新三导丛书

XIN SANDAO CONGSHU

高等代数

（高教·北大·第四版）

导教·导学·导考

徐 仲◎等编

- 自主学习（课后习题详解）
- 课程过关（典型例题解析）
- 考研备考（考研真题分析）
- 教师备课（重点难点归纳）

西北工業大學出版社

新三导丛书

高等代数导教·导学·导考

(高教·北大·第四版)

徐　仲　陆　全　张凯院　编
吕全义　陈　芳　袁志杰

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书通过简明的理论介绍与方法总结，以及对大量有代表性的典型例题进行分析、求解和评注，揭示了高等代数的解题方法与技巧. 另外，书中给出了北大《高等代数》(第四版)教材中各章习题及补充题的解答；书末附录中提供了四套(四个学期)考试真题及解答. 编写本书的目的在于帮助读者把握教学、学习和考试要求，巩固和加深对基本概念的理解，增强运算能力，提高分析问题、解决问题和应试能力.

本书可作为大学生学习高等代数课程的指导书，可供报考硕士研究生的读者以及有关教师及科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数导教·导学·导考/徐仲等编. —西安：西北工业大学出版社，2014.8

(新三导丛书)

ISBN 978-7-5612-4068-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 182797 号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路 127 号　　邮编：710072

电　　话：(029)88493844　88491757

网　　址：http://www.nwpup.com

印 刷 者：兴平市博闻印务有限公司

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张：25.375

字　　数：802 千字

版　　次：2014 年 8 月第 3 版　　2014 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：49.00 元

第3版前言

本书的第3版是基于北京大学数学系前代数小组编写并由王萼芳和石生明修订的《高等代数》(第四版)编写的，相比第2版主要修订或新增了以下一些内容.

1. 更正了疏漏或不妥之处；

2. 给出了总习题的全部解答；

3. 更新了四套(四学期)高等代数考试真题及其相应的解答.

另外，在文字上做了少许修改，以使叙述更顺畅.

笔者对关心本书和对本书提出宝贵意见的同行及读者一并表示衷心的感谢.

编　者

2014年6月于西北工业大学

第 2 版前言

本书自 2004 年 3 月出版以来，受到广大读者的欢迎与好评，先后 5 次印刷，印数达 32 000 册. 此次修订再版，主要更正了第 1 版中的疏漏或不妥当之处，并按照高等代数课程的教学和考试、考研的要求，对部分内容进行了充实和完善，使其从知识结构到内容体系更加完备、实用.

衷心感谢广大读者对本书的关心，并欢迎继续提出宝贵意见，在此，深表谢忱.

编　者

2006 年 8 月于西北工业大学

第 1 版前言

高等代数是数学专业的一门主干基础课程，它对学生的抽象思维能力、逻辑推理能力的培养，以及后继课程的学习起着非常重要的作用. 但是，学生在学习这门课程时普遍感到抽象，抓不住概念的实质，解题更感困难，总结不出一般的思考方法. 为帮助学生消化课堂讲授的内容，加深对基础概念、基本理论的理解，提高解题的技能与技巧，我们根据长期从事高等代数教学的经验，编写了本书.

本书依照北京大学数学系几何与代数教研室编《高等代数》(第三版)的自然章编排，每章由以下六部分内容组成.

1. 内容提要——将相应章节的内容进行了简明扼要的叙述、归纳和总结，部分内容列表直观地进行了说明，特别是给出了一些主要计算方法的描述，以加深读者对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用.

2. 知识网络图——以框图的方式概括了本章的知识结构，体系完整，一目了然.

3. 重点、难点解读——对本章的知识重点与难点进行了总结归纳.

4. 典型例题解析——精选了高等代数中具有代表性的部分典型例题，通过对典型例题的解题分析，归纳出高等代数中一些问题的解决方法和技巧，读者可以举一反三、触类旁通. 对于那些需要了解更多典型题的读者，可参阅《理、工科线性代数常见题型解析及模拟题》(西北工业大学出版社，2002)一书，其中按专题对大量典型题进行了分类求解，并给出了全部习题的简要解答或分析过程.

5. 课后习题全解——给出了《高等代数》(北大・第三版)(高等教育出版社出版)各章习题及补充题的全部解答. 由于高等代数中解题方法的多样性，对于具有多种解法或答案的习题，一般只给出一种解法或答案.

6. 学习效果检测题及答案——根据教学内容精选了适量的检测题，并附有答案和部分提示. 读者可以通过这些测试题进一步掌握解题要领，巩固和加深对基本概念的理解，增强解题的能力，检验自己对所学知识的掌握程度.

为了帮助读者了解并适应课程考试，书末附录中提供了四套(四个学期)考试真题及解答.

本书由徐仲、陆全主编，参加编写的还有张凯院、吕全义、陈芳、袁志杰等.

由于水平所限，对于书中的不妥或疏漏之处，敬请读者指正.

编　者

2003 年 12 月于西北工业大学

目　　录

第1章 多 项 式

多项式理论是高等代数的重要内容之一.虽然它在整个高等代数课程中是一个相对独立而自成体系的部分,但却为高等代数所讲述的基本内容提供了理论依据.多项式理论中的一些重要定理和方法,在进一步学习数学理论和解决实际问题中常要用到.在中学阶段,对多项式的讨论主要着重于多项式的运算,很少涉及多项式的其他理论.因此,学习本章时,要正确地掌握概念,学会严谨地推导和计算.

一、内容提要

1. 数域

(1) 设 P 是至少含有两个数(或包含 0 与 1)的数集,如果 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍是 P 中的数,则称 P 为一个**数域**.

(2) **定理** 任何数域都包含有理数域 **Q**.在有理数域 **Q** 与实数域 **R** 之间存在无穷多个数域;在实数域 **R** 与复数域 **C** 之间不存在其他的数域.

2. 一元多项式的概念和运算

(1) 形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

称为数域 P 上文字 x 的**一元多项式**,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in P$,n 是非负整数.当$a_n\neq 0$时,称多项式 $f(x)$ 的**次数**为 n,记为 $\partial(f(x))=n$(或 $\deg(f(x))=n$),并称 a_nx^n 为 $f(x)$ 的**首项**,a_n 为 $f(x)$ 的**首项系数**.a_ix^i 称为 $f(x)$ 的 ***i* 次项**,a_i 称为 $f(x)$ 的 ***i* 次项系数**.当 $a_n=\cdots=a_1=0$,$a_0\neq 0$ 时,称多项式 $f(x)$ 为**零次多项式**,即 $\partial(f(x))=0$;当 $a_n=\cdots=a_1=a_0=0$ 时,称 $f(x)$ 为**零多项式**,零多项式是唯一不定义次数的多项式.

(2) 多项式可以进行加、减、乘运算,并有与整数相类似的性质.

多项式的次数有下列性质(设多项式 $f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$):

1) 当 $f(x)\pm g(x)\neq 0$ 时,有

$$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant \max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$$

2) $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$.

3) 所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体记为$P[x]$,称为数域 P 上的一元多项式环;数域 P 上一切次数小于 n 的多项式,再添上零多项式的全体,记为 $P[x]_n$.

3. 多项式的带余除法及整除性

(1) **定理**(带余除法) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,$g(x)\neq 0$,则存在唯一的多项式 $q(x),r(x)\in P[x]$,使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$.称上式中 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**商**,$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**余式**.

(2) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,如果存在多项式 $h(x)\in P[x]$,使

$$f(x)=h(x)g(x)$$

则称 $g(x)$ **整除** $f(x)$(或 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除),记为$g(x)\mid f(x)$.此时称$g(x)$为 $f(x)$ 的**因式**,$f(x)$ 为$g(x)$ 的**倍式**,商 $h(x)$ 也记为$\dfrac{f(x)}{g(x)}$,即 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.用 $g(x)\nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$,就是不存在 $h(x)$,使 $f(x)=h(x)g(x)$ 成立.

注 $P[x]$ 中的多项式不能作除法，而整除性不是多项式的运算，它是 $P[x]$ 中元素间的一种关系，即任给 $P[x]$ 中两个多项式 $f(x),g(x)$，可以判断 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 或 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.

(3) 如果 $g(x)\neq 0$，则 $g(x)\mid f(x)$ 的充分必要条件是用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式 $r(x)=0$.

(4) 零多项式只能整除零多项式；任一多项式一定能整除它自身；任一多项式都可以整除零多项式；零次多项式(非零常数) 能整除任一多项式.

(5) 多项式 $f(x)$ 与 $cf(x)\quad(c\neq 0)$ 有相同的因式和倍式.

(6) 两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变.

(7) 整除有以下性质：

1) 如果 $g(x)\mid f(x)$，则 $kg(x)\mid lf(x)$，其中 k 为非零常数，l 为常数.

2) 如果 $f(x)\mid g(x),g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$.

3) 如果 $f(x)\mid g_i(x)$，又 $u_i(x)$ 为任意多项式，$i=1,2,\cdots,m$，则

$$f(x)\mid [u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_m(x)g_m(x)]$$

4) 如果 $f(x)\mid g(x),g(x)\mid f(x)$，则 $f(x)=cg(x)$，其中 c 为非零常数.

(8) 带余除法的计算格式：

用多项式 $g(x)\neq 0$ 除多项式 $f(x)$ 所得的商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 可以通过如下两种格式进行：

1) 普通除法或长除法

$$\begin{array}{r|l} & \text{商 } q(x) \\ \cline{2-2} \text{除式 } g(x) & \text{被除式 } f(x) \\ & -)\ q(x)g(x) \\ \hline & \text{余式}\quad r(x) \end{array}$$

2) 竖式除法

$$\begin{array}{r|l|l} \text{除式 } g(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{商 } q(x) \\ & -)\ q(x)g(x) & \\ \cline{2-2} & \text{余式}\quad r(x) & \end{array} \qquad \text{或} \qquad \begin{array}{r|l|l} \text{商 } q(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{除式 } g(x) \\ & -)\ q(x)g(x) & \\ \cline{2-2} & \text{余式}\quad r(x) & \end{array}$$

注 1. 在利用以上两种格式进行计算时，要逐步利用除式 $g(x)$ 确定商 $q(x)$ 中由高次到低次的项来消去被除式的首项，以得到次数低于 $g(x)$ 的多项式或零多项式 $r(x)$.

2. 当利用辗转相除法求两个多项式的最大公因式时，用竖式除法较为方便.

(9) 综合除法：

设以 $g(x)=x-a$ 除 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 时，所得的商 $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 及余式 $r(x)=c_0$，则比较 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 两端同次幂的系数得

$$b_{n-1}=a_n,\ b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1},\cdots,b_0=a_1+ab_1,\ c_0=a_0+ab_0$$

这种计算可以排成以下格式进行：

$$\begin{array}{c|ccccc|c} a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & +)ab_{n-1} & +)ab_{n-2} & \cdots & +)ab_1 & +)ab_0 \\ \hline & b_{n-1}(=a_n) & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & c_0 \end{array}$$

用这种方法求商和余式(的系数) 称为**综合除法**.

注 1. 用综合除法进行计算时，被除式中所缺的项必须补上 0，否则计算就错了.

2. 当除式为 $ax+b\quad(a\neq 0)$ 时，因为

$$f(x)=(ax+b)q(x)+r(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)[aq(x)]+r(x)$$

所以，以 $ax+b$ 除 $f(x)$ 可以先以 $x-\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ 除 $f(x)$，得到商的 a 倍和余式，再以 a 除商的 a 倍得到商.

3. 当除式为一次式时，用综合除法比用带余除法来得方便. 特别是有些问题需要多次以一次多项式作为除式的运算，综合除法更显示出它的作用.

4. 多项式的最大公因式

(1) 设 $f(x)$、$g(x) \in P[x]$，如果 $d(x) \in P[x]$ 满足 $d(x) \mid f(x)$，$d(x) \mid g(x)$，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**公因式**；又如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式都能整除 $d(x)$，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**最大公因式**.

(2) 最大公因式有以下性质：

1) $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一定有最大公因式. 两个零多项式的最大公因式是零多项式，它是唯一确定的. 两个不全为零的多项式的最大公因式总是非零多项式，它们之间只有常数因子的差别；这时，最高次项系数为 1 的最大公因式是唯一确定的. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式记为 $(f(x), g(x))$.

2) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，$g(x) \neq 0$，如果有

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式一定是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式，而 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式也一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 特别地，有

$$(f(x),\ g(x)) = (g(x),\ r(x))$$

(这也是用辗转相除法求最大公因式的根据.)

3) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，如果 $d(x) \in P[x]$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，则必有 $u(x), v(x) \in P[x]$，使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

注 如果 $f(x), g(x), d(x) \in P[x]$，且有等式 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ 成立，但 $d(x)$ 不一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 如取 $f(x) = x$，$g(x) = x+1$，$u(x) = x+2$，$v(x) = x-1$，$d(x) = 2x^2 + 2x - 1$，则有 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$，但 $d(x)$ 显然不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

4) 最大公因式不因数域 P 的扩大而改变.

(3) 最大公因式可以用辗转相除法求得：

如果 $f(x), g(x) \in P[x]$，$g(x) \neq 0$，且有 $q_i(x), r_i(x) \in P[x]$，使

$$\begin{aligned}
f(x) &= q_1(x)g(x) + r_1(x) \\
g(x) &= q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \\
r_1(x) &= q_3(x)r_2(x) + r_3(x) \\
&\cdots\cdots \\
r_{s-2}(x) &= q_s(x)r_{s-1}(x) + r_s(x) \\
r_{s-1}(x) &= q_{s+1}(x)r_s(x) + 0
\end{aligned}$$

其中 $\partial(r_s(x)) \geqslant 0$，则 $r_s(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

5. 互素多项式

(1) 如果 $f(x), g(x) \in P[x]$ 的最大公因式为非零常数，或 $(f(x),\ g(x)) = 1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **互素**或**互质**.

(2) 互素的多项式具有以下性质：

1) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充分必要条件是，存在 $u(x), v(x) \in P[x]$ 使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

2) 如果 $(f(x),\ g(x)) = 1$ 且 $f(x) \mid [g(x)h(x)]$，则 $f(x) \mid h(x)$.

3) 如果 $(f(x),\ g(x)) = 1$ 且 $f(x) \mid h(x)$，$g(x) \mid h(x)$，则 $[f(x)g(x)] \mid h(x)$.

4) 如果 $(f(x),\ g(x)) = 1$，$(f(x),\ h(x)) = 1$，则 $(f(x),\ g(x)h(x)) = 1$.

6. 不可约多项式

(1) 如果数域 P 上次数大于零的多项式 $p(x)$ 不能表示成数域 P 上两个次数比它低的多项式的乘积，则称 $p(x)$ 是数域 P 上的**不可约多项式**.

注 1. 零多项式与零次多项式既不能说是可约的，也不能说是不可约的.

2. 多项式的可约性与多项式所在的数域密切相关，如 x^2-2 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约，而在实数域 $\mathbf{R}$ 上可约，即 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$；又如 x^2+2 在实数域 $\mathbf{R}$ 上不可约，而在复数域 $\mathbf{C}$ 上可约，即 $x^2+2=(x+\sqrt{2}\mathrm{i})(x-\sqrt{2}\mathrm{i})$. 一次多项式总是不可约的.

3. 互素多项式指的是 $P[x]$ 中两个多项式之间的一种关系，而不可约多项式是某个多项式本身的一种特性，这是完全不同的两个概念. 但在讨论问题时，互素多项式与不可约多项式的性质又是互相利用的，要学会灵活运用.

(2) 不可约多项式有下列性质：

1) 如果 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，则 $cp(x)$ 也是 P 上的不可约多项式，其中 c 是 P 中的非零数.

2) 设 $p(x)$ 是数域 P 上的一个不可约多项式，则对 P 上任一多项式 $f(x)$，必有 $(p(x),f(x))=1$ 或者 $p(x)\mid f(x)$.

3) 设 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，$f(x)$，$g(x)$ 是 P 上的任意两个多项式. 如果 $p(x)\mid f(x)\cdot g(x)$，则必有 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$.

4) 如果不可约多项式 $p(x)$ 整除 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$，其中 $s\geqslant 2$，则 $p(x)$ 至少可以整除这些多项式中的一个.

7. 因式分解唯一性定理

(1) 数域 P 上任一次数大于零的多项式 $f(x)$ 都可以分解成数域 P 上的一些不可约多项式的乘积. 如果

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

其中 $p_i(x)$ 与 $q_j(x)\quad(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,t)$ 都是 P 上的不可约多项式，则 $s=t$，并且适当调换 $q_j(x)$ 的次序后可使

$$q_i(x)=c_ip_i(x)\qquad(i=1,2,\cdots,s)$$

这里 c_i 是 P 中的不为零的数，即如果不计零次因式的差别，多项式 $f(x)$ 分解成不可约因式乘积的分解式是唯一的.

(2) 数域 P 上任一次数大于零的多项式 $f(x)$ 都有唯一的**标准分解式**

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

其中 a 为 $f(x)$ 的首项系数，$p_1(x),\cdots,p_s(x)$ 是 P 上首项系数为 1 的不可约多项式且两两互异，而 $r_1,r_2,\cdots,r_s$ 都是正整数.

(3) 如果已知多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的标准分解式，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式就是那些同时在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的标准分解式中出现的不可约多项式方幂的乘积，所带的方幂的指数等于它在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中所带的方幂指数中较小的一个.

8. 重因式

(1) 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in P[x]$，其中 x 是文字，称多项式

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

为 $f(x)$ 的**微商(或导数)**. 当 $k>1$ 时，规定 $f^{(k)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 $k-1$ 阶微商 $f^{(k-1)}(x)$ 的微商，即 $f^{(k)}(x)=(f^{(k-1)}(x))'$. 多项式的微商与数学分析中的微商有相同的运算性质.

(2) 设 $f(x)\in P[x]$，$p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，k 为非负整数. 如果 $p^k(x)\mid f(x)$ 且 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 ***k* 重因式**. 当 $k=1$ 时，称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的**单因式**；当 $k\geqslant 2$ 时，称 $p(x)$ 为 $f(x)$

的重因式.

注 由于重因式一定是不可约因式,所以 $f(x)$ 的重因式也和 $f(x)$ 所在的数域有关.

(3) 关于重因式有下列结论:

1) 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant 1)$ 重因式,则它是 $f'(x)$ 的$k-1$ 重因式.特别地,$f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式.

2) 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant 1)$ 重因式,则它是 $f(x)$, $f'(x)$, $\cdots$, $f^{(k-1)}(x)$ 的因式,但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

3) 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件是 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式,即 $p(x) \mid (f(x), f'(x))$.

注 由此可见 $f(x)$ 的重因式可以在$(f(x), f'(x))$的因式中去找.

4) 多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素,即$(f(x), f'(x))=1$.

5) 设多项式 $f(x)$ 的次数 $\partial(f(x))\geqslant 1$,则多项式$\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 是一个没有重因式的多项式,但它与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式.即设 $f(x)$ 有标准分解式

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

则

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

注 这是去掉多项式的因式重数的一个有效方法.

9. 多项式函数与多项式的根

(1) 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in P[x]$,其中 x 是文字,数 $\alpha\in P$,将 $f(x)$ 表示式中的 x 用 α 代替,得到 P 中的数

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$$

称为当 $x=\alpha$ 时 $f(x)$ 的**值**,记为 $f(\alpha)$,即 $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$.这样,对每个数 $\alpha\in P$,由多项式 $f(x)$ 确定 P 中唯一的数 $f(\alpha)$ 与之对应,称 $f(x)$ 为 P 上的一个**多项式函数**.

注 前面是用形式的观点来定义多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,其中 x 是一个文字(其本身的意义有待实际应用时再机动地取定),而系数 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 在数域 P 中变化.做多项式的加、减、乘等运算、研究多项式之间的整除关系及最大公因式等时都是这样理解的.当把一元多项式 $f(x)$ 中所含的文字 x 的意义看成一个可以在数域 P 中任意变动的变数符号时,则 $f(x)$ 就表示了一个随着 x 的变动而变化的多项式函数.此时系数$a_i\in P$ 相对地取定,这即是用函数的观点来定义多项式. 对于数域 P 上的一元多项式来说可以证明这两种观点是统一的,在证明过程中数域 P 包含无限多个元素这一性质是很起作用的.正因为对于数域 P 上的一元多项式来说这两种观点是统一的,才使得在讨论多项式时无论采用上述两种观点中的哪一种都是不会出问题的.

(2) 设 $f(x)\in P[x]$,数 $\alpha\in P$.如果 $f(\alpha)=0$,则称 α 为 $f(x)$ 的一个**根或零点**.如果 $x-\alpha$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式,则称 α 是 $f(x)$ 的 k **重根**;当 $k=1$ 时,称 α 是 $f(x)$ 的**单根**;当 $k>1$ 时,称 α 是 $f(x)$ 的**重根**.

(3) 多项式函数具有下列一些性质:

1) **余数定理** 设 $f(x)\in P[x]$,$\alpha\in P$,用一次多项式 $x-\alpha$ 去除 $f(x)$ 所得的余式是一个常数,这个常数等于函数值 $f(\alpha)$.

注 余数定理表明可以采用综合除法确定多项式 $f(x)$ 当 $x=\alpha$ 时的值 $f(\alpha)$ 或验证 α 是 $f(x)$ 的单根或重根.这比直接将 α 代入 $f(x)$ 计算要方便得多.

2) **因式定理** 设 $f(x)\in P[x]$,$\alpha\in P$. $(x-\alpha)\mid f(x)$ 的充分必要条件是 $f(\alpha)=0$.

3) $P[x]$ 中 $n(\geqslant 0)$ 次多项式在数域 P 中的根不可能多于 n 个(重根按重数计).

4) 设 $f(x)$,$g(x)\in P[x]$,且 $f(x)$,$g(x)$ 的次数都不超过 n.如果对 $n+1$ 个不同的数 α_1, α_2, $\cdots$, α_{n+1} 有 $f(\alpha_i)=g(\alpha_i)\quad(i=1,2,\cdots,n+1)$,则 $f(x)=g(x)$.

(4) 数域 P 上两个多项式相等的充分必要条件是它们所定义的数域 P 上的多项式函数相等.

注 $P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等是指它们有完全相同的项. 由 P 上的多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 所确定的函数相等是指对任意 $\alpha \in P$ 都有 $f(\alpha)=g(\alpha)$，这是两个不同的概念. 但因为数域 P 中有无穷多个数，所以由 4) 中的结论知，多项式的相等与多项式函数的相等实际上是一致的. 换句话说，数域 P 上的多项式既可以作为形式表达式来处理，也可以作为函数来处理.

10. 复数域上多项式的因式分解及根的性质

(1) **复系数多项式因式分解定理** 复系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式在复数域上都可唯一地分解成一次因式的乘积. 换句话说，复数域上任一次数大于 1 的多项式都是可约的.

(2) **标准分解式** 复系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_s)^{r_s}$$

其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是不同的复数，$r_1,r_2,\cdots,r_s$ 是正整数且 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$.

(3) **代数基本定理** 每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中至少有一根.

(4) n 次复系数多项式在复数域内恰有 n 个复根(重根按重数计算).

(5) **根与系数的关系(Vieta 定理)** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一元 n 次多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \qquad (a_n\neq 0)$$

的 n 个根，则根与多项式的系数之间有关系：

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \qquad\cdots\cdots \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n=(-1)^{n-1}\dfrac{a_1}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

11. 实数域上多项式的因式分解及根的性质

(1) **实系数多项式因式分解定理** 实系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积. 换句话说，实系数多项式 $f(x)$ 在实数域上不可约的充分必要条件是 $\partial(f(x))=1$ 或 $f(x)=ax^2+bx+c$ 且 $b^2-4ac<0$.

(2) **标准分解式** 实系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{k_t}$$

其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是互异实数. $p_i,q_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是互异的实数对，且满足 $p_i^2-4q_i<0\ (i=1,2,\cdots,t)$. $l_1,\cdots,l_s,k_1,\cdots,k_t$ 都是正整数，且

$$l_1+\cdots+l_s+2k_1+\cdots+2k_t=n$$

(3) 如果 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的一个非实的复数根，则它的共轭数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根，并且 α 与 $\bar{\alpha}$ 有同一重数. 由此可知，奇数次实系数多项式必有实根.

12. 有理数域上多项式的因式分解及根的性质

(1) 如果一个非零的整系数多项式 $f(x)$ 的系数互素，则称 $f(x)$ 是一个**本原多项式**.

(2) 设 $f(x)$ 是任一有理系数多项式，则存在有理数 r 及本原多项式 $h(x)$，使

$$f(x)=rh(x)$$

且这种表示法除了差一个正负号是唯一的. 也即,如果 $f(x)=rh(x)=sg(x)$,其中 $h(x),g(x)$ 都是本原多项式,则必有 $r=\pm s,h(x)=\pm g(x)$.

注 上面结果表明有理系数多项式可以转化为整系数多项式来研究.

(3) **高斯(Gauss) 引理** 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

(4) 如果一个非零整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积,则它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

(5) 设 $f(x)$ 是整系数多项式,$g(x)$ 为本原多项式,如果 $f(x)=g(x)h(x)$,其中 $h(x)$ 是有理系数多项式,则 $h(x)$ 一定是整系数多项式.

(6) **艾森斯坦(Eisenstein) 判别法** 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式,如果存在素数 p,使

$$① \ p\mid a_i(i=0,1,\cdots,n-1);\quad ② \ p\nmid a_n;\quad ③ \ p^2\nmid a_0$$

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

注 1. 艾森斯坦判别条件仅是一个判别整系数多项式不可约的充分条件. 也就是说,如果一个整系数多项式不满足艾森斯坦判别条件,则它既可能是可约的,也可能是不可约的.

2. 有些整系数多项式 $f(x)$ 不能直接用艾森斯坦判别法来判断其是否可约,此时可以考虑利用适当的文字代换 $x=ay+b$ $(a,b$ 为整数且 $a\neq 0)$,使 $f(ay+b)=g(y)$ 满足艾森斯坦判别条件,从而来判定原多项式 $f(x)$ 不可约(其理由见下面之(7)). 这是一个较好的方法,但未必总是奏效.

(7) 有理系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约的充分必要条件是,对任意有理数 $a\neq 0$ 和 b,多项式 $g(x)=f(ax+b)$ 在有理数域上不可约(见例 1.18 的证明).

(8) 在有理数域上存在任意次数的不可约多项式,如 x^n+2 在有理数域上不可约.

(9) 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整系数多项式,而 $\dfrac{r}{s}$ 是它的一个有理根,其中 r,s 互素,则必有 $s\mid a_n,r\mid a_0$. 特别地,如果 $f(x)$ 的首项系数 $a_n=1$,则 $f(x)$ 的有理根都是整数根,而且是 a_0 的因子.

注 1. 由以上结果可以求整系数多项式 $f(x)$ 的有理根,即先求出常数项 a_0 与首项系数 a_n 的所有因数,再以 a_0 的因数作分母及 a_n 的因数作分子写出所有可能的既约分数 $\dfrac{r}{s}$,逐个检验是否有 $f\left(\dfrac{r}{s}\right)=0$,若成立则 $\dfrac{r}{s}$ 是 $f(x)$ 的有理根. 最后一步可通过用 $x-\dfrac{r}{s}$ 去除 $f(x)$(用综合除法)的余数是否为零来检验.

2. 当有理系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约,且 $\partial(f(x))>1$ 时,$f(x)$ 没有有理根. 这里 $\partial(f(x))>1$ 是必须的,如 $f(x)=3x+2$ 有有理根 $-\dfrac{2}{3}$,但 $\partial(f(x))=1$ 且 $f(x)$ 不可约.

3. "有理系数多项式 $f(x)$ 没有有理根,则 $f(x)$ 在有理数域上不可约."这一命题当 $2\leqslant\partial(f(x))\leqslant 3$ 时是成立的,但当 $\partial(f(x))\geqslant 4$ 时,命题不再成立,如 $f(x)=(x^2+1)^2$ 没有有理根,但它在有理数域上可约.

13. 多元多项式的概念

(1) 设 P 是一个数域,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个文字,称形如

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\qquad(a\in P,\ k_1,k_2,\cdots,k_n \text{ 为非负整数})$$

的式子为数域 P 上的一个 n **元单项式**,称 a 为这个单项式的**系数**. 当 $a\neq 0$ 时,称此单项式中各文字的指数之和 $k_1+k_2+\cdots+k_n$ 为这个单项式的**次数**. 如果两个单项式中相同文字的指数对应相等,则称这两个单项式为**同类项**. 有限个单项式的和

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}a_{k_1,k_2,\cdots,k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

称为数域 P 上 n 个文字 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个多项式,简称 n **元多项式**. 当 $n\geqslant 2$ 时,n 元多项式统称为**多元多**