




数学卷

中国科学技术  
经·典·文·库

# 曲面动力系统

叶彦谦 著

 科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

中国科学技术经典文库·数学卷

# 曲面动力系统

叶彦谦 著



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书总结了作者及国内外数学工作者近二十年来关于曲面动力系统定性理论的主要成果,其中包括作者本人在环域定理和奇点概念的推广等方面的有创新意义的工作。

本书与 C. Godbillon 的名著《曲面动力系统》一起,为曲面上衰减动力系统的定性理论奠定了初步的基础。

本书可供大学数学系及应用数学系学生、研究生、教师和有关的科学工作者阅读参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

---

曲面动力系统/叶彦谦著. —北京:科学出版社, 2010.9  
(中国科学技术经典文库·数学卷)  
ISBN 978-7-03-028971-1

I. ①曲… II. ①叶… III. ①曲面-动力系统(数学) IV. ①0313

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 177815 号

---

责任编辑:吕虹 王丽平/责任校对:张林  
责任印制:钱玉芬/封面设计:王浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号  
邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

排版制作:科学出版社编务公司  
科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

1990 年 12 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2010 年 10 月第二次印刷 印张: 11 1/2

字数: 224 000

定价: 66.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 序 言

紧曲面动力系统定性理论的内容比平面动力系统定性理论的更为丰富有趣,这是由于曲面既有可定向与不可定向之分,又有亏格数的不同之故.例如,在平面上闭轨线只有一种,而在曲面上有的闭轨线同伦于零,有的则否;有的是双边的,有的却是单边的,和平面上大不一样.除此以外,曲面上还可能存在着所谓的非闭 $P$ 式稳定轨线,它可以在整个曲面上处处稠密,也可以无处稠密,这更是平面动力系统所没有的.另一方面,曲面动力系统没有奇异吸引子(指定常系统),这便使人们对它能够做一些较为深入的研究,而不至于困难到无从着手.虽然如此,曲面动力系统方面的古典结果是屈指可数的,近三四十年来国外对可能有奇点和极限环的衰减曲面动力系统的研究已经开始,但工作仍然很少.相比之下,近十余年来国内在这方面的的工作却是相当多的,其中有不少是带有奠基性的和大有发展前途的,这当然和国内在平面定常系统的定性理论方面有较多的成果是密切相关的.本书的目的就是要继C.Godbillon的名著《曲面动力系统》之后对这一领域近二十年来国内外的新发展作简要的介绍(结果稳定性理论除外),借以引起常微分方程与动力系统方面的数学家的兴趣.

本书共分十二节,除前面两节扼要介绍关于曲面和动力系统的较古典的熟知性质(述而不证)外,其余十节基本上都是迄今尚未出现于任何专著的新成果,其中属于国外数学家的有§7的全部和§3,§4,§6的一部分.我们认为Godbillon的书和本书一起,已可为曲面上衰减动力系统的定性理论奠定初步的基础.在此基础上,今后这方面的发展势必会比过去更快一些.除曲面上的衰减系统之外,近二三十年来国内外还有不少涉及结构稳定性和遍历理论的深刻的结果,我们不拟在此介绍.初学者可参考B. И.阿诺尔德的《常微分方程续论》(中译本,科学出版社,1989)第三章.

最后,作者对中国科学院数学所余澍祥同志表示感谢,他在1981年发表于《数学进展》上的一篇调研报告给作者搜集国外文献以不少方便.

叶彦谦

1988年12月于南京大学

# 目 录

## 序言

§1. 紧曲面的分类和一般性质 .....	1
§2. 微分流形上动力系统的一般性质 .....	10
§3. 环面上两类特殊的动力系统 .....	21
§4. Klein 瓶与 Möbius 带上的动力系统 .....	33
§5. 射影平面上的动力系统 .....	41
§6. 曲面上的 $P$ 式稳定运动和中心 .....	57
§7. 紧二维流形上连续流的拓扑分类 .....	73
§8. 环域定理与奇点概念的推广 .....	88
§9. 曲面动力系统的闭轨与奇闭轨的存在性 .....	111
§10. 闭曲面上连续流的奇点、闭轨、奇闭轨和 $P$ 式稳定运动的闭包等之间的 关系 .....	118
§11. 环面上的线性三角多项式系统 .....	139
§12. 环面上的 van der Pol 方程及其推广 .....	162
参考文献 .....	175

## §1. 紧曲面的分类和一般性质

我们称连通的二维流形为曲面,它是球面、环面、柱面等熟知概念的推广. 曲面  $M$  称为闭的,如果  $M$  是紧的且无边界. 也就是说,闭曲面是一个连通紧 Hausdorff 空间,其中每一点有一邻域同胚于 Euclid 平面. 本节主要介绍闭曲面的一些熟知的基本性质,以便将来可以应用. 由于这些结果都是古典的,所以略去证明. 有兴趣的读者可以参阅文献[1], [2], [3], [4], [5], [6]中的有关章节.

**定理1** 设闭曲面或带边界的紧曲面  $M$  被三角剖分而成为复形时,其顶点数为  $a_0$ ,边数为  $a_1$  二维胞腔数为  $a_2$ . 以  $R_p^0, R_p^1, R_p^2$  分别表示此复形的零维,一维,二维的模  $p$  ( $p$  为素数或零) Betti 数. 则有

$$a_0 - a_1 + a_2 = R_p^0 - R_p^1 + R_p^2. \quad (1)$$

等式(1)称为  $M$  的 Euler-Poincaré 关系式. 记其值为  $\chi(M)$ , 成为  $M$  的 Euler 特征.

记:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \text{球面 } S^2, \\ T_1 &= \text{环面 } T^2, \\ T_2 &= T_1 \# T_1, \text{称为 } T_1 \text{ 与 } T_1 \text{ 的连通和}^{①}, \\ \dots \\ T_g &= T_{g-1} \# T_1, \text{当 } g \geq 2 \text{ 为正整数时.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

它们被称为可定向闭曲面的模式. 易见  $T_1$  也可视为带有一个柄的球面<sup>②</sup>. 一般地,  $T_g$  可视为带有  $g$  个柄的球面. 因此,图1.1中的两种模式是一样的.

再记:

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{射影平面 } PR^2, \\ P_2 &= P_1 \# P_1 = \text{Klein 瓶 } K^2, \end{aligned}$$

① 两个曲面  $M_1$  与  $M_2$  的连通和是指: 从每一曲面上各挖去一个开圆盘  $D_1^2$  与  $D_2^2$ , 然后把  $M_1$  与  $M_2$  沿着  $D_1^2$  与  $D_2^2$  的边界黏合而得的曲面, 记为  $M_1 \# M_2$ . 严格定义见[3]或[4].

② 即从  $S^2$  上挖去两个开圆盘  $D_1^2$  与  $D_2^2$  (剩下来的实际上是一带边柱面  $H_2$ ), 然后把另一带边柱面(柄)的两端与  $S^2 - D_1^2 - D_2^2$  沿着两个圆盘的边界黏合. 给曲面  $M$  加柄实际上是作  $M$  与  $S^2$  的双重连通和, 即从每一曲面上各挖去两个圆盘以后再彼此黏合. 今后记之为  $M \#_2 S^2$ , 或记为  $M \#_* H_2$ , 这里 \* 表示作连通和时  $M$  被挖去一个开圆盘, 而  $H_2$  本身带边, 未被挖去什么, 又 # 的右下角的 2 表示  $M$  被挖去的开圆盘个数.

$$P_g = P_{g-1} \# P_1, \text{当 } g \geq 2 \text{ 时.} \quad (3)$$

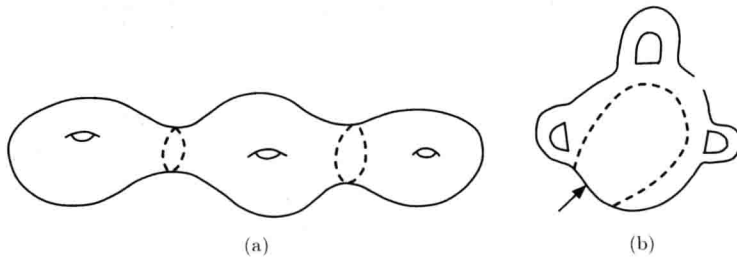


图1.1

它们被称为不可定向闭曲面的模式.<sup>①</sup>

最简单的带边可定向紧曲面是闭圆盘  $\bar{D}^2$ . 最简单的带边不可定向紧曲面是 Möbius 带  $B_2$ . 熟知的是  $\bar{D}^2, B_2, S^2, H_2, T^2, PR^2, K^2$  有如下的表示图(图1.2), 其中凡加箭头的实线对边都应沿箭头的正向叠合, 边界旁画着的虚箭头表示边界的某一正方向.

此外, 还有下列一些等式成立:

$$\bar{D}_1^2 \cup D_2^2 = S_1^2 \# S_2^2 = S^2, \quad (4)$$

$$D^2 \cup B_2 = S^2 \#^* B_2 = S^2 \# PR^2 = PR^2. \quad (5)^{\textcircled{2}}$$

注意图1.2中的(c), (d), 可知  $S^2$  是  $PR^2$  的二重覆盖空间; 注意其中的(f), 可知  $T^2$  是  $K^2$  的二重覆盖. 此外, 又易见: 实直线  $\overset{\circ}{H}_2$  (不带边的圆柱) 和  $R^2$  分别是圆  $S^1, T^2$  和  $\overset{\circ}{H}_2$  的可数无限重覆盖空间. 一般可证:

**定理2** 每一流形  $M$  必有一可定向的两重覆盖流形  $\widetilde{M}$  (见[4]p.106).

由定理1及  $S^2$  与  $PR^2$  的三角剖分, 易见:

$$\chi(S^2) = 2, \quad \chi(PR^2) = 1. \quad (6)$$

又由连通和  $\#$  的定义和定理1, 易见对曲面  $M, N$ ,

$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2. \quad (7)$$

然后应用归纳法, 易证:

①  $P_g$  可以看成是带有  $g$  个交叉帽的球面, 见图10.16.

② 若记  $P_0 = S^2$ , 则此式亦可改写为  $P_0 \# P_1 = P_1$ . 两式都是定理3后面的  $M \# S^2 = M$  的特例.

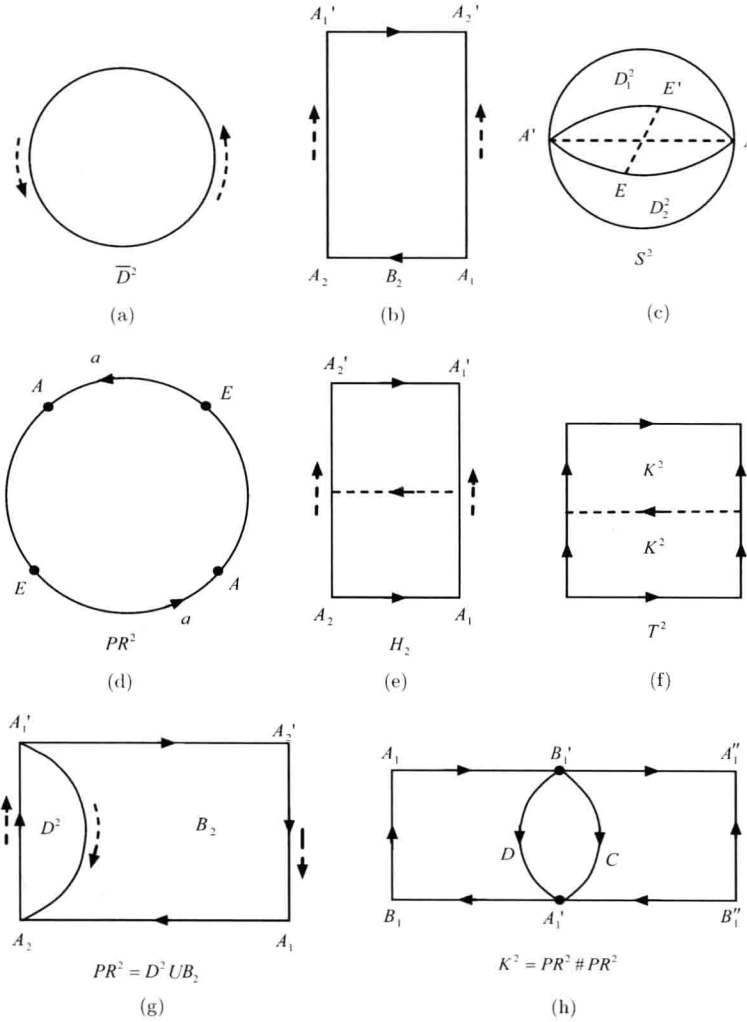


图1.2

**定理3**  $T_g$  与  $P_g$  的Euler特征分别为:

$$\chi(T_g) = 2 - 2g, \chi(P_g) = 2 - g. \tag{8}$$

注意:  $\#, \#_2, \#^*$  与  $\#_2^*$  的定义以及(7), (8)两式, 可知下面一些性质成立.

**性质1** 对任何曲面  $M$  有

$$M \# S^2 = M. \tag{9}$$



**性质2** 给  $T_g$  加柄时有

$$T_g \#_2 S^2 = T_g \#_2^* H_2 = T_g \# T_1 = T_{g+1}, \quad (10)$$

$$\chi(T_{g+1}) = \chi(T_g) - 2. \quad (11)$$

**性质3** 给  $P_g$  加横截帽(cross cap, 其意义见下式的第一项)时有(参考(5)式)

$$P_g \#^* B_2 = P_g \# PR^2 = P_{g+1}, \quad (12)$$

$$\chi(P_{g+1}) = \chi(P_g) - 1. \quad (13)$$

**性质4** 给  $P_g$  加柄等于给  $P_g$  加两个横截帽:

$$P_g \#_2^* H_2 = P_g \#_2 S^2 = P_{g+2} \quad (g \geq 1). \quad (14)$$

此式的证明见[4], 亦可将(7)式推广到  $\#_2$  再证明<sup>①</sup>.

**性质5** 给  $T_g$  加横截帽后得到  $P_{2g+1}$  :

$$\begin{aligned} T_g \#^* B_2 &= T_g \# PR^2 = PR^2 \# T_g = PR^2 \#^* \sum_1^{2g} B_2 \\ &= PR^2 \# \sum_1^{2g} PR^2 = P_{2g+1}, \\ \chi(P_{2g+1}) &= \chi(T_g) - 1. \end{aligned} \quad (15)$$

**定理4** (可定向曲面的分类). 设  $M$  为可定向闭曲面, 则必存在唯一的非负整数  $g \geq 0$ , 使  $M$  同胚于  $T_g$ . 若  $M$  为可定向带边曲面,  $\partial M$  有  $b$  个连通支,  $M$  的 Euler 特征为  $\chi$ , 则  $\chi + b$  为偶数. 记  $g = 1 - \frac{\chi + b}{2}$ , 则  $M$  同胚于  $T_g$  上挖去  $b$  个互不相遇的开圆盘而得到的可定向曲面(见[4]).

**定理5** 亏格为  $g$  的可定向曲面  $M$  上必存在  $g$  个互不相遇的圆, 使它们的和集在  $M$  上的余集仍为连通集; 但  $M$  上任何  $g + 1$  个互不相遇的圆必定将  $M$  分割为不连通集.

**定理5'** 若  $N$  为不可定向闭曲面, 则必存在一正整数  $g$ , 使  $N$  包含  $g$  个, 但不包含  $g + 1$  个互不相遇的 Möbius 带.  $g$  称为  $N$  的 Möbius 数.

由(5)及(12)式知  $P_g$  上至少包含  $g$  个 Möbius 带.

**定理4'** (不可定向曲面的分类). 若  $N$  为不可定向闭曲面, 其 Möbius 数为  $g$ , 则  $N$  必同胚于  $P_g$ . 从  $N$  上除去一切 Möbius 带而代之以圆盘, 则所得为球面. 若  $N$  为不

<sup>①</sup> 即利用  $\chi(M \#_2 N) = \chi(M) + \chi(N) - 4$  来证(14)式左边的 Euler 特征为  $-g$ . 性质5亦可用同法证明, 但都要用到后面的定理.

可定向带边曲面, 其 Möbius 数为  $g$ ,  $\partial N$  有  $b$  个连通支, 则  $N$  同胚于  $P_g$  上挖去  $b$  个互不相遇的开圆盘.

**系1**  $P_g$  上恰有  $g$  个 Möbius 带.

注意: 闭曲面  $M$  若挖去  $b$  个开圆盘而成为带边(边界为  $b$  个连通支)紧曲面时, 则其亏格不变, 而 Euler 特征  $\chi$  则减少  $b$ . 故由定理3, 4, 4' 可得:

**定理6** 若带边紧曲面  $M$  有亏格  $g$ ,  $\partial M$  有  $b$  个连通支, 每一个都是拓扑圆, 则

$$\chi(M) = 2 - 2g - b, \text{ 当 } M \text{ 为可定向时,}$$

$$\chi(M) = 2 - g - b, \text{ 当 } M \text{ 为不可定向时.} \quad (16)$$

**系2** 若闭曲面的 Euler 特征为奇数, 则它必为不可定向.

**定理7** 两个紧曲面互相微分同胚当且仅当它们有相同的亏格、Euler 特征, 以及相同个数的边界连通支.

**系3** 对定理2中的  $M$  与  $\tilde{M}$ , 若  $M$  的亏格为  $g$ , 则  $\tilde{M}$  的亏格为  $g-1$  (因为  $\chi_{\tilde{M}} = 2\chi_M$ ).

**系4** 若曲面  $M$  与  $N$  同为可定向或同为不可定向, 则

$$g(M\#N) = g(M) + g(N). \quad (17)$$

若  $M$  为可定向而  $N$  为不可定向, 则

$$g(M\#N) = 2g(M) + g(N). \quad (18)$$

**定理8** 对亏格为  $g$  的可定向闭曲面有:

$$R_p^0 = 1, R_p^1 = 2g, R_p^2 = 1, \chi = 2 - 2g (p \text{ 为素数}) \quad (19)$$

对亏格为  $g$  的不可定向闭曲面有:

$$\begin{aligned} R_2^0 &= 1, & R_2^1 &= g, & R_2^2 &= 1; \\ R_p^0 &= 1, & R_p^1 &= g-1, & R_p^2 &= 0 (p \neq 2), \end{aligned} \quad \chi = 2 - g. \quad (20)$$

对于常见的亏格  $\leq 2$  的各种曲面、单形与球, 可列表如下:

流形	各维Betti数	边界连通支数	亏格	Euler特征
$H_2$	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 1, R_p^2 = 0$	$b = 2$	$g = 0$	$\chi = 0$
$T^2$	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 2, R_p^2 = 1$	$b = 0$	$g = 1$	$\chi = 0$
$B_2$	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 1, R_p^2 = 0$	$b = 1$	$g = 1$	$\chi = 0$
$K^2$	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 1, R_p^2 = 0 (p \neq 2)$ $R_2^0 = 1, R_2^1 = 1, R_2^2 = 1$	$b = 0$	$g = 2$	$\chi = 0$
$PR^2$	$R_p^0 = 1, R_p^1 = 0, R_p^2 = 0 (p \neq 2)$ $R_2^0 = 1, R_2^1 = 1, R_2^2 = 1$	$b = 0$	$g = 1$	$\chi = 1$
$n(\geq 0)$ 维胞腔 $\bar{D}^n$	$R_p^0 = 1, R_p^i = 0 (0 < i \leq n)$	$b = 1,$	$g = 0$ (对 $n = 2$ )	$\chi = 1$
$n(> 0)$ 维球 $S^n$	$R_p^0 = 1, R_p^i = 0 (0 < i < n)$ $R_p^n = 1,$	$b = 0$	$\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$ (对 $n = 2$ )	$\chi = 1 + (-1)^n$

**定理9**  $T_g$  与  $B_2$  可嵌入  $R^3$ ,  $PR^2$  与  $K^2$  则不能. 一般, 一个无边、紧、不可定向  $n$  维流形不能嵌入一单连通的  $n + 1$  维流形(见[4]). 但对任何  $P_g, g \geq 1$ , 总存在  $R^4$  中的可微曲面同胚于  $P_g$  (见[6]).

**定理10** 亏格为  $g$  的可定向闭曲面的标准记法为(见[1]):

$$aa^{-1} = 1 (g = 0, \text{球面}),$$

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 (g \geq 1). \quad (21)$$

亏格为  $g$  的不可定向闭曲面的标准记法为

$$a_1 a_1 \cdots a_g a_g = 1, \quad (22)$$

或

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_{g-1}^{-1} b_{g-1}^{-1} a_g a_g = 1 (\text{当 } x \text{ 为奇数时}),$$

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g = 1 (\text{当 } x \text{ 为偶数时}). \quad (23)$$

**例1** 对  $PR^2$  有  $a_1 a_1 = 1$ , 对  $T^2$  有  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = 1$ , 对  $K^2$  有  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1 = 1$ , 这可由图1.2(d), (f), (h) 容易地看出.

**定理11** 若  $M$  为连通复形, 则其一维同调群  $H_1(M)$  同构于商群  $\pi_1(|M|)/F$ , 其中  $\pi_1(|M|)$  为  $|M|$  的基本群,  $F$  为  $\pi_1(|M|)$  的换位子群. 特别地, 当  $\pi_1(|M|)$  为交换群时,  $\pi_1 |M|$  与  $H_1(M)$  同构.

**例2**  $\pi_1(T^2) \approx H_1(T^2)$  为交换群, 而  $\pi_1(K^2)$  则为非交换群, 故不同构于  $H_1(K^2)$ . 一般地,  $T_g (g \geq 2)$  的基本群都不是交换群.

再仔细研究一下  $K^2$  的基本群. 以

$$h : (x, y) \mapsto (x + 1, y) \quad (24)$$

记  $R^2$  中的平移, 以

$$k : (x, y) \mapsto (-x, y + 1) \quad (25)$$



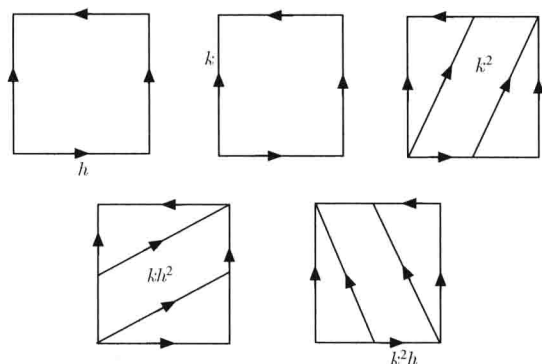


图1.4

**定理15**  $T_g$  与  $P_g$  的基本群为

$$\pi_1(T_g) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} (2g \uparrow), \pi_1(P_g) \approx \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{g-1 \uparrow} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

**定义1** 曲面  $M$  上的 Jordan 曲线  $J$  称为是双边的, 如果  $J$  在  $M$  上有一开邻域同胚于  $\mathring{H}_2$ .  $J$  称为是单边的, 如果  $J$  在  $M$  上有一开邻域同胚于  $\mathring{B}_2$ .

易见: 若  $J$  在  $K^2$  上所属的同伦类为  $h^{\pm 1}$ ,  $k^{\pm 2}$  则  $J$  是双边的; 否则,  $J$  是单边的(由定理14). 注意: 曲面上单边 Jordan 曲线的补集必为连通集; 但反之, 补集为连通集的 Jordan 曲线却可能是双边的. 在  $S^2$ ,  $H_2$  与  $T^2$  上, 一 Jordan 曲线的补集是否为连通, 比较容易看. 在  $K^2$  上则否, 且情况比较复杂, 设  $J$  代表  $\pi_1(K^2)$  的元素  $j$ , 则有下列四种不同的情况:

- 1) 当  $j = 1$  (即  $J$  同伦于零) 时,  $K^2 - J$  有两个连通支, 其一同胚于  $D^2$ .

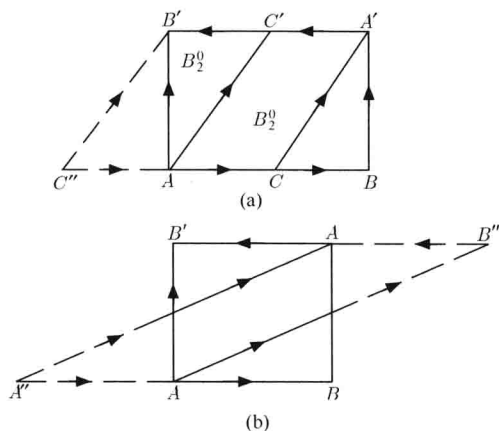


图1.5

- 2) 当  $j = h^{\pm 1}$  时  $K^2 - J$  同胚于  $\overset{\circ}{H}_2$ , 即只有一个连通支.
- 3) 当  $j = k^{\pm 2}$  时  $K^2 - J$  有两个连通支, 各同胚于  $\overset{\circ}{B}_2$  (图1.5(a)).
- 4) 当  $j = k^{\pm 1}h^n$  时  $K^2 - J$  同胚于  $B_2^0$  (图1.5(b)).

**定理16** 设  $\tilde{M}$  为不可定向闭曲面  $M$  的可定向二重覆盖.  $J$  是  $M$  上一单闭曲线,  $J_1$  与  $J_2$  是  $J$  在  $\tilde{M}$  中的逆象(称为  $J$  在  $\tilde{M}$  中的提升), 则当  $J$  为双边曲线时,  $J_1$  与  $J_2$  各为单闭曲线; 当  $J$  为单边曲线时,  $J_1$  与  $J_2$  都不是闭曲线, 但  $J_1 \cup J_2$  是  $\tilde{M}$  中的单闭曲线.

对于非紧曲面, 也有类似于本节的分类定理, 见[7]; 这时亏格和边界连通支的个数都可以是无限的.

## §2. 微分流形上动力系统的一般性质

本节的内容仍是古典的、熟知的, 读者除[3], [5]以外还可参阅[8], [9], [10], 证明从略.

设  $M$  为一微分流形,  $TM$  是  $M$  的切丛.  $M$  上的一个向量场  $X$  就是一映射  $X: M \rightarrow TM$ , 使得对每一点  $x \in M$  有  $X(x) \in T_x M$ . 这里  $T_x M$  表示  $M$  在  $x$  的切空间,  $X(x)$  表示  $M$  在  $x$  的切向量. 当  $X(x)$  不为零向量时称  $x$  为  $X$  的常点; 否则, 称  $x$  为  $X$  的奇点. 即使  $M$  的维数为 2,  $TM$  的维数也是 4, 故我们无法把  $TM$  嵌入到  $R^3$  中去. 这一点在直观上看是很明显的.  $R^3$  中一曲面  $S$  在其上任二点的切平面必交于一直线(如果这两点处于曲面上的一般位置), 这是和  $TM$  的定义相违背的. 尽管如此, 若在闭曲面  $S$  上给定一个向量场  $X$ , 由于点  $x$  的切向量(包括零向量)可以用一由  $x$  出发的有向线段(包括一点)来表示, 则  $X$  仍可在  $R^3$  中描绘出来. 当映射  $X$  为可微时称  $X$  为  $M$  上的可微向量场.

**定义1**  $M$  上可微向量场  $X$  的一条积分线  $\gamma$  是一个  $C^1$  类映射  $\gamma: I \rightarrow M$ , 使得对一切  $t \in I$  都有

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad (1)$$

这里  $I$  表示实轴上一非零区间,  $X(\gamma(t))$  表示位于  $M$  上  $\gamma(t)$  这一点的切空间  $T_{\gamma(t)}M$  中的场  $X$  的向量.

特别地, 若  $x$  为  $X$  的零点, 则可定义一映射  $\gamma$ , 使  $\gamma(I) \equiv x$ , 这时  $\gamma'(t) \equiv 0$ . 由此可见, 奇点是向量场的特殊积分线.

如同欧氏空间中定常方程所确定的向量场一样, 易证: 若  $\gamma(t)$  是  $X$  的积分线, 则  $\gamma(-t)$  和  $\gamma(t + \tau)$  ( $\tau$  固定)也都是  $X$  的积分线.

由于微分流形本身一般只有局部坐标系, 因而流形上的向量场  $X$  也只能有局部的坐标表示. 设  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $n$  维流形  $M_n$  在其上一开邻域  $U$  中的局部坐标, 则  $X$  可在  $U$  中用一算子

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2)$$

来表示, 而它的积分线则是自治方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

的轨线, 其中诸  $f_i$  至少为一次可微. 于是  $X$  在  $M_n$  上的积分线的存在性、唯一性和可延展性等等都可借助于  $M_n$  上的地图集和  $R^n$  中的微分方程理论而得到. 特别地, 若  $M$  为仿紧流形(紧流形是其特例), 则由仿紧性和微分方程论知道总可作适当的时间变换, 使得沿着  $X$  的每一积分线向两个方向延展时,  $t$  的变动范围为  $(-\infty, \infty)$ . 此外, 常见的流盒(flow box)定理, 或流在常点邻域中的直化定理在  $M_n$  上也同样成立. 所有这些事实的证明都可以在[3]中找到.

这样,  $X$  在  $M_n$  上的积分线全体, 或即方程(1)的轨线全体便确定  $M_n$  到它自身的一个单参数变换群, 或  $M_n$  上的一个动力系统.

反过来, 我们也可以在  $M_n$  上先抽象地定义一个流动  $\varphi(t, x)$ , 或称之为实数群  $R$  对  $M_n$  的作用<sup>①</sup>. 这就是一个连续映射  $\varphi: R \times M_n \rightarrow M_n$ , 使得对一切  $x \in M_n$  与一切  $t_1, t_2 \in R$  都有:

$$\varphi(0, x) = x, \quad \varphi(t_2, \varphi(t_1, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x), \quad (4)$$

则称  $\varphi(t, x)$  为  $M_n$  上的一个动力系统. 对固定的  $x$ , 集合  $\{\varphi(t, x)\}_{t \in R}$  称为过点  $x$  的轨线. 若  $\{\varphi(t, x)\}_{t \in R} = x$ , 则称  $x$  为奇点. 当  $\varphi$  为可微映射时, 称  $\varphi(t, x)$  为可微动力系统. 对于  $M_n$  上的可微动力系统  $\varphi(t, x)$ , 经过任一非奇点有唯一的轨线以及它在此点的有向切线. 这些有向切线以及奇点的全体就构成  $M_n$  上的一个可微向量场.

注意: 要描述  $M_n$  上的时变向量场, 可以改为研究乘积流形  $N_{n+1} = M_n \times R$  上的向量场

$$Z = X(x, u) + \frac{\partial}{\partial u} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad (5)$$

其中  $X(x, u) \in T_x M$ . 此向量场局部地对应于非正常方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6)$$

关于曲面上的动力系统, 利用局部坐标系, 我们也可以像平面定常系统一样来定义每一个孤立奇点的指标, 它是一个整数. 熟知的有下面十分重要的Poincaré定理:

**定理1** 若闭曲面  $M$  上的向量场  $X$  有有限个奇点  $O_1, O_2, \dots, O_k$ , 它们的指标分别用  $\text{ind } O_1, \dots, \text{ind } O_k$  来记, 则

$$\sum_{i=1}^k \text{ind } O_i = \chi(M). \quad (7)$$

<sup>①</sup> 对于更一般的群  $G$  在一集  $E$  上的作用以及由此产生的轨道空间的定义与性质可参考[9]卷II, 12.10.



**推论1** 闭曲面中只有  $T^2$  和  $K^2$  上才有可能存在无奇点的向量场.

**系1** 设  $M$  为有边界的紧曲面, 若其上的可微向量场  $X$  与  $M$  的边界处处横截相交或处处相切, 且只有有限个奇点, 则定理1对  $X$  也成立.

**推论2** 在  $H_2$  与  $B_2$  上也可能存在无奇点的向量场  $X$ , 如果  $X$  满足系1中的边界条件.

下面简要介绍有关流形上动力系统的七个问题, 这些问题是研究曲面动力系统所必须知道的知识.

## I. 轨道空间

前面已经提到,  $M$  上的动力系统  $\varphi$  的轨线充满整个  $M$ , 不同的轨线没有公共点. 今把  $M$  上两点属于同一轨线看成是一种等价关系, 则  $M$  被除于这种等价关系所得的商空间  $V$  称为  $\varphi$  的轨道空间, 记为  $V = M/\varphi$ . 我们有:

**定理2** 曲面  $M$  上流  $\varphi$  的轨道空间  $V$  是连通一维流形, 具有可数基. 如果  $\varphi$  没有奇点, 则  $V$  中每一点的余集是一开集.

但即使是十分简单的曲面动力系统, 它的轨道空间也可能不是Hausdorff空间, 并且往往很难用一维图形把它恰当地表示出来. 例如图2.1(a)中所给的既无奇点亦无闭轨的平面动力系统, 其轨道空间只能用图2.1(b)或(c)之一来表示, 其中诸点  $a, b, c, d$  依次表示图2.1(a)中  $A, B, C, D$  诸点所在的轨线. 又图2.1(b)中的  $f(x)$  表示  $R$  上开区间  $(a, +\infty)$  的一个增同胚, 我们约定把  $x$  与  $f(x)$  等同为一点. 图2.1(c)中铅直线下端的箭头表示其下端是开的, 但可进入  $a$  或  $b$  的任意小邻域. 由此可见在这个例子里, 轨道空间  $V$  中点  $a$  的任一邻域与点  $b$  的任一邻域必有公共点, 即  $V$  不是Hausdorff空间.

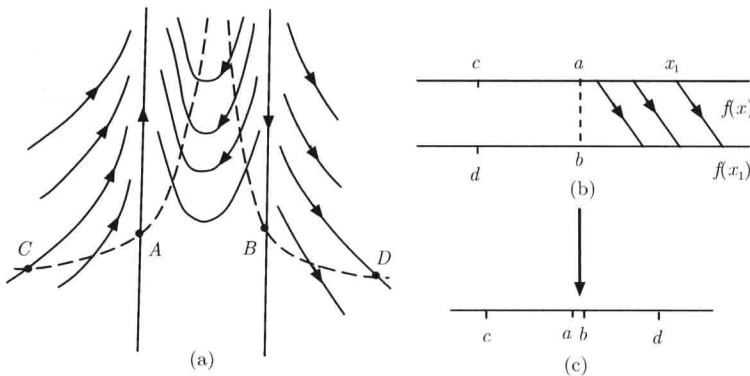


图2.1