

航空高等院校教材

粘性流体力学习题集

张仲寅 乔志德 编



航空专业教材编

粘性流体力学习题集

张仲寅 乔志德 编

航空专业教材编审室

内 容 简 介

本书是与教科书“粘性流体力学”(国防工业出版社1982年1月出版)配合使用的习题集。书中收集选编了国外同类教材的习题与自编习题,约共250个。习题内容有深有浅,可供不同程度的读者选用。读者对象主要是空气动力学专业的高年级学生。本书也可供空气动力学专业的研究生以及各流体力学专业的学生、研究生和从事这方面工作的有关人员使用。

主审稿人 曹起鹏

责任编辑 于兴旺

粘性流体力学习题集

张仲寅 乔志德 编

*

航空专业教材编审室

西北工业大学印刷厂印装 内部发行

*

787×1092 1/32 印张 2.5 49 千字

1984年5月第一版 1984年5月第一次印刷 印数 600册

统一书号 31219 x 定价 0.30 元

前 言

这本“粘性流体力学习题集”收集和编辑了有关“粘性流体力学”这门课程的习题，供学习这门课程的读者使用。

这本习题集按计划是与我们编著的航空院校统编教材“粘性流体力学”配合使用的。因此，目录系统和参考资料的编号次序与这本教科书相同。

这本习题集中的习题有深有浅，供不同程度的读者选用，有一部分较深习题可供研究生或研究人员使用。

为了解答这些习题有时需要参考一些其它书籍得到启发，因此，在相当多的习题之后，我们都指明了参考书目，便于读者查阅。

西安交通大学景思睿同志曾根据参考资料[3]和[51]帮助整理了一部分习题初稿，南京航空学院曹起鹏教授对选题工作提出了宝贵意见，特此向他们表示感谢。

目 录

第一章 粘性流体运动的基本方程组和一些特解	1
§ 1-1 状态方程及流体的一些热力学性质	1
§ 1-2 质量方程(连续方程)	1
§ 1-3 动量方程	2
§ 1-4 能量方程	5
§ 1-5 边界条件	7
§ 1-6 无量纲相似参数	8
§ 1-7 小雷诺数下绕圆球的流动	11
§ 1-8 正激波问题	14
§ 1-9 运动方程的其它形式	15
§ 1-10 数字电子计算机解法	17
第二章 层流流动	19
§ 2-1 平直流动	19
§ 2-2 二维层流附面层	29
§ 2-3 轴对称层流附面层	38
§ 2-4 一般三维层流附面层	38
§ 2-5 非定常层流附面层	39
第三章 紊流流动	40
§ 3-1 紊流流动基本概念和基本微分方程组	40

§ 3-2	紊流的半经验理论	40
§ 3-3	管内流动	41
§ 3-4	二维紊流附面层	43
§ 3-5	轴对称紊流附面层	56
§ 3-6	一般三维紊流附面层	56
第四章	粘性流动的一些其它问题	58
§ 4-1	附面层流动的转捩	58
§ 4-2	流动的分离	60
§ 4-3	射流与尾迹	61
§ 4-4	粘性流动的计算	62
参考资料		63

第一章 粘性流体运动的基本方程组和一些特解

§ 1-1 状态方程及流体的一些热力学性质

1.1.1 通常用的水的状态方程，近似地认为与温度无关：

$$\frac{p}{p_0} = (A+1) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - A$$

式中 $A \approx 3000$, $n \approx 7$, $p_0 = 1$ 大气压, $\rho_0 = 1000$ 公斤/米³。请由此公式计算 (a) 使水的密度增加一倍所需的压力; (b) 在一个大气压下, 水的体积弹性模量 $E \left(= \rho \frac{dp}{d\rho} \right)$; (c) 在一个大气压下, 水中的音速。^[3]

1.1.2 当空气为 8 大气压, 25℃ 时, 试问它的密度是多少?

§ 1-2 质量方程 (连续方程)

1.2.1 某一不可压流体的平面流动, x 方向的速度分量为

$$v_x = ax^2 + by$$

求 y 方向的速度分量 v_y 。为了确定可能出现的任意函数, 假定 (a) 当 $y=0$, $v_y=0$; (b) 当 $y=0$, $v_y=ct$ 。^[51]

1.2.2 二维不可压气流沿平板流动时，其纵向速度分量可近似地表示为

$$v_x = a_1 \frac{y}{\sqrt{x}} - a_2 \frac{y^3}{x^{1.5}}$$

式中 a_1 和 a_2 为常数。试利用连续方程确定 y 方向的速度分量 v_y ，在确定积分常数时，利用 $y=0$ 处 $v_y=0$ 的条件。^[57]

§ 1-3 动量方程

1.3.1 利用萨特兰公式

$$\mu = aT^{1.5}/(T + 110)$$

式中 a ——常数， T ——绝对温度 K ，以及常温 ($15^\circ C$) 常压 (一大气压) 下的 $\mu_0 = 17.8 \times 10^{-6}$ 公斤/米·秒，试估算空气在 $50^\circ C$ 、一大气压下的粘性系数。^[3]

1.3.2 有一 8×8 厘米² 的方板，由倾角为 30° 的斜面滑下，在斜面上有厚为 0.01 厘米的油膜，板重 20 公斤，如果板的极限速度为 0.9 米/秒，试确定油的粘性系数。^[3]

1.3.3 一轴长为 0.3 米，直径 50 毫米，在直径为 50.5 毫米的轴瓦中同心转动，其间充满润滑油，其 $\mu = 0.25$ 公斤/米·秒。试计算当轴以 800 转/分转动时，所需要的功率。^[3]

1.3.4 圆盘半径为 a ，离固定平面的距离为 h_0 (小量)，圆盘绕通过圆心、垂直于平面的轴旋转，转速为 ω 。在圆盘与平面间充满一薄层粘性液体。试证明阻止圆盘转动的力偶为^[54]

$$\frac{1}{2} \pi \mu \omega a^4 / h_0$$

1.3.5 空气相对于机翼的速度 v_x (平行于翼面) 为

$$v_x = Ay + By^2$$

式中 y 为垂直于翼面的距离; A 、 B 为常数。若 $y = 0.127$ 厘米处的 $v_x = 50$ 米/秒, $y = 0.254$ 厘米处的 $v_x = 67$ 米/秒, 空气的 $\mu = 18.0 \times 10^{-6}$ 公斤/米·秒, 试估计翼面上的粘性剪应力。^[53]

1.3.6 试导出二维不可压流的纳维-斯托克斯方程。^[61]

1.3.7 在纳维-斯托克斯方程组中, 选取 z 轴垂直向上, 故单位质量上的彻体力 $\mathbf{F} = (0, 0, -g)$, 这里 g 为重力加速度常数。引入变量 $\hat{P} = p + \rho gz$, 用变量 $\hat{P}$ 改写纳维-斯托克斯方程组。^[51]

1.3.8 由等式 $p_{11} = -p + k\theta_1 + C_2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ 出发, 详细推导出等式:

$$\begin{cases} p_{xx} = -p + k\theta_x + c_2 \operatorname{div} \mathbf{V} \\ p_{xy} = k\gamma_z \end{cases} \quad [3]$$

1.3.9 推导极坐标系与直角坐标系中应力关系式:^[51]

$$p_{R\theta} = -(p_{xx} - p_{yy}) \sin \theta \cdot \cos \theta + p_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$p_{RR} = p_{xx} \cos^2 \theta + p_{yy} \sin^2 \theta + 2p_{xy} \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$p_{\theta\theta} = p_{xx} \sin^2 \theta + p_{yy} \cos^2 \theta - 2p_{xy} \sin \theta \cdot \cos \theta$$

1.3.10 验证下列关系式^[51]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial V_r}{\partial R} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{R} \right) \\ &\quad - \cos \theta \cdot \sin \theta \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{R} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_x}{\partial y} &= \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cos \theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta \right) \\ &= \cos^2 \theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{R} \right) - \sin^2 \theta \frac{\partial V_\theta}{\partial R} \\ &\quad + \cos \theta \cdot \sin \theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{R} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_y}{\partial y} &= \sin^2 \theta \frac{\partial V_r}{\partial R} + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{R} \right) \\ &\quad + \cos \theta \cdot \sin \theta \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{R} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_y}{\partial x} &= -\sin^2 \theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{R} \right) + \cos^2 \theta \frac{\partial V_\theta}{\partial R} \\ &\quad + \cos \theta \cdot \sin \theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{R} \right)\end{aligned}$$

1.3.11 推导极坐标系下的应力表式达：^[51]

$$p_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right)$$

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r}$$

$$p_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right)$$

1.3.12 对于定常不可压缩流动，在粘性可以忽略的情况下，证明纳维-斯托克斯方程

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

可以化简为沿流线

$$p/\rho = |\mathbf{v}|^2/2 + gz = \text{常数}$$

式中 z 表示流体微团相对于水平基准面的高度。^[3]

1.3.13 为什么在下述情况下不能将水看成是不可压的？
(a) 声的传播问题；(b) 水下爆炸问题。^[51]

1.3.14 一半径为 r_0 的圆柱，以角速度 ω_0 在无限大流体中等速旋转，流体的密度 ρ 和粘性系数 μ 均为常数。将柱坐标系下的运动方程简化，适于本情况，解出速度分布 $v_\theta(r)$ 及压强分布 $p(r)$ 。为什么这些结果会与无粘流（势流）的结果相同？^[3]

1.3.15 具有半径为 a 和 b 的两个共轴圆柱间充满粘性流体。两圆柱分别以转速 ω_1 和 ω_2 旋转。证明对定常运动时，流体的角速度为^[54]

$$\omega = \frac{a^2(b^2 - r^2)\omega_1 - b^2(r^2 - a^2)\omega_2}{r^2(b^2 - a^2)}$$

1.3.16 空气的粘性系数有萨特兰公式^[57]

$$\mu = 2.27 \times 10^{-8} \frac{T^{1.5}}{T + 198.6}$$

式中， T 以 $^\circ R$ 为单位， μ 以斯勒格/呎·秒为单位。若 T 采用 K 为单位， μ 采用公斤/米·秒为单位，试改写萨特兰公式。

§ 1-4 能 量 方 程

1.4.1 试证明当 $\mu \geq 0$ 和 $3\lambda + 2\mu \geq 0$ 时耗散函数 Φ 始终是正的。耗散函数 Φ 为

$$\begin{aligned}\Phi = \mu & \left[2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right. \\ & + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right] + \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2\end{aligned}$$

1.4.2 利用 $k/k_0 = (T/T_0)^{0.81}$ 及常温 (15°C) 常压 (一大气压) 下的 $k_0 = 0.0253$ 焦耳/米·秒·K, 估算空气在一个大气压, 200°C 时的热传导系数。^[3]

1.4.3 利用能量方程, 证明在传热系数 $k = \text{常数}$ 的牛顿流体中, 熵 (S) 的变化率由下式确定:

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \Phi + k \nabla^2 T$$

式中 Φ ——耗散函数。^[3]

1.4.4 在一封闭容器中充满液体, 容器是静止的。证明能量耗散率为^[54]

$$4\mu \iiint (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) dx dy dz$$

式中

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{cases}$$

1.4.5 对于定常不可压流, 在粘性和热传导可以忽略的情况下, 证明能量方程

$$\rho \frac{De}{Dt} = \text{div}(k \nabla T) + p_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

可以化简为, 沿流线:

$$e + p/\rho + |\mathbf{V}|^2/2 + gz = \text{常数}。^{[3]}$$

1.4.6 对于非牛顿流体的指数律模型 $p_{xy} \approx 2K\gamma_z^n$ 可以推广到三维应力场中。引入模型:

$$p'_{ij} = 2K |2\sqrt{I_2}|^{n-1} \gamma_k$$

式中 I_2 为第二应变率张量不变量, $I_2 = \theta_x \theta_y + \theta_y \theta_z + \theta_z \theta_x - \gamma_x^2 - \gamma_y^2 - \gamma_z^2$ 。应用这一模型, 导出在平板间流动 ($v_x = v_x(y)$, $v_y = v_z = 0$) 的耗散函数 Φ 的表达式。^[3]

§ 1-5 边界条件

1.5.1 将方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{p}_{ij} \\ \rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \text{div}(k \nabla T) + \Phi \end{array} \right.$$

简化为适合于密度 ρ 、粘性系数 μ 、传热系数 k 均为常数的充分发展的管流的情况, 这时 $v_x = v_x(r)$, $T = T(r)$, 并给出相应的边界条件。^[3]

1.5.2 考虑自由液面上流体微团力的平衡, 如下附图所示。由于表面张力作用, 引起液面弯曲, 试导出过该曲面压力的突跃公式:

$$p(x, y, \eta) = p_a - T \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right)$$

式中, R_x, R_y ——曲面的曲率半径, T ——表面张力系数。^[3]

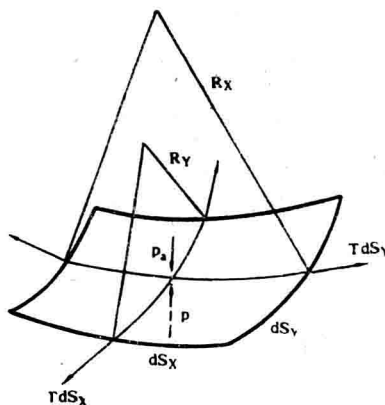


图 1.5.2

1.5.3 下面几种流动中,那种是平面流? (a)圆管中的流动; (b)圆盘绕垂直于圆盘的轴线旋转所产生的流动; (c)绕大展长后掠直机翼的流动。^[51]

§ 1-6 无量纲相似参数

1.6.1 直径为 0.8 米的圆球,置于温度为 15℃、压力为一个大气压、速度为 20 米/秒的自由流中。分别对下列情况计算雷诺数。(以球直径作特征长度):

(a)流体为空气; (b)水。^[3]

1.6.2 空气在直径为 1.25 厘米的直圆管中以 0.015 米³/秒的流量流动。沿管长距离为 3 米的两点间的压降等于 60 毫米水柱高。

在另一直径为 2.5 厘米的直圆管中流动的是水。若两个管流动力相似，问在水管中相距 1.5 米的两点间的压降是多少？此时水的流量是多少？^[53]

空气的 $\rho = 1.23$ 公斤/米³， $\nu = 14.4 \times 10^{-6}$ 米²/秒

水的 $\rho = 999$ 公斤/米³， $\nu = 1.16 \times 10^{-6}$ 米²/秒

1.6.3 一架飞机总重 6 吨，设计在 1 万米高空飞行，该处空气相对密度为 0.337，温度为 -50°C 。该飞机模型在增压风洞（24 大气压， 15°C ）中做实验。若试验条件是动力相似的，问模型上升力有多大？^[53]

1.6.4 一螺旋桨，直径 4 米，转速为 1,500 转/分，设计装在飞机上，在 6,000 米高空以 90 米/秒的速度飞行。若螺旋桨的模型为实物的 1/4，置于增压风洞中做实验（温度为 15°C ）。忽略桨叶变形的影响，试确定合适的实验条件：
（1）增压风洞中的压强与风速；（2）螺旋桨模型的转速。^[53]

1.6.5 用 1/10 比例尺的飞机模型在增压风洞（25 大气压）中做实验。发现在大迎角下，由翼身联接处发出的强旋涡以每秒 20 次的频率打到尾翼上。问在相同迎角与雷诺数下，在实际飞行中，旋涡的频率将是多大？^[53]

1.6.6 设计某飞机在 1 万米高空以 90 米/秒的速度飞行。如果需要在低空，相对密度为 0.75，温度为 -5°C 时作动力相似的飞行试验。问有无可能进行这种全尺寸的试验？^[53]

1.6.7 在自由对流问题中，常用到下列一些参数的组合：

$$A = \frac{\mu k L}{\rho^2 g \beta \Delta T C_p} \quad B = \frac{g \beta \Delta T k L}{C_p \mu}$$

证明， A 具有长度四次方的量纲， B 具有速度平方的量纲，式中 k 为传热系数， β 为热膨胀系数 $-(1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_p$ 。[3]

1.6.8 对于物理属性为常值的不可压流，在垂直热平板附近的自由对流运动方程为：

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = g\beta(T - T_1) + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \rho C_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

引入无量纲变量：

$$v_x^* = \frac{v_x}{B^{1/2}}, \quad v_y^* = \frac{v_y}{B^{1/2}}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{A^{1/4}}$$

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$$

式中 $A = \frac{\mu k T}{\rho^2 g \beta \Delta T C_p}$ ， $B = \frac{g \beta \Delta T k L}{C_p \mu}$ ， L 为板长。代

入方程组中，改写为无量纲的形式，并确定出现的诸无量纲组合量。[3]

1.6.9 机翼的弦长为 2 米，在海平面条件下以 50 米/秒速度飞行。一微生物的特征长度为 10 微米 (10×10^{-6} 米) 在水中以 20 微米/秒的速度游泳，水的运动粘性系数为 1.15×10^{-6} 米²/秒。试计算两者的雷诺数。[27]

1.6.10 试计算下列情况下的雷诺数与马赫数或速度:

(1) 高尔夫球的特征长度(直径)为 4.32 厘米, 以 60 米/秒的速度在标准海平面大气中运动。

(2) 高超音速飞行器的飞行马赫数为 $M = 6.0$, 在 30 公里高空飞行。该飞行器的特征长度为 32.8 米。 [57]

1.6.11 某飞机的特征长度(弦长)为 10.4 米, 在 20 公里高空以马赫数 $M = 3.0$ 作飞行, 问此时的飞行速度与雷诺数各是多少? [57]

§ 1-7 小雷诺数下绕圆球的流动

1.7.1 设雨滴直径分别为 0.5 毫米和 0.1 毫米, 试估计它们在海平面标准大气中的下降速度。

1.7.2 一比重为 8.0 的圆球, 落入很大的油池中, 油的比重为 0.86, 粘性系数为 0.1 公斤/米·秒, 试确定下列情况下, 球下沉的极限速度:

(a) 球直径 $d = 0.25$ 毫米; (b) $d = 2.5$ 毫米, (c) $d = 25.0$ 毫米。哪一种情况是缓慢运动? [3]

1.7.3 证明液滴下落所受的阻力为(假定液滴保持球形):

$$F = 6\pi a\mu_0 U \frac{1 + 2\mu_0/3\mu_i}{1 + \mu_0/\mu_i}$$

式中 U 为下落速度, a 为液滴半径, μ_0 为介质的粘性系数, μ_i 为液滴的粘性系数。(提示: 类似于斯托克斯问题, 但边界条件是, 在液滴表面: 径向速度为零, 表面速度相同, 表面剪应力相同。) [3]

1.7.4 在小 Re 数圆球绕流中, 假设其无量纲流函数