高职高专公共基础课规划教材

计算机数学基础

JISUANJI SHUXUE JICHU

高世贵◎主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专公共基础课规划教材

计算机数学基础

主　编　高世贵
副主编　王艳天　王玉华

机 械 工 业 出 版 社

本书面向计算机科学和电子等领域，密切结合专业需求，注重数学思想和方法在计算机科学和电子等领域中的应用。本书针对高职学生特点，语言表述通俗简洁，深入浅出，可读性强，便于学生对数学知识的理解和掌握。

全书共四章，主要内容包括：线性代数初步、集合与关系、图论和数理逻辑。“*”号部分为选学内容。本书每节配有一定的习题，每章配有复习题。书末附有习题参考答案。

本书可作为高职高专计算机应用和电子类各专业数学课程的教材或参考书，也可供继续教育和自学考试的读者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础/高世贵主编. —北京：机械工业出版社，2011.2

高职高专公共基础课规划教材

ISBN 978-7-111-33109-4

Ⅰ.①计… Ⅱ.①高… Ⅲ.①电子计算机—数学基础—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 009117 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：李大国 责任编辑：李大国

责任校对：陈立辉 封面设计：王伟光

责任印制：乔 宇

北京铭成印刷有限公司印刷

2011 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm · 10.5 印张 · 202 千字

0001—4000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-33109-4

定价：16.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销 售 一 部：(010)68326294

销 售 二 部：(010)88379649

读者服务部：(010)68993821

网络服务

门户网：http://www.cmpbook.com

教材网：http://www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

前　　言

《计算机数学基础》是普通高职教育计算机科学及电子类等各专业必修的一门公共基础课，是进一步学习后续课程的数学基础。

本书根据《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合高职高专教育数学课程教学特点，从“必需、够用为度”的原则出发，以对数学知识的需求为依据编写而成。在全书的构思和框架安排上，既有利于教师发掘、探讨和组织教学，又有利于学生的学习，好教易懂；该教材的编写，适合当前对数学教学要求高、难度大、课时少的教学状况。在确定教学目标和精心选择教学内容方面有独到之处，彰显出以数学为基础，以应用为目的的特点。

本书的编写在注重数学的基本概念和基本定理的同时，紧密结合计算机应用和电子类等专业的后续课程所必需的基本知识和基本概念。我们编写本书的出发点，是根据学生的基础知识状况和学习特点，尽可能地体现对学生智力的开发和培养，使学生能够真正掌握所学知识。

本书在编写思路上，着重以掌握数学基础知识为基本点，以数学知识在计算机方面的应用为主线来确定教材内容。通过对人才培养目标的调研与分析，优选出与计算机科学和电子等专业密切相关的数学问题，使学生通过学习数学知识，掌握解决问题的思想和方法，提高解决专业课中所涉及数学问题的能力，真正做到教师的“教”与学生的“学和用”结合起来，努力做到为后续课程的学习服务。

在本书内容设计与编写过程中，我们对以往的教学内容进行了认真的探讨，大胆的改革。教学内容的安排能够突出以基本概念和基本计算为主，突出用数学基本概念分析和解决问题的能力，体现数学基础知识的融会贯通，使学生了解数学中的抽象思想与计算机科学实践之间的内在联系，从而能够获得运用这些思想去解决实际问题的能力。根据普通高职学生的学习状况，本书淡化了数学理论的推导，比较直观地讲解基本概念、基本定理、运算技巧，化难为易；在通过例题点拨思路和方法方面，也进行了积极的探索，便于提高学生应用数学知识解决问题的能力。

该教材的编写彰显了如下四个方面的特点：

1. 数学内容难易适度，体现了数学教学的适用性和实用性。本着“必需”和“够用”的原则，淡化了数学理论的证明；在内容上注重基本概念的讲解和基本计算；突出培养计算能力和解决问题的能力。在教学设计上，直观地描述定

义及定理，针对高职学生特点，语言表述通俗易懂，深入浅出，可读性强。学生能够感觉数学知识不但可以学得懂，而且能够用得上，从而解决了数学为专业服务特色不明显的问题。

2. 体现数学思想为核心，进行数学实验的教学。本书蕴含丰富的数学思想，重视数学思想的渗透与应用。例如：线性分析思想、定量定性分析、逻辑推理思想等，有利于提升学生的数学应用能力。线性代数初步一章利用 MATLAB7.0 数学软件进行教学，把数学实验作为计算的工具，利用数学软件将手工计算转化为计算机计算，降低了数学计算的难度，提高了学生学习的效率和计算的准确性。

3. 该教材从知识的引入，到思想方法的形成，再到其具体应用都体现了应用数学这条主线。密切结合计算机科学和电子等专业需求的技术，注重数学思想和方法在计算机科学领域中的应用，能够很好地启发学生学习的兴趣，发挥学生学习的积极性和主动性。

4. 教材适用面广，选学内容适宜。该教材不仅可以作为普通高等职业技术教育的教材，而且从教学内容上，还可以满足各类职业技术院校不同专业的教学要求。教师在授课时还可以根据学生实际水平灵活选用教材内容. 在通过例题点拨解题思路和方法方面，也进行了积极探索。书中带有“*”部分为选学内容，教师在授课时可根据学生实际水平和教学要求选用。

本书由高世贵(辽宁装备制造职业技术学院)任主编，王艳天(辽阳市职业技术学院)、王玉华(辽宁装备制造职业技术学院)任副主编，吴应斌、马少帅、王中丹(辽宁广播电视大学)、高畅宏(东北财经大学)参加了本书的编写工作。

由于编者水平所限和时间仓促，不妥之处在所难免，恳请使用本书的广大教师和读者批评指正，我们将不胜感激。

编　者

目　　录

第一章 线性代数初步

线性代数是研究线性关系的最基本的数学工具. 矩阵的概念与运算是线性方程组中最重要也是最基础的内容，在自然科学及工程技术等诸多领域有着广泛的应用. 本章将介绍矩阵的一些基本概念和运算，讨论线性方程组的解法，最后介绍 MATLAB 应用数学软件在矩阵方面的应用.

第一节 矩阵的概念及运算

一、矩阵的概念

为了弄清楚什么是矩阵，先看两个实际例子.

例 1 某汽车厂生产三种车型：小轿车、大客车和货车. 该厂每月生产此三种车型的原材料和劳动力消耗量见表 1-1(表中各量均省略单位).

表 1-1

车型 / 消耗量 / 品名	小轿车	大客车	货车
原材料	230	160	100
劳动力	70	90	110

它可以用数表简明地表示为

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \left(\begin{array}{ccc} 230 & 160 & 100 \\ 70 & 90 & 110 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{原材料} \\ \text{劳动力} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{小轿车} & \text{大客车} & \text{货车} \end{array} & \end{array}$$

例 2 线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

的未知数的系数和右端常数按原位置可以排列成这样的数表

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

从求解的角度来看，线性方程组的特性完全由该数表决定.

一般来说，对于不同的实际问题会有不同的矩形数表，数学上把这种数表叫做矩阵.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成的 m 行、n 列的矩形数表，称为 **m 行 n 列矩阵**，简称 **$m\times n$ 矩阵**. 矩阵用大写黑体拉丁字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这 $m\times n$ 个数叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，a_{ij} 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可简记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{A}=(a_{ij}) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{A}_{m\times n}$$

当 $m=1$ 时，矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{11}a_{12}\cdots a_{1n})$$

叫做**行矩阵**.

当 $n=1$ 时，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

叫做**列矩阵**.

元素都是零的矩阵叫做**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

当 $m=n$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 叫做 **n 阶方阵**. 一个 n 阶方阵从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**.

主对角线的一侧所有元素都为零的方阵叫做**三角矩阵**. 三角矩阵分为上三角矩阵与下三角矩阵，即

$$\boldsymbol{L}_{上}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{L}_{下}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

除了主对角线上的元素外，其余的元素都为零的 n 阶方阵叫做**对角矩阵**. 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

主对角线上元素都为 1 的对角方阵叫做单位矩阵，记作 $\boldsymbol{I}$. 即

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行依次换成列所得到的矩阵，叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例如，矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 230 & 160 & 100 \\ 70 & 90 & 110 \end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 230 & 70 \\ 160 & 90 \\ 100 & 110 \end{pmatrix}$$

显然$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$.

定义 2 如果 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 都是 m 行 n 列矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij} = b_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

例 3 已知 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 4 & y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & z \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，求 x，y，z.

解 因为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，所以 $x = 5$，$y = 3$，$z = 3$.

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法和减法

定义 3 两个 m 行 n 列矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})$，对应位置元素相加(减)得到的 m 行 n 列矩阵，叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和(差)，记为 $\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}$. 即

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = (a_{ij})_{m \times n} \pm (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}$$

例 4 设有矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&2&0\\2&1&5&7\\0&6&4&8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&7&2&3\\2&0&4&3\\2&1&0&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&2&0\\2&1&5&7\\0&6&4&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&7&2&3\\2&0&4&3\\2&1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&10&4&3\\4&1&9&10\\2&7&4&11\end{pmatrix}$

例 5 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&5&1\\1&2&-3\\9&-5&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&x_1&x_2\\x_1&2&x_3\\x_2&x_3&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&y_1&y_2\\-y_1&0&y_3\\-y_2&-y_3&0\end{pmatrix}$，并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$.

解 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，得

$$\begin{pmatrix}1&5&1\\1&2&-3\\9&-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x_1&x_2\\x_1&2&x_3\\x_2&x_3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&y_1&y_2\\-y_1&0&y_3\\-y_2&-y_3&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&x_1+y_1&x_2+y_2\\x_1-y_1&2&x_3+y_3\\x_2-y_2&x_3-y_3&3\end{pmatrix}$$

根据矩阵相等的定义，有

$$\begin{cases}x_1+y_1=5\\x_1-y_1=1\end{cases},\quad\begin{cases}x_2+y_2=1\\x_2-y_2=9\end{cases},\quad\begin{cases}x_3+y_3=-3\\x_3-y_3=-5\end{cases}$$

解得 $x_1=3$，$y_1=2$，$x_2=5$，$y_2=-4$，$x_3=-4$，$y_3=1$.

故所求矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&2&-4\\5&-4&3\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&2&-4\\-2&0&1\\4&-1&0\end{pmatrix}$$

容易验证，矩阵的加法满足以下规律:

（1）交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

（2）结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

例 6 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&6&4\\-4&2&8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-2&1&4\\2&-3&7\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$.

解 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&6&4\\-4&2&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&1&4\\2&-3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&2\\-4&6&1\end{pmatrix}$

2. 矩阵与数相乘

定义 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$ 为任意常数，用数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素

所得到的矩阵

$$k\cdot A=k\cdot(a_{ij})_{m\times n}=(k\cdot a_{ij})_{m\times n}$$
$$=\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}&\cdots&ka_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{m1}&ka_{m2}&\cdots&ka_{mn}\end{pmatrix}$$

叫做数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积.

矩阵与数相乘满足以下规律：

（1）分配律 $(k_1+k_2)\boldsymbol{A}=k_1\boldsymbol{A}+k_2\boldsymbol{A}$；

$$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}.$$

（2）结合律 $k_1(k_2\boldsymbol{A})=(k_1k_2)\boldsymbol{A}$.

例 7 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&2&-1\end{pmatrix}$，求 $2\left(\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\right)$.

解 $2\left(\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\right)=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

$$=\begin{pmatrix}6&2&-4\\6&4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&2&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}6&1&-2\\9&6&1\end{pmatrix}$$

例 8 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-1&3\\9&7&5&1\\8&6&4&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&-2&5&7\\7&9&1&5\\6&-1&2&3\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-4&6&4\\-2&2&-4&4\\-2&-7&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&3&2\\-1&1&-2&2\\-1&-\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

3. 矩阵与矩阵相乘

定义 5 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则由元素

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}\cdot b_{kj}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

所构成的 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

从定义 5 可以看出，只有矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与

$\boldsymbol{B}$ 才能相乘；$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 中第 i 行第 j 列的元素，等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积的和；矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数相同，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数相同，即

$$\boldsymbol{A}_{m\times s}\cdot\boldsymbol{B}_{s\times n}=\boldsymbol{C}_{m\times n}$$

例 9 某校计划明后两年建教学楼和宿舍楼. 建筑面积及材料平均耗用量分别见表 1-2、表 1-3.

表 1-2

	教学楼面积/$100\mathrm{m}^2$	宿舍楼面积/$100\mathrm{m}^2$
明年	20	10
后年	30	20

表 1-3

	钢材用量/($\mathrm{t}/100\mathrm{m}^2$)	水泥用量/($\mathrm{t}/100\mathrm{m}^2$)	木材用量/($\mathrm{m}^3/100\mathrm{m}^2$)
教学楼	2	18	4
宿舍楼	1.5	15	5

因此，明后两年三种建筑材料的总耗用量见表 1-4.

表 1-4

	钢材总消耗量/t	水泥总消耗量/t	木材总消耗量/m^3
明年	$20\times2+10\times1.5=55$	$20\times18+10\times15=510$	$20\times4+10\times5=130$
后年	$30\times2+20\times1.5=90$	$30\times18+20\times15=840$	$30\times4+20\times5=220$

上述三个数表用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}20&10\\30&20\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&18&4\\1.5&15&5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}20\times2+10\times1.5&20\times18+10\times15&20\times4+10\times5\\30\times2+20\times1.5&30\times18+20\times15&30\times4+20\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}55&510&130\\90&840&220\end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 与矩阵 $\boldsymbol{C}$ 之间的关系，可以表达成下列形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}20&10\\30&20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&18&4\\1.5&15&5\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}20\times2+10\times1.5&20\times18+10\times15&20\times4+10\times5\\30\times2+20\times1.5&30\times18+20\times15&30\times4+20\times5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

这里矩阵 $\boldsymbol{C}$ 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积.

例 10 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0 & 5\\ -1 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & 7 & 5\\ 4 & -3 & -2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0 & 5\\ -1 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & 7 & 5\\ 4 & -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27 & -21 & 1\\ 3 & 9 & -7\end{pmatrix}$

因为 $\boldsymbol{BA}$ 不能相乘，所以没有意义.

例 11 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AI}$ 和 $\boldsymbol{IA}$.

解

$$\boldsymbol{AI}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{IA}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$$

由例 11 可知，在矩阵乘法中，单位矩阵所起的作用与普通代数中 1 的作用类似，即 $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$.

例 12 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

由例 12 可知，虽然 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都存在，但是 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，即矩阵的乘法不满足交换律，且由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，并不一定能得到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

矩阵乘法满足以下规律：

（1）结合律　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

（2）分配律　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

习题 1-1

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&2&1\\4&3&2\end{pmatrix}$，求 $3A-2A^{T}$，$2A+3A^{T}$.

2. $A=\begin{pmatrix}3&7&4\\-3&4&4\\-2&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&x_1&x_2\\x_1&4&x_3\\x_2&x_3&3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0&y_1&y_2\\-y_1&0&y_3\\-y_2&-y_3&0\end{pmatrix}$，

且 $A=B+C$，求 B 和 C 中的未知数 x_1，x_2，x_3 和 y_1，y_2，y_3.

3. 已知 $\begin{cases}3A+2B=C\\A-2B=D\end{cases}$，其中 $C=\begin{pmatrix}7&10&-2\\1&-5&-10\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}5&-2&-6\\-5&-15&-14\end{pmatrix}$，

求矩阵 A 和 B.

4. 计算

（1）$(2\quad 4\quad -5)\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-5&4\\3&6\end{pmatrix}$；

（3）$(x\quad y)\begin{pmatrix}9&-12\\-12&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$；　（4）$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}(1\quad -2\quad 0)$；

（5）$\begin{pmatrix}2&1&4&0\\1&-1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\\4&0&-1\end{pmatrix}$；

（6）$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

5. 已知 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 $AB-BA$.

6. 对于下列各组矩阵 A 和 B，求 AB 和 BA：

（1）$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-2&7\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

第二节　矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是矩阵变换的一种重要方法，是求解线性方程组的重要工具，也是求逆矩阵的重要方法.

一、矩阵的初等变换

1. 矩阵的初等变换的定义

定义 1　对矩阵的行(或列)所作的以下三种变换称为矩阵的初等变换：

(1) 对换变换：互换矩阵的两行，常用(ⓘ,ⓙ)表示第 i 行与第 j 行互换；

(2) 倍乘变换：用一个非零数乘矩阵的某一行，常用ⓘ k 表示用数 k 乘第 i 行；

(3) 倍加变换：把矩阵的某一行乘以数 k 后加到另一行上去，常用ⓘ + ⓙ k 表示第 j 行乘以 k 后加到第 i 行上去.

例如，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(①,②)} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{①+②\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{I}.$$

由于矩阵的初等行变换改变了矩阵的元素，所以初等行变换前后的矩阵是不相等的. 因此，在进行矩阵的初等行变换过程中，矩阵之间用“→”连接，记作 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$，而不能用等号连接.

2. 行阶梯形矩阵和行简化阶梯形矩阵

定义 2　满足以下条件的矩阵叫做**行阶梯形矩阵**，简称**阶梯形矩阵**：

(1) 矩阵的零行(若存在)在矩阵的最下方；

(2) 各个非零行的第一个非零元素的列标随着行标的增大而严格增大.

例如，矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 和矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，都是行阶梯形矩阵.

矩阵 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$，都不是行阶梯形矩阵.

定义 3　如果行阶梯形矩阵还满足以下条件，则叫做**行简化阶梯形矩阵**：

（1）各非零行的第一个非零元素都是1；

（2）所有第一个非零元素所在列的其余元素都是0.

例如，矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$和矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&2&0&-1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$，都是行简化阶梯形矩阵.

定理1 任何矩阵经过一系列初等行变换可化成阶梯形矩阵，再经过一系列初等行变换可化成行简化阶梯形矩阵.

例1 将矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\2&-1&1&1\\3&1&0&-1\end{pmatrix}$化为行简化阶梯形矩阵.

解
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\2&-1&1&1\\3&1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[③+①\times(-3)]{②+①\times(-2)}\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&-5&3&5\\0&-5&3&5\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{③+②\times(-1)}\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&-5&3&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{②\times\left(-\frac{1}{5}\right)}\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&1&-\dfrac{3}{5}&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{①+②\times(-2)}\begin{pmatrix}1&0&\dfrac{1}{5}&0\\0&1&-\dfrac{3}{5}&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

注意：矩阵的行简化阶梯形矩阵是唯一的，而矩阵的阶梯形矩阵并不是唯一的，但是一个矩阵的阶梯形矩阵中非零行的个数是唯一的.

3. 矩阵的秩

定义4 矩阵$\boldsymbol{A}$的阶梯形矩阵中非零行的个数，叫做**矩阵$\boldsymbol{A}$的秩**，记作$r(\boldsymbol{A})$.

由定义4可知，求矩阵$\boldsymbol{A}$的秩，只需把它化为阶梯形矩阵，阶梯形矩阵中非零行的个数，就是矩阵$\boldsymbol{A}$的秩.

例2 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&2&0\\1&1&-4&2\\0&-2&3&1\end{pmatrix}$，求$r(\boldsymbol{A})$与$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

解

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&2&0\\1&1&-4&2\\0&-2&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(①,②)}\begin{pmatrix}1&1&-4&2\\3&-1&2&0\\0&-2&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{②+①\times(-3)}\begin{pmatrix}1&1&-4&2\\0&-4&14&-6\\0&-2&3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(②,③)}\begin{pmatrix}1&1&-4&2\\0&-2&3&1\\0&-4&14&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{③+②\times(-2)}\begin{pmatrix}1&1&-4&2\\0&-2&3&1\\0&0&8&-8\end{pmatrix}$$

因此，$r(A)=3$.

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&1&-2\\2&-4&3\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[(②,①)]{②\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&0\\2&-4&3\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[③+①\times(-2)]{②+①\times(-3)}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&4&-6\\0&-2&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{④+③\times1}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&4&-6\\0&-2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{③+②\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&4&-6\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此，$r(A^{\mathrm{T}})=r(A)=3$.

事实上，对于任意矩阵 A 都有 $r(A^{\mathrm{T}})=r(A)$.

定义 5 设矩阵 A 是一个 n 阶方阵，如果 $r(A)=n$，那么称矩阵 A 为**满秩矩阵**(**或非奇异的矩阵**).

例如，$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&4\\0&0&3\end{pmatrix}$，$I_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$，都是满秩矩阵.

二、用初等变换求逆矩阵

1. 逆矩阵的概念

对于代数方程 $ax=b(a\neq0)$，它的解为 $x=\frac{b}{a}=a^{-1}b$. 那么，形式上与 $ax=b$ 相类似的矩阵方程 $AX=B$，是否可以写成 $X=A^{-1}B$ 呢？如果可以，A^{-1} 的含义是什么？为此，我们给出有关逆矩阵的概念.

定义 6 对于 n 阶方阵 A，如果存在 n 阶方阵 B，使得

$$AB=BA=I$$

则方阵 B 叫做方阵 A 的**逆矩阵**(简称**逆阵**)，记作 $B=A^{-1}$，即

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$