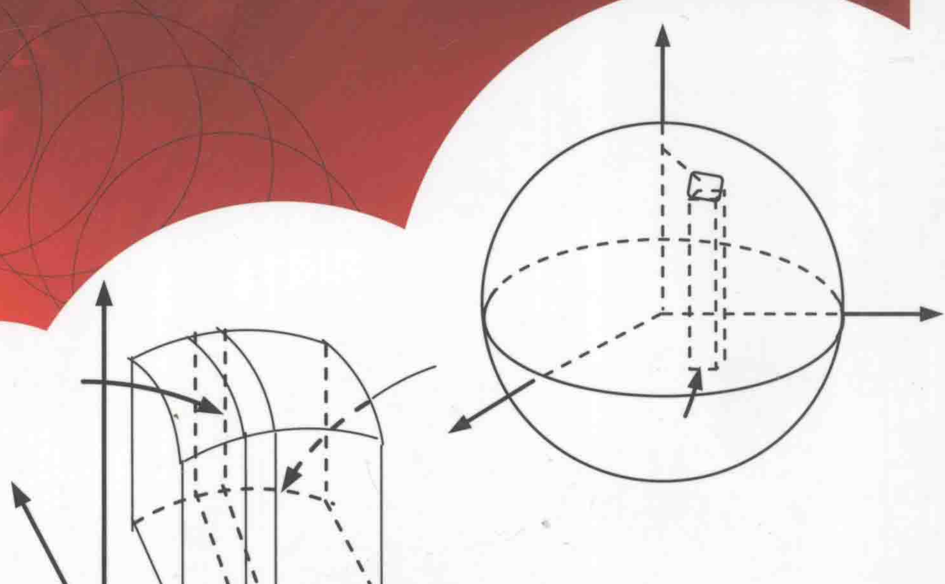
国家示范性 高职院校建设规划教材

高等数学——微积分学基础

李建奎 主编



化学工业出版社

国家示范性 高职院校建设规划教材

高等数学
——微积分学基础

李建奎 主 编
贺丽敏 赵巧蓉 副主编

化学工业出版社
·北 京·

本教材是按照教育部颁布的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，依据山西省省级科研项目《高职高专高等数学教材开发研究》，由教学一线具有丰富教学经验的教师编写而成的.

本书包括函数与极限、微分学、积分学、常微分方程、MATLAB软件基本应用五章内容. 为了提高学生学习兴趣与应用数学知识的能力，针对“高职高专”对数学的工具性与基础性要求，章末配备具有吸引力的阅读资料与项目问题，这对于引导学生思考、便于能力考查是十分有益的.

本书可作为高职高专工科类、管理类各专业通用教学教材. 建议教学时数80学时左右.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学——微积分学基础/李建奎主编. —北京：化学工业出版社，2010.8
国家示范性高职院校建设规划教材
ISBN 978-7-122-09031-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 李… Ⅲ. ①高等数学②微积分 Ⅳ. ①O13②O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第129373号

责任编辑：王金生 张 亮　　装帧设计：尹琳琳
责任校对：战河红

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011）
印 刷：北京市振南印刷有限责任公司
装 订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm 1/16 印张14 字数298千字 2010年9月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899
网 址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定 价：28.00元

前言

随着我国高等职业教育教学改革的不断深入，培养“高素质、技能型人才”已成为现代高职教育人才培养的明确目标，多年来高等数学的教学内容与教学方法为技能人才培养做出了重要的贡献．但在新形势下，高等数学学时的普遍减少与对数学知识需求面的扩大的矛盾日益突出．为了适应新形势下的教学要求，由山西省多所知名重点高职院校的专家与一线骨干教师联合组成课题研究小组，在做了大量分析、调研的基础上，尝试通过简化理论要求、补充必要知识、减少重复讲解、系统整合新旧知识点等手段，对数学知识进行必要的调整与知识重构，还原知识本来面目与应用属性．当然，教材建设亦在保留经典教材许多优点风格的基础上，吸收增加好的建议，使之完善，经过参与该课程改革研究的多所高职高专院校老师的共同努力，《微积分学基础》课程教材得以完成．

本教材与以往传统《高等数学》教材比较，具有以下主要特点：

（1）将一元函数与必要的多元函数微积分知识实现真正融合，体现了微积分学知识的基本全貌和知识的应用背景，扩大了知识面，缩短了学习时间；这在一定程度上解决了以往教材将一元函数微积分学、多元函数微积分学分离讲解，因课时所限，多元函数微积分学知识绝大部分学生又无法学到，而人为造成的学生所学微积分学知识的不完整性，以及给知识应用造成困难的问题，也避免了与初等数学知识衔接时的简单重复．

（2）对学生在初等数学中已学到的知识点，在课程讲解过程中不影响后续学习的知识点，通过列表给出，节省出部分学时．

（3）将原来讲解中的许多比较散乱的知识点进行了必要系统性协调，保证了学生对知识接受时的渐进、连贯性．比如：将数列极限、函数在定点处的单侧极限、自变量趋于无穷时的极限等多种形式，在讲述了动点趋向后统一起来；将四个意义明显的极限结果与极限基本运算法则联合共同组建起极限运算基础．

（4）注重学生对知识整体与系统的把握，及教师在讲授时层次明晰，而在章节开始列出知识讲解脉络图．

（5）重视学生良好思维方式的引导和培养，在知识形成初期给出“思考问题”，在章节末给出“阅读资料”，及其必要分析与启发，达到引导与启发思考的目的．

（6）基础部分不配备过多、过难的习题，但各章最后配备若干“项目问题”（要求学生以学习小组方式共同研究，并用小论文的形式选择其一完成）这能起到引导学生应用所学知识进行分析研究、培养学生团结协作精神与解决实际问题能力

的多重作用. 也可作为学生能力测验的必要内容.

(7) 从培养对象出发，对一些结论的推导与证明采用“休闲”的方式来叙述，使知识接受更容易自然.

本书由山西工程职业技术学院李建奎担任主编，山西建筑职业技术学院贺丽敏、山西职业技术学院赵巧蓉担任副主编，第一章由李建奎编写，第二章由山西大学工程学院施泱编写，第三章第一节至第五节由山西职业技术学院赵巧蓉编写，第三章第六节至第九节由山西生物应用职业技术学院王剑红编写，第四章由山西交通职业技术学院陈从科编写，第五章由贺丽敏编写，本书由李建奎、贺丽敏、赵巧蓉负责统稿.

本教材是山西省省级科研课题——工学结合的校本教材建设的构成内容，编写的初稿完成后山西省几所高职高专院校专家进行了听证，对书中的一些亮点给予了充分的肯定，提出了许多宝贵的建议，山西建筑职业技术学院的王庆云教授、山西职业技术学院杨俊萍教授审阅了全部书稿，在此深表谢意.

我们真切希望能为高职数学课程的科学设置与学生应用能力的培养做出努力，鉴于书稿中难免有操作性及系统性的疏漏等问题，为使本教材能够日臻完善，恳请广大师生批评指正.

编　者

2010 年 5 月

目录

第一章 函数与极限

函数是微积分学中的主要研究对象，极限是贯穿微积分学始末的重要方法．微积分学知识对于解决许多工程实际问题都是得力工具．我们从函数开始介绍微积分学基础知识．

本章知识脉络结构

函数（研究对象）
- 1.预备知识
- 2.函数概述
- 3.函数性质
- 4.函数图形

极限（研究工具）
- 1.函数极限
- 2.极限计算基础
- 3.间接求极限

第一节　函　　数

一、预备知识

1. 量与点

现实世界中的事物都有“量”与“形”两个本质特征．量是事物的计量属性，点是形的基本元素；量可以用图形直观，点也能用代数表示．

量分为常量与变量．

常量是指讨论范围内可看成不变的量，常用记号：a，b，c，…表示；

变量是指讨论范围内允许取不同值的量，常用记号：x，y，z，…表示；

n 个量 x_1，x_2，…，x_n 放置在一起构成有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，就是一个点的代数表示，称为一个 n 维点，记作 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 由常量构成的点称为定点，含有变量的点称为动点.

比如：$A_0(1,0,4)$是一个三维定点；$A(x,3)$ 是一个二维动点.

2. 参照系

为了将点直观体现出来或确定点的位置，通常要用到所谓的参照系，常用参照系如下.

(1) 一维参照系

数轴. 规定了方向、原点、单位长度的有向直线称为数轴，见图 1-1.

数轴上的点与实数间一一对应. 实数被数轴直观图示为有序而无始无终的“直线”.

图 1-1 数轴

(2) 二维参照系

平面直角坐标系. 平面内两个相互垂直相交的数轴构成平面直角坐标系. 两坐标轴常分别记为：x 轴（又称为横轴）、y 轴（又称为纵轴）；交点称为原点；两坐标轴将平面分成四部分，每一部分称作一个象限.

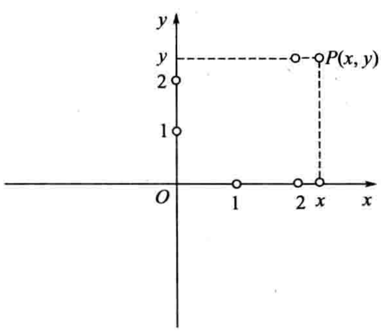


图 1-2 平面直角坐标系

平面直角坐标系是用平面点到 x 轴、y 轴的投影点数值构成的数组(x,y)来确定点的位置. 有序数组(x,y)称为点的坐标，四个象限内的各坐标符号分别是：Ⅰ（＋，＋）、Ⅱ（－，＋）、Ⅲ（－，－）、Ⅳ（＋，－），图 1-2.

极坐标系. 平面内规定了起点、方向、单位长度的射线称为极轴，射线的起点称为极点，平面内的点到极点的距离称为该点的极径 ρ（$\geqslant 0$），平面内一点和极点的连线与极轴正向夹角称为极角 θ（任意角）. 这种用极径与极角确定平面点的位置的坐标系称为极坐标系. 为了方便讨论有时极径取值也可以拓展为负值，其坐标关系见图 1-3.

如果将直角坐标系中 x 轴的正半轴当作极轴，那么，两种坐标系中点的坐标有下列转换关系 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$.

直线与圆的方程在极坐标系下表示比较简单，比如：过极点的直线其倾斜角为 α 时，极坐标方程为 $\theta=\alpha$；以极点为圆心、半径为 R 的圆，在极坐标系下的方程为 $\rho=R$.

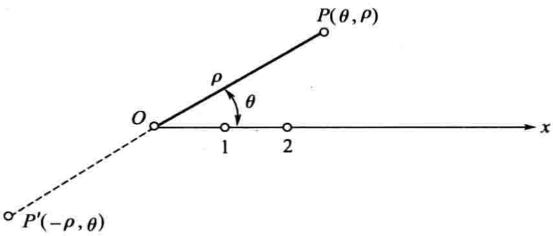


图 1-3　极坐标系

(3) 三维参照系

空间直角坐标系. 作三条相互垂直并交于一点的数轴构成空间直角坐标系. 三条数轴常记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）；交点称为原点，空间直角坐标系有三个坐标面，即：xOy 面、yOz 面、zOx 面；三个坐标面将空间分成 8 部分，每一部分称作一个卦限.

空间直角坐标系是用点到三坐标轴的投影数值构成的数组(x,y,z)三个量确定点的位置. 8 个卦限内的各坐标符号分别是：Ⅰ（+，+，+）、Ⅱ（−，+，+）、Ⅲ（−，−，+）、Ⅳ（+，−，+）、Ⅴ（+，+，−）、Ⅵ（−，+，−）、Ⅶ（−，−，−）、Ⅷ（+，−，−），见图 1-4.

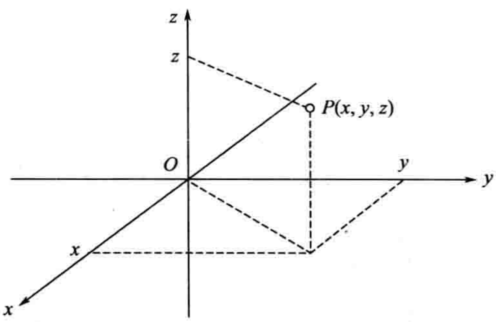


图 1-4　空间直角坐标系

空间柱面坐标系. 空间直角坐标系中的 xOy 面以极坐标形式体现，竖轴坐标不变时的参照系称为空间柱面坐标系，见图 1-5.

空间点能与三维点之间建立一一对应关系.

此外，三维参照系还有球面坐标系等，因很少用，从略，需要时参考其他书目. 四维及四维以上的多维空间没有直观的参照系.

3. 区间、区域与邻域

区间. 一维空间（数轴）上介于 a、b $(a<b)$ 两点间的所有点构成的点集，称为有界区间，包括：开区间 $(a、b)$、闭区间 $[a、b]$、半开半闭区间$[a、b)$、$(a、b]$. 大于（等于）、小于（等于）a 的所有点集、全体数轴上的点集称为无界区间，包括：$(a,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty、a)$、$(-\infty,a]$、$(-\infty,+\infty)$.

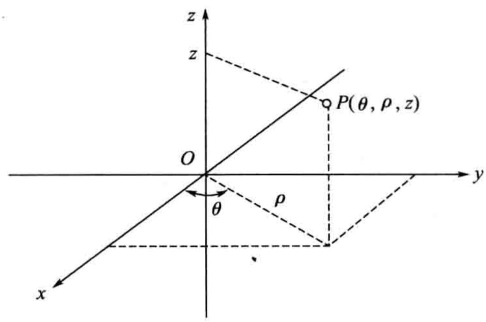


图 1-5 空间柱面坐标系

区域. 二维空间（平面）及二维以上的多维空间内的点集称为区域，区域常用记号：D、E、Ω 等表示.

比如：平面内由若干条曲线围成的点集就是一个平面区域. 围成平面区域的曲线就是平面区域的边界. 包含边界的区域称为闭区域；不包含边界的区域称为开区域；区域可以是有界的，也可以是无界的.

邻域. 设 P_0 是一个定点，P 为动点，点集 $U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|P-P_0|<\delta\}$ 称为点 P_0 的 δ 邻域；点集 $U(\hat{P}_0,\delta)=\{P\,|\,0<|P-P_0|<\delta\}$ 称为点 P_0 的 δ 去心邻域；δ 称为邻域半径.

二、函数概述

【思考问题】

某段时间内，甲公司“A 网”收费标准是：月租费 30 元，来电显示费 6 元/月，本地话费 0.4 元/分；乙公司“B 网”收费标准是：本地话费 0.6 元/分，月租费和来电显示费免收；想拥有来电显示服务的用户入哪种网比较合算？

分析 要弄清入哪种服务网较为合算，就要分析通话时间与服务收费之间存在何种关系，这里通话时间与服务收费是允许取不同值的变量.

若用 t 表示通话时间（单位：分钟）；y 表示“A 网”服务收费（单位：元）；s 表示“B 网”服务收费（单位：元）. 则在一个月内有以下关系：$y=36+0.4t$；$s=0.6t$.

（1）若 $s>y\Leftrightarrow 0.6t>36+0.4t\Rightarrow t>180$ 分钟，此时用户入“A 网”较合算；

（2）若 $s<y\Rightarrow 0.6t<36+0.4t\Rightarrow t<180$ 分钟，此时用户入“B 网”较合算；

（3）当 $s=y\Rightarrow t=180$ 分钟，此时两种话网服务收费相等.

实际中存在着大量相关联的变量关系，刻画与表述这些关联变量关系，是人们分析与解决问题的基础.

1. 函数

事物间量的关系往往是相互关联的，一个变量的变化常常并不单独存在，往往是一个或一组相互独立的变量变化决定了另一变量的取值，即动点变化决定了一个变量的取值.

比如：(1) 圆的面积 s 大小由其半径 r 的大小来决定，决定关系为

$$s=\pi r^2 \quad r\in(0,+\infty)$$

(2) 超市中的三种商品销售单价分别是 a、b、c（元/kg），某日的销量分别是 x_1、x_2、x_3（kg），则超市因销售这三种商品而获得的收入 y 为

$$y=ax_1+bx_2+cx_3$$

定义 设 D 为一个非空 n 维实数点集，任取 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$，都能确定变量 y 的相应值，这种变量间的关系称为一个 n 元函数.

记成 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 简记为 $y=(P)$，$P\in D$.

其中，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为自变量；y 称为因变量；f 表示自变量对因变量的确定关系称为函数关系；D 称为定义域，

数集 $f(D)=\{y\,|\,y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$ 称为值域.

自变量、因变量、函数关系、定义域、值域并称为函数因素.

注意：(1) 一个定点确定的函数值不要求唯一，如果唯一时称为单值函数，不唯一时称为多值函数；

(2) 自变量与因变量用何字母表示只是形式问题，而值域显然取决于函数关系与定义域，所以函数的决定因素是：函数关系与定义域；

(3) 以后给出函数，没有标明定义域的，定义域均指自变量允许取值的集合；

(4) 任意元的函数，均可统一看成“点”的函数.

例 1 求下列函数定义域.

(1) $y=\dfrac{3x}{x^2-2|x|}$；

$x^2\cancel{-2|x|}\neq 0$
$x^2\ \cancel{(-x)^2+2(-x)}\neq 0$
$\cancel{x(x^2-2x)}\neq 0$

$x^2-2\sqrt{x^2}\neq 0$
$x^2\neq 2\sqrt{x^2}$
$x^4\neq 4x^2$

(2) $y=\sqrt{\sin x-\dfrac{1}{2}}$；

(3) $z=\dfrac{y^2-2x}{x\ln xy}$.

解 (1) 该函数是分式，分母只要不为 0 就有意义，所以 $x^2-2|x|\neq 0$，

解得：$x\neq 0$，-2，2，即定义域为

$$x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$$

(2) 该函数是开偶次方的根式，被开方式要大于等于 0，所以

$$\sin x-\frac{1}{2}\geqslant 0,$$

解得：
$$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

(3) 该函数是二元分式函数，且分母中含有对数，运算要有意义，就要求

$$\begin{cases}x\ln xy\neq 0\\ xy>0\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}x>0\\y>0\\xy\neq 1\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}x<0\\y<0\\xy\neq 1\end{cases}$.

例 2 分析下列函数的因素.

(1) $z=\dfrac{3x+2y}{\sqrt{1+y^2}}$;

(2) $y^2+x^2=1$.

解 (1) $z=\dfrac{3x+2y}{\sqrt{1+y^2}}$；$x$、$y$ 是自变量，z 是因变量，函数关系 $f=\dfrac{3(\ )+2[\ ]}{\sqrt{1+[\ ]^2}}$，定义域 $D=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$，值域 $E=\{z\mid z\in R\}$，这是一个二元单值函数.

(2) $y^2+x^2=1\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$；$x$ 是自变量，y 是因变量，函数关系 $f=\pm\sqrt{1-(\ )^2}$，定义域 $x\in[-1,1]$，值域 $y\in[-1,1]$，这是一个一元多值函数.

2. 函数表达形式

实际中，函数的表达形式概括起来如下

$$\text{函数表达形式}\begin{cases}(1)\ \text{解析式}\begin{cases}①\text{显式}\\②\text{隐式}\\③\text{分段式}\\④\text{含参式}\end{cases}\\(2)\ \text{图像式}\\(3)\ \text{表格式}\end{cases}$$

一般而言，解析式表达的函数简练、易于讨论；图像式表达的函数直观明晰；表格式表达的函数准确直接；同一个函数可能能用不同形式表达出来.

例 3 函数表达式举例.

(1) $y=x^2-x,x\in[-1,3]$;

这是一个解析显式函数，其图像式如图 1-6.

(2) $2x^2-y^2=1$;

该函数中，因变量 y 没有被自变量 x 的关系式直接表示出来，这是一个解析隐式函数，经显化为 $y=\pm\sqrt{2x^2-1}$.

注意：不是所有解析隐式函数都可显化，如 $e^{xy}+\sin(x+2y)=1$ 就不可显化.

(3) $y=\begin{cases}3x^2+2,x\in(-\infty,1]\\1-\sin x,x\in(1,+\infty)\end{cases}$;

该函数定义域的两个不同区间 $x\in(-\infty,1]$ 与 $(1,+\infty)$ 内，函数的解析式表达

不能统一，称为分段式函数；计算分段函数的函数值时，自变量取值必须代入相应解析式中去计算，如 $y(0)=3\times0^2+2=2$，$y(2\pi)=1-\sin2\pi=1$.

(4) $\begin{cases}x=2t\\y=2-t^2\end{cases}$ $t\in[0,1]$;

该联立方程组表示的函数中，两变量 x 与 y 的关系是通过参数 t 间接相联系，称为含参数函数；经过消去参数可化为解析显式函数：$y=2-\dfrac{1}{4}x^2$，$x\in[0,2]$.

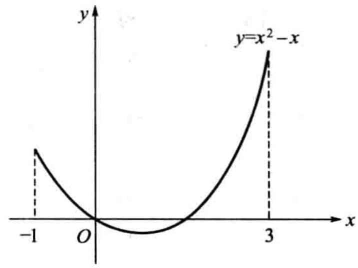


图 1-6　一个解析显式函数图像式

注意：参数的取值范围不是定义域；不是所有含参数函数均可消参显化.

(5) 某学校一年级 10 个班级，期末数学考试平均成绩如下.

班级编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学平均成绩	88.3	86.8	89.7	85.6	87.4	90.1	89.4	86.5	87.4	91.2

这是班级编号与数学平均成绩间的表格式函数.

(6) 某气象台，气温记录仪绘制的某日凌晨 0 时到中午 12 时气温变化曲线（如图 1-7），这是气温 Q 随时间 t 变化的图像式函数.

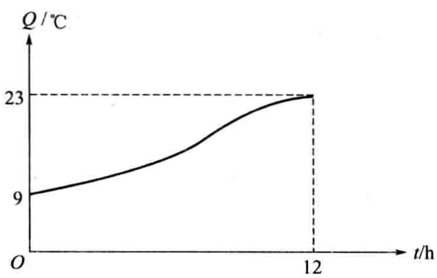


图 1-7　某气象台记录气温变化曲线

三、函数结构

1. 基本初等函数

表 1-1 中所列六类函数称为基本初等函数.

这些函数的性质、图像特点在中学已十分熟悉，这里不再赘述.

表 1-1　基本初等函数

函数类型名称	一般解析表达式
常数函数类	$y=c$（c 为常数）
幂函数类	$y=x^a$（a 为常数）
指数函数类	$y=a^x$（$a>0$ 且，$a\neq1$，a 为常数）
对数函数类	$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，a 为常数）
三角函数类	$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$
反三角函数类	$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$

2. 函数简单结构

由基本初等函数经有限次四则运算构成的函数，称为简单结构函数.

比如：$y=2x\ln x-5^x$；$z=\dfrac{1+x^3}{4y-\cos x}$都是简单结构函数.

3. 函数复合结构

设函数 $y=f(u)$，$u\in G$；$u=\varphi(x)$，$x\in D$，如果 $\varphi(D)\subseteq G$，任取 $x\in D$ 都有确定的 y 值对应，则存在函数关系 $y=f[\varphi(x)]$，$x\in D$，称之为两函数的复合函数；$y=f(u)$称为外层函数；$u=\varphi(x)$称为内层函数，u 称为中间变量.

如果 $\varphi(D)\not\subset G$ 时，但存在 $A\subset D$，使 $\varphi(A)\subseteq G$，可确定一个间接复合函数

$$y=f[\varphi(x)],\ x\in A$$

如果 $G\cap\varphi(D)=\Phi$(空集)，两函数不能复合.

我们讨论函数结构的目的不是为了构造函数，主要是为了分析复杂函数的结构形式.

比如：$y=\log_5[\sin x]$，由 $y=\log_5 u$，$u=\sin x$ 复合而成；

$z=\dfrac{1}{\tan 3^x}$由 $z=u^{-1}$，$u=\tan v$，$v=3^x$ 两重复合而成.

许多函数既有简单结构又有复合结构并可能是多元函数，分析函数结构就是要弄清函数的简单结构与复合结构，这对于后续知识学习、应用很有必要.

例 4 分析下列函数结构.

(1) $y=\arctan\left[\ln(3x^2+x)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$；

(2) $y=2^{\sin^2 x}$；

(3) $z=\dfrac{xy^2\sqrt{1-x}}{\ln(x+y)}$.

解 (1) $y=\arctan u$，$u=\ln v+x^{-\frac{1}{2}}$，$v=3x^2+x$；

(2) $y=2^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$；

(3) $z=\dfrac{xy^2u^{\frac{1}{2}}}{\ln v}$，$\begin{cases}u=1-x\\ v=x+y\end{cases}$.

例 5 已知 $f(2-x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，求 $f(x)$，$f\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

解 $f(2-x)=\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{3-(2-x)}{(2-x)-1}$，所以

$$f(x)=\frac{3-x}{x-1}$$

$$f\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{3-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2}{x}-1}=\frac{3x-2}{2-x}$$

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合得到的函数，称为初等函数. 初等函数都可由一个解析式表示.

比如：(1) $y=\ln(1+\sqrt{x^2-1})$是一个一元初等函数；

(2) $z=\dfrac{\sin(x+2y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$是一个二元初等函数；

(3) $y=\begin{cases}-x, x\leqslant 0\\ x, x>0\end{cases}\Leftrightarrow y=|x|\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2}$是一元初等函数；

(4) $y=\begin{cases}2-x, x\in(-\infty,0]\\ \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{1+x}}, x\in(0,+\infty)\end{cases}$不是初等函数；

(5) 符号函数 $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$不是初等函数.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1+\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$；

(2) $z=\dfrac{2y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$；

(3) $y=\begin{cases}1+x, 1>x\geqslant 0\\ \sqrt{x-1}, x\geqslant 1\end{cases}$.

2. (1) 若 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$；

(2) 设 $f(x)$是 x 的二次多项式函数，若 $f(x-1)-f(x)=6x+4$ 且 $f(0)=2$，求$f(x)$.

3. 设函数 $f(x)$的定义域是 $x\in(0,1]$，求：

(1) $f(\ln x-1)$的定义域；

(2) $f(x^2-y)$的定义域.

4. 分析下列函数的结构.

(1) $y=x^3+\sqrt{1-\cos x}$；

(2) $z=(1+2x)\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x+y}}$；

(3) $y=\arcsin(\lg x)$.

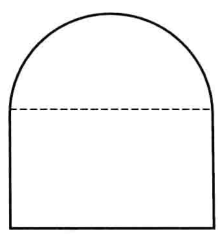


图 1-8 窗户形状示意

5. 某房屋建筑上的窗户是由矩形与半圆构成（如图 1-8），若采光面积为定值 a，试确定矩形的长与高的函数

关系.

6. 一经销处有 680 块某种建筑瓷砖，每块售价 50 元，购买 200 块以内时，原价出售；超过 200 块，但不超过 400 块时，超过部分 9 折出售，超过 400 块时，超过部分 8 折出售．试确定销售收入与销售量间的函数关系.

7. 将圆钢锻压为宽为 x，高为 y 的矩形钢梁，若钢梁的强度 E 正比于 xy^2，直径为 D_0 的圆钢锻压成高是底的 2 倍的钢梁时强度为 a，试给出钢梁强度的函数关系.

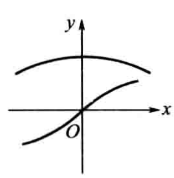
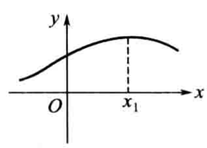
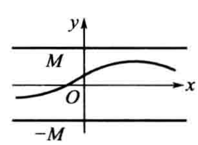
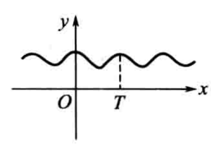
第二节　函数基本性质与图形

实际中函数众多，应用广泛，了解函数的性质与图形对于人们更好地利用函数表述与研究问题很有必要．当然，一元函数是最简单和最基本的函数形式，我们在初等数学中已经对其性质与图形有所了解，本节将在复习一元函数的基本性质后进一步介绍一些二元函数的图形.

一、一元函数基本性质

一元函数图形在平面直角坐标系下是一条曲线或者是一些离散点，一元函数基本性质见表 1-2.

表 1-2　一元函数基本性质

	奇偶性	单调性	有界性	周期性
性质表述	数集 D 关于原点对称，任取 $x\in D$ 满足 $f(-x)=f(x)$ [或 $f(-x)=-f(x)$]，称 $y=f(x)$ 是 D 上的偶函数(或奇函数)，否则称为非奇非偶函数	任取 $x_1<x_2\in(a,b)$，满足 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x)_2$]，称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增(或单调递减)函数；(同一个函数，还可分单调递增、单调递减区间)	若存在常数 $M>0$，任取 $x\in D$ 满足 $\|f(x)\|\leqslant M$，称 $y=f(x)$ 是数集 D 上的有界函数；M 与 $-M$ 分别称为上下界	若存在常数 T，任取 $x\in D$，有 $x+T\in D$，使 $f(x+T)=f(x)$，称 $y=f(x)$ 是周期函数，常数 T 称为该函数的周期
图形示例				
几何特征	偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称	自左至右，单调递增时是上升的曲线；单调递减时是下降的曲线	图形被夹在两条水平直线之间	每一个周期内的图形是相同的