普通高等教育“十二五”规划教材

# 线性代数

王秀丽 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

# 线性代数

王秀丽　主编

科学出版社
北　京

## 内 容 简 介

《线性代数》是非数学类各专业的数学基础课程，根据教学大纲要求，本书内容共分为6章，包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、二次型、线性空间与线性变换. 对一般的非数学专业，第6章作为选学内容，配备了相应的数学实验内容. 本书对较为烦琐的定理证明用星号标出，教师可根据学时情况和学生接受程度酌情考虑取舍. 书中配有各层次难易不等的例题及习题，书后备有习题参考答案. 特别是习题中加进了近几年硕士研究生入学考试题中线性代数的部分内容，便于学生掌握所学内容的考研方向、有针对性的学习本书内容.

本书可作为普通高等学校非数学专业教材，也可作为理工科、管理类学生硕士研究生入学考试数学复习参考资料.

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数/王秀丽主编. —北京：科学出版社，2014

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-040707-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第106729号

责任编辑：李淑丽 李香叶/责任校对：刘小梅

责任印制：阎 磊/封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年6月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2014年6月第一次印刷 印张：13 1/2

字数：354 000

**定价：26.00元**

（如有印装质量问题，我社负责调换）

# 前　言

《线性代数》作为高等院校理工科、农科、经济管理等各专业的一门重要的公共课，能够培养学生的逻辑推理能力、空间想象能力、抽象思维能力，并为学生所学专业提供所需的基础知识和基本技能，为学生学习后继专业课程和进一步获取知识提供必要的数学基础.

线性代数属于近代数学范畴，是由解线性方程组而发展起来的一门学科，主要讨论有限维空间的线性理论. 由于线性问题广泛存在于自然科学和技术科学的各个领域，且某些非线性问题在一定条件下也可转化为线性问题来处理，它的思想、方法和结论在科学技术、工程技术、管理科学等众多领域都有着广泛的应用. 现代科学技术和管理科学，尤其是计算机技术和网络技术的飞速发展，都需要以此为基础；而它的集成化思维方式，对训练和提高学生的计算能力、抽象思维、逻辑推理、数学表达等也都非常有益. 它的基本概念有行列式、向量、矩阵、特征值、线性空间等. 使用它的基本概念，许多学科和数学的许多分支中的问题有了几何意义，或者几何意义更加丰富、凸显，不少复杂的问题可以用简洁的形式来表述. 现在线性代数的重要性比过去任何时候都要突出，它在数学课程中的角色已经上升到了可以与微积分相提并论. 线性代数的这种发展首先是人们所研究问题的规模越来越大，越来越复杂，牵涉的变量成百上千，这样复杂的问题，目前只可能把变量之间的关系化为线性的才有可能求解；其次是计算机技术的飞速发展给线性代数的研究和应用提供了前所未有的空间和机遇. 例如，哈佛大学教授列昂惕夫（Wassily Leontief）把美国经济分解为 500 个部门，他对每个部门列出一个描述该部门的产出如何分配给其他经济部门的线性方程；由于当时的计算机还不能处理 500 个未知数的 500 个方程的方程组，列昂惕夫只好把问题简化为 42 个未知数的 42 个方程的方程组；当时是 1949 年，列昂惕夫编写计算机程序用了几个月时间，而当时最大的计算机也运算了 56 个小时，才得到最后的答案. 他打开了研究经济数学模型的新时代的大门，并于 1973 年获得了诺贝尔经济学奖. 如今，有了高性能的计算机，处理这些问题已经是轻而易举的事情了. 不仅如此，线性代数的应用已经渗透到了社会生活的各个领域.

本书编者结合多年来从事线性代数课程教学和研究的体会，参考了国内外许多同类教材，编成此书. 实验内容由宁静老师提供部分资料，同行专家温永仙、尤添革、李德新等对本书的编写曾提出过许多宝贵的意见和建议，在此谨表谢意.

由于编者水平有限，内容难免有不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2014 年 2 月

# 目　　录

# 第1章　行　列　式

解方程是代数中一个基本的问题.在中学代数和解析几何里,我们用消元法解过一元、二元、三元以及四元一次方程组.但是许多从理论和实际问题中导出的线性方程组常常含有相当多的未知量,并且未知量的个数与方程的个数也不一定相等.本章和第 4 章是讨论一般的多元一次方程组,即线性方程组.为此,首先介绍在讨论线性方程组时要用到的一个有力工具——行列式.

## 1.1　二阶与三阶行列式

用消元法解二元一次方程组和三元一次方程组.

先看两个简单的例子.

解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

$a_{ij}$ 称为 $x_j$ 的系数,它有两个下脚标(指标).前一个脚标 $i$ 表示它在第 $i$ 个方程,后一个脚标 $j$ 表示它是第 $j$ 个未知量的系数,如 $a_{21}$,即是第二个方程中第一个未知量的系数.将上述两个式子两端分别乘以 $a_{22}$ 及 $a_{12}$,相减消去方程组(1.1.1)中 $x_2$,得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$.

同样地,消去 $x_1$,得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$.

因此,当 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

为了便于记忆,我们引进记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

称为二阶行列式,它含有两行、两列.二阶行列式是这样两个项的代数和:一个是在从左上角到右下角的对角线(主对角线)上两个数的乘积,取正号;另一个是从右上角到左下角的对角线(次对角线)上两个数的乘积,取负号.譬如,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2\times 5-(-3)\times 1=13$$

根据以上记法 $b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,$a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

如果记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,则方程组(1.1.1)的解就可以写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}$$

像这样用行列式来表示解，规律性强，容易记忆.

**例 1** 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-3y=-2 \end{cases}$$

**解** 这时 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7, D_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-19, D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-11$，因此，所给方程组的唯一解是

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-19}{-7}=\frac{19}{7},\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}.$$

我们再来解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

看看如何用三阶行列式表示它的解.

同上面一样，用消元法，先从前面两式消去 $x_3$，再从后两式消去 $x_3$，得到只含 $x_1, x_2$ 的二元线性方程组，再消去 $x_2$，就得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\&=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3\end{aligned}$$

当 $x_1$ 系数不为零，即 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}\cdot a_{31}\neq 0$ 时，得

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3)$$

同理，可得

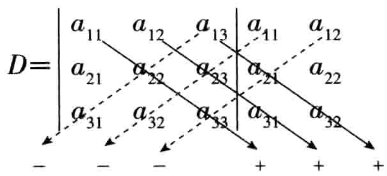
$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}b_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31})$$

这样的式子很烦琐，为了便于记忆，我们引进三阶行列式记号

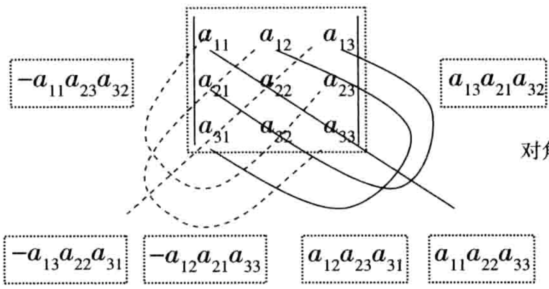
$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

三阶行列式，它含有三行、三列，共有 $3^2=9$ 个数. 三阶行列式的值为如式(1.1.3)所示的六个项的代数和. 下面的方法可以帮助记忆三阶行列式值的计算.




沙路法

或




对角线法

实线上三个数的乘积构成的三项取正号，虚线上三个数乘积构成的三项都取负号. 于是，上面三元线性方程组的解 $x_1,x_2,x_3$ 就可以表示成 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$，其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

这种解结构与前面二阶行列式的解的结构类似.

**例 2**　解线性方程组$\begin{cases} 2x-y+z=0, \\ 3x+2y-5z=1, \\ x+3y-2z=4. \end{cases}$

**解**　此时

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &=2\times2\times(-2)+(-1)\times(-5)\times1+1\times3\times3-1\times2\times1-(-5)\times3\times2-(-2)\times3 \\ &\quad\times(-1) \\ &=28 \end{aligned}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,\quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21$$

所以 $x=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28}, y=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28}, z=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$.

从上面二阶、三阶行列式的记法中可以看出行列式是一个数，它们都是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同行且不同列的数构成（二阶行列式每一乘积项有 2 个因子，三阶行列式每一乘积项有 3 个因子）；并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成（二阶行列式有 2！项乘积，三阶行列式有 3！项乘积）；此外，每一项乘积都带有符号，这个符号的确定需要用到逆序数.

### 习 题 1.1

1. 计算下列二阶、三阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$； (5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

2. 证明：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

## 1.2 排列 逆序

我们已经学过，由 $1,2,\cdots,n$ 这 $n$ 个数组成的一个有序数组称为一个 $n$ 级（阶）排列，并且这样的 $n$ 个数共可以组成 $P_n^n=n!$ 个不同的排列.

在数学中把考察的对象，例如，上面的 $1,2,\cdots,n$ 称为元素. 对于 $n$ 个不同的元素，规定各个元素之间有一个标准次序，特别地，我们把 $1,2,\cdots,n$ 这 $n$ 个自然数规定由小到大的标准次序称为自然排列（一般也称为标准排列）.

**定义 1** 在一个 $n$ 阶排列中，如果一个较大的数排在一个较小的数的前面，则称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的总和称为这个排列的**逆序数**.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如，由数字 1,2,3,4,5 共可以组成 $P_5^5=5!=120$ 种不同的排列，45321 和 23514 是其中的两个排列，在 45321 中 43,42,41,53,52,51,32,31,21 是逆序，逆序数为 9，为奇排列，23514 的逆序为 21,31,51,54，为偶排列. 显然，此时 12345 也为其中的一个排列，它是自然排列，其逆序数为 0，也算作偶排列.

我们把一个排列的逆序数记为 $\tau$，如 $\tau(45321)=9$.

把一个排列中某两个数的位置交换，而其余的数不动，就得到另一个排列. 这样的一个变换称为一个**对换**. 例如，经过 1,2 对换，排列 2431 就变成了 1432，排列 2134 就变成了 1234. 显然，如果连续施行两次相同的对换，那么，排列就还原了.

**定理 1**　对换改变排列的奇偶性.

这就是说,经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.

**证**　(Ⅰ)先看一个特殊的情形,对换的两个数在排列中是相邻的情形.排列

$$\cdots a,b\cdots \text{经过 } a,b \text{ 对换变成} \cdots b,a\cdots$$

这里"…"表示那些不动的数,显然,它们的逆序数经过 $a,b$ 对换后并不改变,而 $a,b$ 两元素的逆序数改变为:当 $a<b$ 时,经对换后,$a$ 的逆序数增加 1,而 $b$ 的逆序数不变;当 $a>b$,经对换后,$a$ 的逆序数不变而 $b$ 的逆序数减小 1.所以不论增加 1 还是减少 1,其逆序数的奇偶性都改变.

(Ⅱ)再看一般情形

设排列为

$$\cdots,a,i_1,i_2,\cdots,i_s,b,\cdots \tag{1.2.1}$$

经 $a,b$ 对换后,排列(1.2.1)变为

$$\cdots,b,i_1,i_2,\cdots,i_s,a,\cdots \tag{1.2.2}$$

不难看出,这样一个对换可以经过一系列的相邻对换来实现,从式(1.2.1)出发,把 $b$ 与 $i_s$ 对换,再与 $i_{s-1}$ 对换,…,即把 $b$ 经 $s+1$ 次相邻位置的对换,式(1.2.1)变为

$$\cdots,b,a,i_1,\cdots i_s,\cdots \tag{1.2.3}$$

再把式(1.2.3)中 $a$ 一位一位向右 $s$ 次相邻对换,即得式(1.2.2),这样,从式(1.2.1)变到式(1.2.2)共经过了 $2s+1$ 次相邻对换,而 $2s+1$ 为奇数,故这样对换的最终结果还是改变奇偶性.定理得证.

**例**　求排列 24351 的逆序数.

**解**　排列 24351 中,1 的逆序数是 4 个;2 的逆序数是 0 个;3 的逆序数是 1 个;4 的逆序数是 0 个;5 的逆序数是 0 个,所以排列 24351 的逆序数是 $\tau(24351)=5$,为奇排列.

**推论 1**　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

**证**　由定理 1 知对换次数就是排列奇偶数的变化次数,而标准排列为偶排列(逆序数为 0),因此知,推论成立.

**推论 2**　由 $1,2,\cdots,n$ 这 $n$ 个数构成的所有排列中(共 $n!$ 个),奇偶排列各占一半,即各为$\frac{n!}{2}$个.

证明留作练习,请读者自证.

## 习　题　1.2

1. 按照顺序从小到大为标准顺序,求下列各排列的逆序数,并决定其奇偶性.

(1)4,1,3,2,5;

(2)2,4,5,3,1,8,7,6;

(3)$n,n-1,n-2,\cdots,3,2,1$;

(4) 6,2,7,4,5,3,1;

(5) $(n-1),(n-2),\cdots,3,2,1,n$.

2. 证明：由 $1,2,\cdots,n$ 这 $n$ 个数构成的 $n!$ 个排列中，奇偶排列各半.

*3. 假设 $n$ 个数码的排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数为 $k$，求排列 $i_n,i_{n-1},\cdots,i_2,i_1$ 的逆序数.

## 1.3　$n$ 阶行列式

**定义 1**　设有 $n^2$ 个数，排成 $n$ 行 $n$ 列

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行且不同列的 $n$ 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^\tau$，得到形如 $(-1)^\tau a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的项，其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列，$\tau$ 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如 $(-1)^\tau a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的项共有 $n!$ 个，所有这 $n!$ 项的代数和 $\sum(-1)^\tau a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为 $n$ 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^\tau a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

简记为 $D=\Delta(a_{ij})$（或记为 $D=\det(a_{ij})$）. 数 $a_{ij}$ 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中的元素，或简称为元. 这里，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 所有 $n$ 级排列求和.

当 $n=1$ 时，规定 $|a|=a$. 当 $n=2,3$ 时，按此定义与在 1.1 节中用对角线法则定义的二、三阶行列式，显然是一致的.

**注**　四阶或四阶以上的行列式值的计算不能像二、三阶行列式那样直接用对角线法则计算.

**例 1**　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**解**　这是一个四阶行列式. 计算的结果应该为 $4!=24$ 项的代数和，但是这个行列式的零元素较多，所以不为零的项就不多了. 第一行能取 $a_{11}=3$ 和 $a_{13}=-1$，第二行仅能取 $a_{22}=2$ 和 $a_{24}=-1$. 当取 $a_{11}=3$，$a_{22}=2$ 时，第三行必取 $a_{33}=3$. 第四行也仅有一种取法 $a_{44}=1$. 故这个行列式有

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=3\times2\times3\times1=18$$

$$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}=(-1)\times(-1)\times1\times(-3)=-3$$

而第一项的列标排列为 1234，逆序数为 0，为偶排列，取正号；第二项的列标排列为 3421，逆序数为 5，为奇排列，取负号.

所以原行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^5 a_{13}a_{21}a_{32}a_{41} = 18-(-3)=21$$

**例 2** 主对角线左下方的元素全为零的行列式，称为上三角行列式. 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**解** 在这个行列式中，第 $n$ 行仅有一个不为零的元素 $a_{nn}$，故这一行只能取 $a_{nn}$ 项；在第 $n-1$行中有两个不为零的元素 $a_{(n-1)(n-1)}$ 和 $a_{(n-1)n}$，由于已经取了第 $n$ 列的 $a_{nn}$，故此时就不能再取第 $n$ 列的元素 $a_{(n-1)n}$ 了，而只能取 $a_{(n-1)(n-1)}$，依此类推，第一行也仅有一种取法 $a_{11}$，故而，这个行列式的结果除了 $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ 项外，其余全为零，而这一项的列指标排列是个偶排列.

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

换句话说，这个行列式就等于主对角线(从左上角到右下角这条对角线)上元素的乘积. 同理，对于主对角线右上方的元素全为零的下三角形行列式有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

特别地，有

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

这种除主对角线以外的元素全为零的行列式称为对角形行列式.

**例 3**　证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

**证**　同例 2 一样，此行列式也仅有一项 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$，而它的符号由列指标的逆序数而定，其列指标排列为 $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$，逆序数为 $\tau=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

需要指出的是，行列式的定义中一般项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，行指标已经按自然顺序排好，它的逆序数已为零，为偶排列，所以在取符号时，$(-1)^{\tau}$ 的指数并未把它计算在内，只计算列指标的逆序数. 而在这 $n$ 个数的乘法中，因子满足交换律，因此它的一般项也可以写成 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，故 $n$ 阶行列式定义也等价于

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

或

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

这是因为对于 $D$ 中任一项 $(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，总有且仅有 $D_2$ 中的某一项 $(-1)^{s}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 与之对应并相等；反之，对于 $D_2$ 中任一项 $(-1)^{\tau}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$，也总有且仅有 $D$ 中的某一项 $(-1)^{s}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 与之对应并且相等，于是 $D$ 与 $D_2$ 中的项可以一一对应并且相等，从而 $D=D_2$，同理可得 $D=D_1$.

## 习　题　1.3

1. (1)写出四阶行列式中带负号且包含因子 $a_{12}$ 和 $a_{21}$ 的项.

(2)确定四阶行列式 $|a_{ij}|$ 的展开式中，项①$a_{21}a_{13}a_{34}a_{42}$；②$a_{41}a_{33}a_{24}a_{12}$ 所带的符号.

2. 用行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$.

3. 求多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix} \text{ 中 } x^4 \text{ 和 } x^3 \text{ 项的系数}$$

## 1.4　行列式的基本性质

直接用行列式的定义计算行列式，在一般情况下是比较烦琐的. 从 1.1 节～1.3 节的练习可以看出，当一个行列式的零元素比较多，或者行列式的阶数比较低时，行列式的计算就比较容易. 从这两个思路出发，我们推导一些行列式的性质，以便能够简化行列式的计算.

**定义 1**　把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列互换，得到另一个行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$D^{\mathrm{T}}$ 称为 $D$ 的转置行列式(有些书用 $D'$ 表示 $D$ 的转置行列式).

**性质 1**　行列式与它的转置行列式的值相等.

**证**　按定义

$$\begin{aligned} D &= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

由此性质可知，行列式中行与列具有相同地位. 行列式的性质凡是对行成立的，对列也是成立的，反之亦然.

**性质 2** 互换行列式的两行(列),行列式变号.

**证** 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 交换 $i,j$ 两行得到的,即当 $k\neq i,j$ 时,$b_{kp}=a_{kp}$;当 $k=i,j$ 时 $b_{jp}=a_{ip}$ $b_{ip}=a_{jp}$.

于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau} b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau} a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau_1} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中行标排列为自然排列 $12\cdots i\cdots j\cdots n$,逆序数为 0,$\tau$ 为列标排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数.设 $\tau_1$ 为排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数,则 $(-1)^{\tau}=-(-1)^{\tau_1}$,故

$$D_1=-\sum(-1)^{\tau} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D$$

由此性质得证.

**推论 1** 如果行列式有两行(列)完全相同,则行列式为零.

**证** 把 $D$ 中这相同的两行互换,有 $D=-D$,故 $D=0$.

**性质 3** 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数 $k$,等于用数 $k$ 乘此行列式.

**证** 设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的第 $i$ 行元素都乘以数 $k$,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau} a_{1p_1}\cdots ka_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau} ka_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= k\sum(-1)^{\tau} a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= kD \end{aligned}$$