数域**.

这个定义其实就是说，数集 $\mathbf{F}$ 对于加、减、乘和除四种运算是封闭的．如果只考虑加、减和乘三种运算的封闭性还可以定义**数环**．按上面定义来衡量，容易看出全体复数构成**复数域** $\mathbf{C}$，全体实数构成**实数域** $\mathbf{R}$，全体有理数构成**有理数域** $\mathbf{Q}$．全体整数不构成数域（对除法不封闭），但构成数环称为**整数环** $\mathbf{Z}$，自然数集连数环也不是．除了上面列举的通常

数域外，我们可以举出一些新的数域.

例 1 设 $\mathbf{F}=\{a+b\sqrt{2}\mid a\in\mathbf{Q},\ b\in\mathbf{Q}\}$. 证明 F 是一个数域.

证明 F 中显然含有两个元素，例如 1 及 0. 在 F 中任取 $a=a_1+b_1\sqrt{2}$, $b=a_2+b_2\sqrt{2}$, 其中 $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2\in\mathbf{Q}$, 易见

$$\begin{aligned}a\pm b&=a_1+b_1\sqrt{2}\pm(a_2+b_2\sqrt{2})\\&=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}\in\mathbf{F},\end{aligned}$$

$$ab=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in\mathbf{F}.$$

又取 $b\neq 0$, 由乘法封闭性可知

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{a_2^2-2b_2^2}\in\mathbf{F}.$$

由数域定义知， F 是一个数 ∎

命题 1 任何数域 F 都包含有理数域.

证明 因为 F 中含两个不同数, 所以至少其中之一是非零数，设其为 a, 于是 $\frac{a}{a}=1\in\mathbf{F}$, 再由加法封闭知 $1+1=2\in\mathbf{F}$, $1+2=3\in\mathbf{F},\cdots$. 从而 F 含所有自然数，由减法封闭性知 $\mathbf{F}\supset\mathbf{Z}$, 再由除法封闭性知 $\mathbf{F}\supset\mathbf{Q}$. ∎

(二) 和号

为了将数的连加法缩写, 常使用和号, 即用 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 记 $a_1+a_2+\cdots+a_n$, 其中 $a_1,\ \cdots,\ a_n\in\mathbf{F}$, F 是一个数域. 使用和号可以使某些表达式更为简洁. 例如等比数列的前 n 项和 $a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}$ 可以记成 $\sum\limits_{k=1}^{n}aq^{k-1}$. 二项式定理的展开公式可记为

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}c_n^i x^{n-i}y^i.$$

反过来，看到用和号写出的式子，应正确理解其含义. 例如 $\sum\limits_{k=1}^{n} 2(k^2+1)$ 表示 $2(1^2+1)+2(2^2+1)+\cdots+2(n^2+1)$, $\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\cdot ik^2$ 则表示 $k^2-2k^2+3k^2-4k^2+\cdots+(-1)^{k-1}k\cdot k^2$.

由和号的意义容易得出下面的公式

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(ca_i)=c\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$,

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b)=nb+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,

(4) $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}$.

最后一个公式的左端实际是 $\sum\limits_{i=1}^{m}(a_{i1}+\cdots+a_{in})$, 即

$$\begin{array}{ll} & a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n} \\ + & a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n} \\ + & \cdots\ \cdots \\ + & a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn} \end{array},$$

而右端是 $\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{1j}+\cdots+a_{mj})$, 即

$$\begin{array}{ll} & a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1} \\ + & a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2} \\ + & \cdots\ \cdots \\ + & a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn} \end{array},$$

容易看出两端相等.

这个公式实际上出现了两个变动标号 i 和 j. 还有更复杂的情况，例如我们用 $\sum\limits_{(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 表示六项和，每

一项由 $(j_1j_2j_3)$ 取 1, 2, 3 的一个全排列而定，于是这个和是 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}$.

例 2 求和 $\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2+k+1)$ 的表达式 $f(n)$.

解

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1) &= \sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)+n\\ &= \frac{1}{3}n(n^2+3n+5).\ \blacksquare\end{aligned}$$

(三) 排列

由 $1,2,\cdots,n$ 取不同数组成的 n 元有序数组称为一个 n **级排列**. 在中学曾研究过排列的种数公式，现在讨论排列的奇偶性.

定义 2 在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果 $i<k$ 且 $j_i>j_k$ 则称为一个 **逆序**. 逆序的总个数称排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的 **逆序数**, 记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例如 $\tau(12\cdots n)=0$, $\tau(3214)=3$, $\tau(4321)=6$.

定义 3 逆序数为奇数的排列称为 **奇排列**. 逆序数为偶数的排列称为 **偶排列**.

由上可知 $12\cdots n$ 是偶排列， 3214 是奇排列， 4321 又是偶排列.

定义 4 在一个 n 级排列中将某两个数码的位置交换，其余数码不动，称对这个排列进行了一次 **对换**.

例如，排列 32154 经数码 2 与 5 的对换变成了排列 35124.

命题 2 对一个排列进行一次对换，则奇排列变成了偶排列，偶排列变成了奇排列. 即对换改变排列的奇偶性.

证明 (1) 先考虑相邻数码对换的情况. 设排列写成 $PabQ$, 其中 P 表示数码 a 前面的部分, Q 表示数码 b 后面的部分. 调换 a 与 b 的位置后, 排列变成了 $PbaQ$. 注意在计算这两个排列的逆序数时, 由数对 a, b 以外的数对引起的逆序个数没有改变, 而由数对 a,b 引起的逆序个数当 $a<b$ 时增加 1, 当 $a>b$ 时减少 1. 因此排列的奇偶性改变了.

(2) 现在看一般情况. 设排列写成了 $PaRbQ$ 的形式, 其中 a, b 中间的部分 R 恰由 r 个数码构成. 调换 a 与 b 则排列变成 $PbRaQ$. 这个过程可以认为是下列连续施行的对换的结果: 先由 r 个相邻对换使其变成 $PRabQ$, 再经 $r+1$ 个相邻对换使其变成 $PbRaQ$. 这里一共进行了 $2r+1$ 次相邻对换, 由 (1) 可知排列的奇偶性改变了. ∎

命题 3 任意一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 可经有限次对换变为 $12\cdots n$, 并且所使用对换次数的奇偶性与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性一致.

证明 首先, 如果 $j_1\neq 1$, 可将 $j_1j_2\cdots j_n$ 经一次对换变为 $1i_2\cdots i_n$. 如果 $i_2\neq 2$ 又可经一次对换变为 $12k_3\cdots k_n$, 如此继续, 可经有限次对换将原排列变为 $12\cdots n$. 因为 $12\cdots n$ 是偶排列, 由命题 2 知本命题后一结论成立. ∎

练　习　1

1. 指出下列数集哪些构成数域, 哪些不是, 并说明理由.

(1) $\{a-b\sqrt{3}\mid a\in\mathbf{Q},\ b\in\mathbf{Q}\}$;

(2) $\{a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\mid a\in\mathbf{Q},\ b\in\mathbf{Q}\}$;

(3) $\{a+b\sqrt{2}\mid a\in\mathbf{Z},\ b\in\mathbf{Z}\}$;

(4) $\{a(\sqrt{2}+1) \mid a \in \mathbf{Q}\}$;

(5) $\{a\sqrt{2} \mid a \in \mathbf{R}\}$;

(6) $\left\{ \dfrac{a_0\pi^n + a_1\pi^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0\pi^m + b_1\pi^{m-1} + \cdots + b_m} \right| m, n \in \mathbf{Z}^+$(非负整数), $a_i, b_j \in \mathbf{Z}$ $(i = 0, 1, \cdots, n; j = 0, 1, \cdots, m)$ 且 $\left. b_0 \neq 0 \right\}$.

2. 数域 $\mathbf{F}$ 不是复数域 $\mathbf{C}$ 时是否全为实数构成？

3. 用和号表示 $(x-y)^n$ 的展开式.

4. 将 $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1$ 用和号表示.

5. 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k^2+k+1)$ 的表达式 $f(n)$.

6. $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_jy_j$ 对吗？为什么？

7. $\sum\limits_{i=1}^{m}\left[a_i\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}c_j\right)\right] = \sum\limits_{j=1}^{n}\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_ib_{ij}\right)c_j\right]$ 对吗？为什么？

8. 确定下列排列的奇偶性.

(1) 362514　(2) 253461　(3) 436125

(4) $n(n-1)\cdots 21$　(5) $23\cdots n1$

9. 用数学归纳法证明命题 3.

10. 四级排列有多少个？其中奇排列及偶排列各多少个？

§2 行列式的定义

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 = & b_2 \end{cases},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用加减消元法可求其解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

如果引进记号 (称为 **二阶行列式**)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

上述方程组当 $D\neq 0$ 时的解可写成

$$x_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad x_2=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

类似地，对三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & =b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & =b_3 \end{cases},$$

引进记号 (称 **三阶行列式**)

$$\begin{aligned} D=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ =&\ a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

当 $D\neq 0$ 时上面三元一次方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

由 (1.2) 式可以看出三阶行列式是 $3! = 6$ 项的和，每一项都是取自不同行不同列的三个元素先作乘积，然后放上适当的正负号. 任意项可记为 $\pm a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 是任意一个三级排列，前面的符号随 $j_1j_2j_3$ 这个排列而确定，当其为偶排列时取正号，当其为奇排列时取负号. 二阶行列式也有类似的规律. 现在将二、三阶行列式这种构造规律加以推广，定义 n 阶行列式.

定义 1 设 $\mathbf{F}$ 是一个数域，$a_{ij}\in\mathbf{F}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

为 n **阶行列式**. 其中 $\sum\limits_{j_1\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

这个定义说明 n 阶行列式恰为 $n!$ 项的和，每一项都是来自不同行不同列的 n 个元素先作乘积再放上适当的正负号构成，即当行标排列为 $12\cdots n$ 时，看列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$，如果 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列则取正号，如果 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列则取负号.

例 1 计算如下的**上三角行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 上述行列式按定义展开的一般项是

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{n-1j_{n-1}}a_{nj_n}.$$

容易看出，当 $j_n\neq n$ 时 $a_{nj_n}=0$. 故展开式中只剩下 $j_n=n$ 的项. 再看 j_{n-1}. 当 $j_{n-1}\neq n-1$ 时项

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{n-1}n)}a_{1j_1}\cdots a_{n-1j_{n-1}}a_{nn}$$

必为零. 如此继续，查 $j_{n-2},\cdots,j_1$ 可知 D 的展开式中只剩一项 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 故 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. ▮

如上 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn} 所占的对角线称为**主对角线**. 简称**对角线**. 上例说明上三角行列式等于对角线上元素的积. 同样，**下三角行列式**以及**对角行列式**(对角线以外元素都是零) 的值都等于对角线上元素的积.

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad (n\geq 2).$$

解 $D=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}\cdot n!=(-1)^{n-1}n!$. ▮

练　习　2

1. 在 5 阶行列式中 $a_{42}a_{13}a_{35}a_{54}a_{21}$ 及 $a_{25}a_{31}a_{14}a_{52}a_{43}$ 前面应带什么符号？

2. 写出 4 阶行列式中含因子 a_{32} 且带负号的项.

3. 一个行列式第一行与第一列以外的元素都是 0, 这个行列式一定为 0 吗？

4. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$　$(n \geq 2)$;

(6) $\begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$　$(n \geq 2)$;

(7) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & e & f \end{vmatrix}$; (8) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

§3 行列式的性质

单纯用行列式定义来计算行列式显然是比较麻烦的，本节研究行列式的一些基本性质，它将对行列式的计算和理论的进一步展开起重要作用.

性质 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这就是说：行列式中某一行的公因子可以提出去，或者说用数 k 乘行列式的某一行，其余行不动，所得行列式为原行列式的 k 倍.

证明 由行列式定义

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} = \text{右端}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

性质 2

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

这就是说：如果第 i 行所有元素都是两个数的和的形式，则这个行列式等于两个行列式的和，这两个行列式分别用两个加数之一作第 i 行，其余各行都与原来行列式的相同.

证明 由行列式定义

$$
\begin{aligned}
\text{左端} = & \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\
= & \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\
& + \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\
= & \text{右端}. \blacksquare
\end{aligned}
$$

容易看出，**这个性质可推广到一行中每个元素都是 m 项的和的情形**.

性质 3 如果行列式中有两行对应元素完全相同，则行列式为零.

证明 设行列式中第 i 行与第 k 行对应元素完全相同，即 $a_{ij} = a_{kj}$, $\forall j = 1, \cdots, n.$,

$$D = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

在 D 的展开式中项

$$\begin{aligned} & (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} \\ = \; & (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

和项

$$\begin{aligned} & (-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{nj_n} \\ = \; & (-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

成对出现且其和显然为零，故 $D = 0$. ▮

性质 4 如果行列式的某两行对应元素成比例，则这个行列式等于零.

证明 由性质 1 和 3 立即推出. ▮

性质 5 把行列式的某一行的元素乘以同一数 k 后加到另一行的对应元素上，其余行不动，则行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$