Yan Yuan

燕园教育

2015 考研专家指导丛书

考研数学客观题 27天突破1500题

数学三

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

赠送MP3光盘

清华大学 王欢
北京大学 王德军 主编
首都师范大学 童武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教育出版中心

Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

考研数学客观题27天突破1500题

数学三

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

◎ 清华大学　　王　欢

◎ 北京大学　　王德军　主编

◎ 首都师范大学　童　武

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

教育出版中心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学客观题27天突破1500题. 数学三 / 王欢主编. —北京:中国石化出版社,2014.1
ISBN 978-7-5114-2494-5

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第285752号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京富泰印刷有限责任公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 8印张 200千字
2014年3月第1版 2014年3月第1次印刷
定价:25.00元(赠送MP3光盘)

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括：

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》

《考研数学标准模拟试卷精解数学二》

《考研数学标准模拟试卷精解数学三》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　98考点全突破数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　70考点全突破数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　102考点全突破数学三》

《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》

《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学三》

《考研数学主观题23天突破500题　数学一》

《考研数学主观题13天突破500题　数学二》

《考研数学主观题22天突破500题　数学三》

《考研数学客观题26天突破1500题　数学一》

目　　录

第一部分　高等数学

第 1 天　函数、极限与连续

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界(　　).

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

【答案】A

【解析】由函数 $f(x)$ 的表达式知，它在实数轴上除点 $x=0$，$x=1$ 及 $x=2$ 外处处有定义，在它的定义域上有

$$|f(x)|=\left|\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\right|=\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}\cdot\left|\frac{\sin(x-2)}{x-2}\right|\leqslant\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}$$

由此可见 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 内有界，而在任何以 $x=1$ 或 $x=2$ 为端点的开区间内无界，故应选(A).

2. 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

(A)偶函数　　(B)无界函数　　(C)周期函数　　(D)单调函数

【答案】B

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x\tan x e^{\sin x}=\infty$，故 $f(x)$ 无界，或考察 $f(x)$ 在 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{4}(n=1,2,\cdots)$ 的函数值，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=+\infty$，可见 $f(x)$ 是无界函数，故应选(B).

3. 设 $\{x_n\}$ 是无界数列，则下列结论中正确的是(　　).

(A)若 $\{y_n\}$ 是有界数列，则 $\{x_n-y_n\}$ 一定是无界数列

(B)若 $\{y_n\}$ 是无界数列，则 $\{x_ny_n\}$ 一定是无界数列

(C)若 $\{y_n\}$ 是有界数列，则 $\{x_ny_n\}$ 一定是无界数列

(D)若 $\{y_n\}$ 是无界数列，则 $\{x_n+y_n\}$ 必是无界数列

【答案】A

【解析】① $x_n=\begin{cases}n & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\\ 0 & n \text{ 为奇数时}\end{cases}$　　$y_n=\begin{cases}0 & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\\ n & n \text{ 为奇数时}\end{cases}$

则 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 都无界，但 $x_n\cdot y_n=0$，$\{x_ny_n\}$ 有界，故(B)不正确．②若设 $y_n=0$，x_n 如①，则 $\{y_n\}$ 有界，$x_n\cdot y_n=0$，$\{x_ny_n\}$ 有界，故(C)不正确．③$x_n=n$，$y_n=-n$，$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都无界，但 $x_n+y_n=0$，$\{x_n+y_n\}$ 有界，故(D)不正确．

4. 下列各式中正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

【答案】A

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\frac{1}{1+t}}=e^0=1$，应选(A)．这里应

注意　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}\neq -e$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}\neq e$

5. 命题“①$f(x)$，$g(x)$在 x_0 点的某邻域内都无界，则 $f(x)$，$g(x)$在 x_0 点的该邻域内一定无界；②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\infty$；③$f(x)$及 $g(x)$在 x_0 点的某邻域内均有界，则 $f(x)$，$g(x)$在 x_0 的该邻域内一定有界；④$f(x)$，$g(x)$是当 $x\to x_0$ 的无穷小量，则 $x\to x_0$ 时 $f(x)$和 $g(x)$中至少有一个是无穷小量．”中正确的是(　　).

(A)①②　　(B)②③　　(C)③④　　(D)①④

【答案】B

【解析】设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为有理数}\\ 1/x, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}1/x, & x\text{ 为有理数，且 }x\neq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

则 $f(x)g(x)=0$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)g(x)\to 0$，但 $x\to 0$ 时，$f(x)$及 $g(x)$都不是无穷小，命题④不正确；且本例中 $f(x)$及 $g(x)$在 $x=0$ 的任何邻域内都无界，但 $f(x)g(x)=0$，在与前相同的邻域内有界，即命题①不正确．

6. 当 $x\to 1$ 时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限(　　).

(A)等于 2　　(B)等于 0　　(C)为∞　　(D)不存在但不为∞

【答案】D

【解析】$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\cdot 0=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$，当 $x\to 1$ 时函数没有极限，也不是∞，故应选(D).

7. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时(　　).

(A)$f(x)$是 x 等价无穷小　　(B)$f(x)$与 x 是同阶但非等价无穷小

(C)$f(x)$比 x 更高阶的无穷小　　(D)$f(x)$是比 x 较低阶的无穷小

【答案】B

【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1}=\ln 2+\ln 3$，且 $\ln 2+\ln 3\neq 1$，所以应选(B).

8. 当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小量中，(　　)是比其他三个更高阶的无穷小量．

(A)x^2　　(B)$1-\cos x$　　(C)$\sqrt{1-x^2}-1$　　(D)$x-\tan x$

【答案】D

【解析】是于 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，

故 x^2，$1-\cos x$，$\sqrt{1-x^2}-1$ 是同阶无穷小，可见应选(D).

9. 设 $f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-1$，当 $x\to 0$ 时，$\ln\cos x^2$ 是比 $x^nf(x)$高阶的无穷小量，而 $x^nf(x)$是比 $e^{\sin^2x}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

【答案】A

【解析】由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=-1$知，当$x\to 0$时，$f(x)\sim -x^2$，于是$x^nf(x)\sim -x^{n+2}$.

又当$x\to 0$时，$\ln\cos x^2=\ln[1+(\cos x^2-1)]\sim\cos x^2-1\sim -\frac{1}{2}x^4$.

再根据题设有：$2<n+2<4$，可见$n=1$，故应选(A).

10. 设对任意的x，总有$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A)存在且等于零　　(B)存在但不一定为零

(C)一定不存在　　(D)不一定存在

【答案】D

【解析】用排除法.

令　　$\varphi(x)=1-\frac{1}{x^2}$，$f(x)=1$，$g(x)=1+\frac{1}{x^2}$

显然　　$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$

且　　$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0$

此时　　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$

故(A)和(C)都不正确.

为排除(B)，再令　$\varphi(x)=x-\frac{1}{x^2}$，$f(x)=x$，$g(x)=x+\frac{1}{x^2}$，显然$\varphi(x)$，$f(x)$，$g(x)$满足题设全部条件，但$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，故应选(D).

11. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a(e^{\sin x}-1)+b(x-\sin x)}{c\tan x+d(1-\cos x)}=0$，则(　　).

(A)$a=b$，$b\neq 0$，c、d不同时为0　　(B)$a\neq b$，$b=0$，c、d为任意常数

(C)$c=0$，$d\neq 0$，a、b为任意常数　　(D)$c\neq 0$，$d=0$，a、b为任意常数

【答案】A

【解析】原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a(e^{\sin x}-1)+b(x-\sin x)}{c\tan x+d(1-\cos x)}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ae^{\sin x}\cos x+b(1-\cos x)}{c\sec^2x+d\sin x}$

当$a\neq 0$时，原式$\neq 0$，故选(A).

12. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c=\infty$，则必有(　　).

(A)$a_n<b_n$对任意n成立　　(B)$b_n<c_n$对任意n成立

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　(D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

【答案】D

【解析】(A)，(B)显然不对，因为由数列极限的不等式性质只能得出数列“当n充分大时”的情况，不可能得出“对任意n成立”的性质.(C)也明显不对，因为“无穷小·无穷大”是未定型，极限可能存在也可能不存在.故应选(D).

13. 设函数$y=f(x)$在$(0,+\infty)$内有界且可导，则(　　).

(A)当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$时，必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(B)当$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时，必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(C)当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$时，必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(D)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

【答案】B

【解析】排除法．由于当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to0$ 可能是无穷振荡的，$f'(x)$ 可能没有极限，如 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x^2$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在．故(A)不对；例如 $f(x)=\sin x\to0\ (x\to0^+)$，但 $f'(x)=\cos x\to1\neq0$，故(C)、(D)不对．应选(B).

14. 下列函数在其定义域内连续的是(　　).

(A) $f(x)=\ln x+\sin x$

(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$

(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$

【答案】A

【解析】由基本初等函数的连续性及连续函数的四则运算法则知 $f(x)=\ln x+\sin x$ 在其定义域 $0<x<+\infty$ 内连续，故应选(A).

15. 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$(　　).

(A)在 $x=0$ 处左极限不存在

(B)有跳跃间断点 $x=0$

(C)在 $x=0$ 处右极限不存在

(D)有可去间断点 $x=0$

【答案】D

【解析】由 $f(x)$ 是奇函数有 $f(0)=0$. 又因为 $f'(0)$ 存在，所以

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}g(x)$$

又因为 $x=0$ 是 $g(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=f'(0)$，所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点．故应选(D).

16. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为(　　).

(A)不存在间断点

(B)存在间断点 $x=1$

(C)存在间断点 $x=0$

(D)存在间断点 $x=-1$

【答案】B

【解析】易计算得 $f(x)=\begin{cases}1+x & |x|<1\\ \dfrac{1+x}{2} & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，讨论即知

由题设得极限为

$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1\\ \dfrac{1+x}{2}, & |x|=1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 可知 $x=-1$，$x=1$ 为函数的分段点，作为函数图形可知 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点，$x=-1$ 为 $f(x)$ 的连续点，因此应选(B).

17. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$则(　　).

(A)$x=0$必是$g(x)$的第一类间断点.
(B)$x=0$必是$g(x)$的第二类间断点.
(C)$x=0$必是$g(x)$的连续点.
(D)$g(x)$在点$x=0$处的连续性与a的取值有关.

【答案】D

【解析】因为　$\lim\limits_{x\to 0}(x)=\lim\limits_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=y}\lim\limits_{x\to\infty}f(y)=a$，

从而，当$a=0=g(0)$时$g(x)$在点$x=0$处连续，当$a\neq 0$时$g(x)$在点$x=0$处间断，即$g(x)$在点$x=0$处的连续性与a的取值有关，故应选(D).

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\sin\frac{2}{x}=$________.

【答案】$\frac{6}{5}$

【解析】原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x^2+3x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{6}{5}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=$________.

【答案】e

【解析】

[解法一]　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)^x$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

又
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}}=1$$

故原式$=e$.

[解法二]　设$u=\frac{1}{x}$，则当$x\to\infty$时，$u\to 0$，于是

原式$=\lim\limits_{u\to 0}(\sin u+\cos u)^{\frac{1}{u}}=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}}$

而由洛必达法则，得

$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos u-\sin u}{\sin u+\cos u}=1$$

故原式$=e$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=$________，其中 n 为给定的自然数．

【答案】$e^{\frac{n+1}{2}}$

【解析】此极限是 1^∞ 型未定式．

［解法一］原式 $=\lim\limits_{x\to0}\exp\left\{\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{n}\right\}$$

其中大括号内的极限是$\dfrac{0}{0}$型未定式，因此由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{n}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

于是原式 $=e^{\frac{n+1}{2}}$

［解法二］由于$\dfrac{(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})^{nx}}{2}=\left(1+\dfrac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，

又因

$$\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{nx}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}+\cdots+\lim_{x\to0}\frac{e^{nx}-1}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{2}(n+1)$$

故原式 $=e^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

4. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$________，$b=$________.

【答案】1，-4

【解析】不难得出

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\begin{cases}0,\ a\neq1，\text{任何 } b\\1-b,\ a=1，\text{任何 } b\end{cases}$$

从而，若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则必须且只需 $a=1$，$1-b=5$，即 $a=1$，$b=-4$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)=$________.

【答案】$\dfrac{4}{3}$

【解析】

［解法一］

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^22x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin4x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}=\frac{4}{3}$$

[解法二] $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\ \sin^2x\cos^2x}{x^2\ \sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x(1-\sin^2x)}{x^4}\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}+\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}+1$$

$$=1+2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=1+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{4}{3}$$

6. 已知$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{f(2x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}$，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=$ ________.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】$\because\ \lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\ln e^2=2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}\frac{x}{f(2x)}=2$，$\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{f(2x)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{u\to0}\frac{u}{f(u)}=2$

故$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{4}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{ax^2-x+2}+x+1}{\sqrt{x^2-\cos x}}=3$，则 $a=$ ________.

【答案】16

【解析】原式$\xlongequal{令\ x=-t}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{at^2+t+2}-t+1}{\sqrt{t^2-\cos t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{a+1/t+2/t^2}-1+1/t}{\sqrt{1-(\cos t)/t}}=\frac{\sqrt{a}-1}{1}=3$

故 $a=16$

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=$ ________.

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^x-1\right]}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}3^x\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln(1+x/3)}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{3}}{x}=\frac{1}{3}$$

9. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ________.

【答案】2

【解析】原式$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}}=2$

10. 已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________.

【答案】$a=-\dfrac{3}{2}$

【解析】由$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}ax^2$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a=1$$

可得　$a=-\dfrac{3}{2}$

11. 设 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$________.

【答案】$\dfrac{1}{1-2a}$

【解析】由于　$\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]^n=n\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]$，利用等价无穷小代换，有 $\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\dfrac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty)$

于是，原式$\lim\limits_{x\to\infty}n\ln\left[1+\dfrac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n}{n(1-2a)}=\dfrac{1}{1-2a}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=$________.

【答案】$4e^{-1}$

【解析】
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdots\frac{(n+n)}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]\right\}$$
$$=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}=4e^{-1}$$

第 2 天　导数与微分

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\cos\sqrt[5]{x^4}$ 在点 $x=0$ 处(　　).

(A)不可导且 $f'(0)\neq\infty$　　　　(B)不可导且 $f'(0)=\infty$

(C)可导且 $f'(0)=0$　　　　(D)可导且 $f'(0)=\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\sqrt[5]{x^4}-1}{x}=0$，即 $f'(0)=0$.

2. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

【答案】C

【解析】因 $3x^3$ 处处任意阶可导，只需考查 $x^2|x|\xlongequal{\triangle}\varphi(x)$，它是分段函数，$x=0$ 是连接点.

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant0\\ x^3, & x\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^3, & x<0\\ 3x^3, & x>0\end{cases}$$

又 $\varphi'+(0)=(x^3)=(x^3)'_+\big|_{x=0}=0$，$\varphi'_-(0)=(-x^3)'_-\big|_{x=0}=0\Rightarrow\varphi'(0)=0$;

即 $\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^2, & x\leqslant0\\ 3x^3, & x\geqslant0\end{cases}$

同理可得 $\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x<0,\\ 6x, & x>0,\end{cases}\varphi''(0)=0$;

即 $\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x\leqslant0\\ 6x, & x\geqslant0\end{cases}=6|x|$，

因 $y=|x|$ 在 $x=0$ 不可导 $\Rightarrow\varphi'''(0)$ 不存在，应选(C).

3. 由 $\begin{cases}x=\cos^3t\\ y=\sin^3t\end{cases}\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的图形在 $(0,1)$ 内(　　).

(A)单调下降且向下凹　　　　(B)单调下降且向上凹

(C)单调上升且向下凹　　　　(D)单调上升且向上凹

【答案】B

【解析】当 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x\in(0,1)$，　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3\sin^2t\cos t}{3\cos^2t(-\sin t)}=-\tan t<0$,

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\tan t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\tan t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\sec^2t\cdot\frac{1}{3\cos^2t(-\sin t)}=\frac{1}{3\cos^4t\sin t}>0$,

故选(B).

4. 已知$f(x)$在$(-\delta, \delta)$内具有二阶导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$f''(x)>0$，则(　　).

(A)在$(-\delta, 0)$内$f(x)>x$，在$(0, \delta)$内$f(x)<x$

(B)在$(-\delta, 0)$内$f(x)<x$，在$(0, \delta)$内$f(x)>x$

(C)在$(-\delta, \delta)$内$f(x)<x$

(D)在$(-\delta, \delta)$内$f(x)>x$

【答案】D

【解析】由题设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$知，$f(0)=0$，$f'(0)=1$. 令$F(x)=f(x)-x$，则$F'(x)=f'(x)-1$，$F''(x)=f''(x)>0$. 于是$F'(x)$在$(-\delta, \delta)$内单调增加，且$F'(0)=0$. 当$x\in(-\delta, 0)$时，$F'(x)<F'(0)=0$；当$x\in(0, \delta)$时，$F'(x)>F'(0)=0$. 可见$F(x)$在点$x=0$处取极小值，也即最小值，从而有$F(x)>F(0)=0$，即$f(x)>x$，$x\in(-\delta, \delta)$，故应选(D).

5. 已知函数$f(x)$在区间$(1-\delta, 1+\delta)$内具有二阶导数，$f''(x)<0$，且$f(1)=f'(1)=1$，则(　　).

(A)在$(1-\delta, 1)$和$(1, 1+\delta)$内均有$f(x)<x$

(B)在$(1-\delta, 1)$和$(1, 1+\delta)$内均有$f(x)>x$

(C)在$(1-\delta, 1)$内$f(x)<x$，在$(1, 1+\delta)$内$f(x)>x$

(D)在$(1-\delta, 1)$内$f(x)>x$，在$(1, 1+\delta)$内$f(x)<x$

【答案】A

【解析】设$\varphi(x)=f(x)-x$，则$\varphi'(x)=f'(x)-f$，$\varphi''(x)=f''(x)$. 由$f''(x)<0$得$\varphi''(x)<0$，故$\varphi'(x)$单调减少，则当$x<1$时，$\varphi'(x)>\varphi'(1)=f'(1)-1=0$，当$x>1$，时$\varphi'(x)<\varphi'(1)=0$. 则$\varphi(x)$在$x=1$处取得极大值，当$x\in(1-\delta, 1)\cup(1, 1+\delta)$时$\varphi(x)<\varphi(1)=f(1)-1=0$，即$f(x)<x$.

6. 设$f(x)$在$x=0$处满足$f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$，$f^{(n+1)}(0)>0$，则(　　).

(A)当n为偶数时，$x=0$是$f(x)$的极大值点

(B)当n为偶数时，$x=0$是$f(x)$的极小值点

(C)当n为奇数时，$x=0$是$f(x)$的极大值点

(D)当n为奇数时，$x=0$是$f(x)$的极小值点

【答案】D

【解析】因为
$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n\\&\quad+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}+R_{n+1}(x)\\&=f(0)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}+R_{n+1}(x)\end{aligned}$$

(由题设$f'(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$)

所以当$|x|$很小时，$f(x)-f(0)$与$\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}$同号，而$f^{(n+1)}(0)>0$，当$n$为偶数时，$\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}$在$x=0$点两侧异号，$f(0)$不是极值点；当$n$为奇数时，在