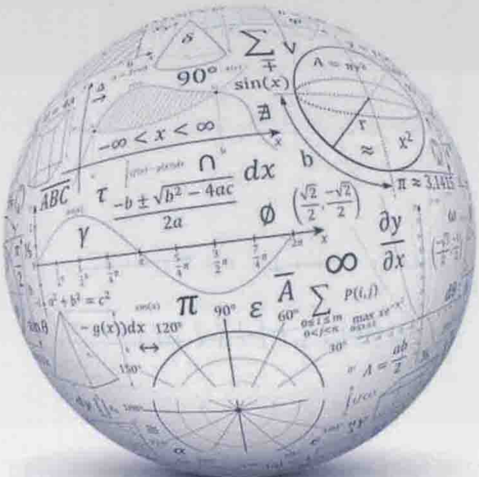
Suanzi Daishu
Jiqi Yingshe
de Jubu Tezheng



算子代数
及其映射的局部特征

朱军 著

科学出版社

杭州电子科技大学学术专著出版基金
浙江省重点学科专项基金 资助出版

算子代数及其映射的局部特征

朱 军 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书第 1 章至第 3 章简要介绍 Banach 代数、C^*代数与 von Neumann 代数的基础知识; 第 4 章介绍套代数的理想与距离公式的一些结果; 第 5 章与第 6 章主要介绍局部导子与一点可导映射的最新成果.

本书可供算子代数方向的研究生和相关研究人员使用, 也可帮助初学者从算子代数最基础的知识逐步进入某一方向的前沿.

图书在版编目(CIP)数据

算子代数及其映射的局部特征/朱军著. —北京: 科学出版社, 2014.5

ISBN 978-7-03-040262-2

Ⅰ. ①算… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①算子代数 Ⅳ. ①O177.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 052979 号

责任编辑: 王艳丽 李香叶 / 责任校对: 郑金红

责任印制: 刘 学 / 封面设计: 殷 靓

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

江苏凤凰数码印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 5 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2014 年 5 月第一次印刷 印张: 18 1/2

字数: 351 000

定价: 80.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

算子代数的系统研究始于 20 世纪 30~40 年代, 经过数十年几代数学家与数学工作者的不懈努力, 取得了惊人的成就, 算子代数已成为数学学科中最重要的研究方向之一. 20 世纪 50 年代末 60 年代初, 由 J.R.Ringrose 等开创的非自伴算子代数领域, 打开了算子代数研究的新天地, 到 20 世纪 80~90 年代, 非自伴算子代数取得了快速发展, 成为算子代数研究的重要领域之一, 特别是套代数的研究取得了丰富的成果. 套代数起源于线性代数中的上三角矩阵与算子理论中的不变子空间问题, 通过国际上一批著名数学家的艰苦工作, 形成了初步的理论体系, 只需参阅 K.R.Davidson 的专著*Nest Algebras* (Davidson, 1988) 以及其后的数百篇高水平的学术论文, 即可见一斑, 而且该理论已与系统理论、代数 K 理论、von Neumann 代数、同调理论等相关联，形成了许多十分有价值的交叉学科, 该理论不仅有重要的理论价值, 而且有广阔的研究前景, 已引起国内外有关数学工作者的普遍关注, 成为算子理论中国际前沿的重要研究课题之一.

算子代数上的具有某些性质的映射的特征问题是近一二十年来国内外十分活跃的方向, 早在 1986 年 Jafarian(1986) 就给出了 $B(X)$ 上的线性保谱映射的明确表达式, 随后各种算子代数上的具有某种性质的映射的表示问题成为又一个热门课题, 国际上以 P.Sermrl, M.Bresar, L.Molnar 等为代表的一批数学家做了大量的工作, 取得了许多有意义的成果, 国内许多专家学者也在该领域作过大量有成效的工作.

第 1 章至第 3 章, 主要介绍算子代数中最基本的三类代数, 即 Banach 代数、C^* 代数与 von Neumann 代数, 这三类代数经过几十年的积累, 分支方向众多, 而且非常成熟, 形成了庞大的理论体系. 例如, von Neumann 代数的分类理论, C^* 代数的 Hilbert 模理论, 算子 K 理论等都已非常完善, 本书仅介绍这三类代数最基础的知识, 同时满足第 4 章到第 6 章的需要. 第 4 章介绍后续各章所需要的非自伴算子代数的基础知识, 主要介绍套代数与某些 CSL 代数的基本性质, 为后面讨论算子代数上的映射奠定基础. 在接下来的第 5 章和第 6 章我们关心的是算子代数上的映射的局部性质与整体性质的关系. 其中第 5 章讨论关于算子代数导子、局部导子、双局部导子与核值保持映射等方面的内容, 局部导子的研究是 20 世纪 90 年代的热门研究课题. 1990 年著名数学家 D.R.Larson 和 R.Kadison 提出了局部导子的概念, D.R.Larson 和 A.R.Sourour 证明了 $B(X)$ 上每个局部导子是导子；R.Kadison 证明了 von Neumann 代数上的每个范数拓扑连续的局部导子是导子, 随后 M.Bresar, R.L.Crist 等分别讨论各种算子代数上的局部导子问题. 双局部导子与核值保持映射的概念随后也被引入, 从而更明确地揭示算子代数上导子与广义导子的本质特征, 并将该项研究引向深入, 得到许多有趣的结果. 同时大量的新问题随之产生，为该课题提供了新的研究内容. 第 6 章讨论近几年在各种算子代数与矩阵代数上被广泛讨论的一点可导、一点广义可导、一点 Jordan 可导、高阶可导等问题, 目前这个问题还在不断深入的研究, 新成果也在不断出现, 希望读者通过这一章的学习, 对于该方向的前沿研究有所了解, 再查阅相关学术论文后, 能够进入课题研究.

由于作者水平有限, 不足之处在所难免, 敬请批评指正.

朱　军

2013 年秋于杭州

目　录

前言
第 1 章　Banach 代数 ······ 1
1.1　代数预备知识 ······ 1
1.2　Banach 代数的概念及其基本性质 ······ 7
1.3　Banach 代数中的理想与可乘线性泛函 ······ 16
1.4　Gelfand 表示及其应用 ······ 21
1.5　Banach 代数上的函数演算与谱映射定理 ······ 25
1.6　Banach 代数 $C(X)$ ······ 34
1.7　正锥与 Banach 空间上的态 ······ 39
1.8　Banach 代数上的导子与自同构 ······ 45
第 2 章　C^* 代数 ······ 56
2.1　C^* 代数的基本概念与性质 ······ 56
2.2　交换 C^* 代数的 G-N 表示 ······ 61
2.3　C^* 代数的函数演算 ······ 66
2.4　C^* 代数中的正元 ······ 72
2.5　无单位元的 C^* 代数与逼近单位元 ······ 82
2.6　C^* 代数的商代数与 $*$ 同态 ······ 89
2.7　C^* 代数上的正线性泛函 ······ 96
2.8　C^* 代数上的态与纯态 ······ 100
2.9　C^* 代数上的表示 ······ 111
第 3 章　von Neumann 代数 ······ 120
3.1　$B(H)$ 上的各种局部凸拓扑与连续线性泛函 ······ 120
3.2　部分等距算子、秩一算子与极分解 ······ 134
3.3　von Neumann 代数的定义与性质 ······ 138
3.4　二次交换子定理 ······ 147
3.5　von Neumann 代数上的正线性泛函 ······ 156
第 4 章　套代数与 CSL 代数 ······ 160
4.1　不变子空间格生成的算子代数 ······ 160
4.2　秩一算子与稠密性定理 ······ 171
4.3　套代数中的理想 ······ 180

4.4 距离公式 ······ 191
第 5 章 导子与局部导子 ······ 205
5.1 局部导子 ······ 205
5.2 双局部导子 ······ 214
5.3 各种核值保持映射 ······ 217
5.4 实套代数上的广义 Jordan*-左导子 ······ 228
第 6 章 一点可导的映射 ······ 246
6.1 在零点广义可导映射 ······ 246
6.2 非平凡套代数中的全可导点 ······ 262
6.3 矩阵代数中的全可导点 ······ 269
参考文献 ······ 284

第 1 章　Banach 代数

算子代数的系统研究大约始于 20 世纪 30 年代, 早期的研究侧重自伴算子代数的研究, 50 年代末人们开始考虑非自伴算子代数, 通过几十年的积累取得了十分丰富的研究成果, 许多理论对现代数学的许多分支有深刻的影响. 目前这些理论已渗透到量子物理、系统理论、代数 K 理论、同调理论等诸多的学科领域, 已成为现代数学不可缺少的重要组成部分. 本章主要介绍一种最基本的算子代数——Banach 代数.

1.1　代数预备知识

算子代数是一种赋予拓扑结构的特殊代数, 因此引用大量代数学的基本概念, 也有许多研究方法与研究对象来自代数学, 所以我们首先介绍代数学中的最基本的概念.

定义 1.1.1　设 $\mathcal{A}$ 是一个实 (复) 线性空间, 并在 $\mathcal{A}$ 上定义了一个称为乘法的二元运算 $(x, y) \mapsto xy (\forall x, y \in \mathcal{A})$, 满足如下条件: 对任意的 $x, y, z \in \mathcal{A}$ 以及任意实数 (复数)λ, 有

(1) $(xy)z = x(yz)$;

(2) $(x+y)z = xz + yz$, $x(y+z) = xy + xz$;

(3) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$,

则称 $\mathcal{A}$ 是一个实 (复) 代数.

以下我们总用 $\mathbf{R}$ 表示实数域, $\mathbf{C}$ 表示复数域, 且用 $\mathbb{F}$ 表示实数域或复数域. 现在给出单位元、逆元以及交换代数等概念.

定义 1.1.2　设 $\mathcal{A}$ 是一个实 (复) 代数,

(1) 如果存在 $e \in \mathcal{A}$, 使得对任意 $x \in \mathcal{A}$, 有 $xe = ex = x$, 则称 e 是 $\mathcal{A}$ 中的单位元.

(2) 若 $x \in \mathcal{A}$, 满足: 存在 $y \in \mathcal{A}$, 使得 $xy = yx = e$, 则称 x 是可逆元, 且 y 称为 x 的逆元.

(3) 如果对任意 $x, y \in \mathcal{A}$, 有 $xy = yx$, 则称 $\mathcal{A}$ 是交换代数.

无单位元的代数可以嵌入到一个有单位元的代数中.

性质 1.1.3　设 $\mathcal{A}$ 是一个代数, 且无单位元, 记

$$\mathcal{A}\times\mathbb{F}=\{(a,\lambda):a\in\mathcal{A},\lambda\in\mathbb{F}\}.$$

在 $\mathcal{A}\times\mathbb{F}$ 上定义加法、数乘与乘法如下: 对任意的 $(a,\alpha),(b,\beta)\in\mathcal{A}\times\mathbb{F}$ 以及 $\lambda\in\mathbb{F}$ 有

(1) 加法: $(a,\alpha)+(b,\beta)=(a+b,\alpha+\beta)$;

(2) 数乘: $\lambda(a,\alpha)=(\lambda a,\lambda\alpha)$;

(3) 乘法: $(a,\alpha)(b,\beta)=(ab+\alpha b+\beta a,\alpha\beta)$,

则 $\mathcal{A}\times\mathbb{F}$ 是一个有单位元的代数且 $(0,1)$ 是 $\mathcal{A}\times\mathbb{F}$ 中的单位元.

性质 1.1.3 容易验证. 注意如果作映射 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}\times\mathbb{F}$ 如下: $a\mapsto(a,0)$, 则 $\mathcal{A}$ 可看作 $\mathcal{A}\times\mathbb{F}$ 的子代数.

定义 1.1.4　设 $\mathcal{A}$ 是一个代数, $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个子代数, 若 $\{0\}\subset\mathcal{M}\subset\mathcal{A}$, 且 $\mathcal{A}\mathcal{M}=\{am:a\in\mathcal{A},m\in\mathcal{M}\}\subseteq\mathcal{M}$, $\mathcal{M}\mathcal{A}=\{ma:a\in\mathcal{A},m\in\mathcal{M}\}\subseteq\mathcal{M}$, 则称 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的双边理想, 简称为理想. 如果 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个理想, 且对于 $\mathcal{A}$ 的任何理想 $\mathcal{I}\supseteq\mathcal{M}$, 有 $\mathcal{I}=\mathcal{M}$, 则称 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个极大理想.

代数与代数的理想有如下基本性质.

性质 1.1.5　设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元 e 的交换代数, $0\neq a\in\mathcal{A}$, 则 a 不可逆的充分必要条件是: a 属于 $\mathcal{A}$ 的某个理想中.

证明　“$\Longrightarrow$”若 a 不可逆, 记 $\mathcal{M}=a\mathcal{A}$. 下证 $\mathcal{M}$ 即为 $\mathcal{A}$ 中含 a 的理想. 事实上, 容易验证 $a=ae\in\mathcal{M}$ 且 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数, 又对任意 $b\in\mathcal{A},m\in\mathcal{M}$, 存在 $c\in\mathcal{A}$, 使得 $m=ac$. 于是有 $bm=bac=abc\in\mathcal{M}$. 同理可得 $mb\in\mathcal{A}$. 最后仅需证明 $\{0\}\subset\mathcal{M}\subset\mathcal{A}$. 注意到 $0\neq a\in\mathcal{M}$, 所以 $\mathcal{M}\neq\{0\}$. 再证 $e\notin\mathcal{M}$ 即可, 若不然, 则 $e\in\mathcal{M}$, 即存在 $x\in\mathcal{A}$, 使得 $ax=e$, 注意到 $\mathcal{A}$ 是交换的, 所以 $ax=xa=e$, 这与 a 不可逆矛盾.

“$\Longleftarrow$”若存在理想 $\mathcal{M}$, 使得 $a\in\mathcal{M}$, 下证 a 不可逆, 否则存在 $b\in\mathcal{A}$, 使得 $ab=e$, 即 $e\in\mathcal{M}$, 这样对任意 $x\in\mathcal{A}$, 有 $x=xe\in\mathcal{M}$, 即 $\mathcal{M}=\mathcal{A}$, 矛盾. 证毕.

注　从性质 1.1.5 的证明可以看出, 理想中一定不含单位元, 进而不含可逆元.

性质 1.1.6　设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元的代数, 则

(1) $\mathcal{A}$ 中单位元是唯一的;

(2) $\mathcal{A}$ 中可逆元 a 的逆元是唯一的 (a 逆元记为 a^{-1});

(3) 若 $x,y\in A$ 是 $\mathcal{A}$ 中的可逆元, 则 xy 也可逆, 且 $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$.

证明　(1) 若 e_1,e_2 都是 $\mathcal{A}$ 中的单位元, 则有 $e_1=e_1e_2=e_2$.

(2) 若 $a\in\mathcal{A}$ 是可逆元, 且 $b,c\in\mathcal{A}$ 都是 a 的逆元, 记 e 为 $\mathcal{A}$ 的单位元, 则 $ab=ba=e$, $ac=ca=e$. 于是有 $b=be=bac=ec=c$.

(3) 因为 $(xy)(y^{-1}x^{-1})=x(yy^{-1})x^{-1}=xex^{-1}=e$, 同时有

$$(y^{-1}x^{-1})(xy)=y^{-1}(x^{-1}x)y=yey^{-1}=e,$$

所以 xy 可逆, 且 $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$. 证毕.

定义 1.1.7　设 $\mathcal{A}$ 是有单位元 e 的代数且 $a\in\mathcal{A}$.

(1) 若存在 $b\in\mathcal{A}$, 使得 $ba=e$, 则称 a 左可逆, 且 b 称为 $\mathcal{A}$ 的左逆元;

(2) 若存在 $b\in\mathcal{A}$, 使得 $ab=e$, 则称 a 右可逆, 且 b 称为 $\mathcal{A}$ 的右逆元;

(3) 若 $\mathcal{A}$ 的每个非零元都是可逆元, 则称 $\mathcal{A}$ 是可除代数;

(4) 若 $a^2=a$, 则称 a 是幂等元.

注　e 和 0 显然是幂等元, 被称为平凡的幂等元.

性质 1.1.8　设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元 e 的代数, $a\in\mathcal{A}$, 则 a 可逆的充分必要条件是 a 同时存在左、右逆元.

证明　"$\Longleftarrow$"显然.

"$\Longleftarrow$"若 a 存在左逆元 b 与右逆元 c, 则 $ba=ac=e$, 于是有 $b=be=bac=ec=c$. 故 a 可逆. 证毕.

注　若 a 存在左、右逆元, 则左、右逆元必相等, 且正好为 A 的逆元.

定义 1.1.9　设 $\mathcal{L}$ 是非空集合, "$\prec$"是 $\mathcal{L}$ 上满足如下条件的一个关系. 对任意的 $a,b,c\in\mathcal{L}$, 有

(1) $a\prec a$;

(2) 若 $a\prec b, b\prec a$, 则 $a=b$;

(3) 若 $a\prec b, b\prec c$, 则 $a\prec c$,

则称 $(\mathcal{L},\prec)$ 是以"$\prec$"为偏序的偏序集.

注　有时 $a\prec b$ 也记为 $b\succ a$.

定义 1.1.10　若 $(\mathcal{L},\prec)$ 是偏序集, 且 $\mathcal{L}_1\subseteq\mathcal{L}$.

(1) 若 $c\in\mathcal{L}$, 满足: 对任意的 $a\in\mathcal{L}_1$, 有 $a\prec c(c\prec a)$, 则称 c 是 $\mathcal{L}_1$ 的上界 (下界).

(2) 若 $c\in\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{L}_1$ 的上界 (下界), 且对 $\mathcal{L}_1$ 的任意上界 (下界)d, 有 $c\prec d(d\prec c)$, 则称 c 是 $\mathcal{L}_1$ 的最小上界 (最大下界).

(3) 若对任意的 $a,b\in\mathcal{L}$, 有 $\mathcal{L}_1=\{a,b\}$ 存在最小上界与最大下界, 则称 $(\mathcal{L},\prec)$ 是一个格.

(4) 若 $a\in\mathcal{L}$, 满足: 对任意的 $b\in\mathcal{L}$, 有 $b\prec a(a\prec b)$, 则称 a 是 $\mathcal{L}$ 的最大元 (最小元).

注　容易验证对偏序集 $(\mathcal{L},\prec)$, 如果 $\mathcal{L}_1\subseteq\mathcal{L}$ 存在最小上界 (最大下界), 则其最小上界 (最大下界) 是唯一的. 因此当 $(\mathcal{L},\prec)$ 是一个格时, 对任意的 $a,b\in\mathcal{L}$, $\{a,b\}$ 的最小上界与最大下界是唯一的, 分别记 $\{a,b\}$ 的最小上界与最大下界为 $a\vee b$ 与 $a\wedge b$. 因为最大元 (最小元) 必为极大元 (极小元), 所以最大元 (最小元) 也是唯一的. $\mathcal{L}$ 的最大元与最小元常分别记为 e 与 0.

性质 1.1.11 设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元 e 的代数, $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个理想, 则 $\mathcal{M}$ 必含于 $\mathcal{A}$ 的某个极大理想中.

证明 记 $\mathcal{Q}=\{\mathcal{J}:\mathcal{M}\subseteq\mathcal{J}$, 且 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的理想$\}$, 因为 $\mathcal{M}\in\mathcal{Q}$, 所以 $\mathcal{Q}\supset\{0\}$. 以包含关系 $\subseteq$ 为偏序, 下用 Zorn 引理证明 $\mathcal{Q}$ 存在极大元. 任取 $\mathcal{Q}$ 的一个全序子集 $\{\mathcal{I}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 记 $\mathcal{I}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{I}_\alpha$, 下证 $\mathcal{I}$ 是在 $\mathcal{Q}$ 中 $\{\mathcal{I}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 的上界.

由 $\{\mathcal{I}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 的全序性容易验证 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数. 又因为 $e\bar{\in}\mathcal{I}_\alpha$, 所以 $e\bar{\in}\mathcal{I}$ 且 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{I}\subset\mathcal{A}$. 对任意 $m\in\mathcal{I},a\in\mathcal{A}$, 存在 $\alpha\in\Lambda$, 使得 $m\in\mathcal{I}_\alpha$. 于是有 $am\in\mathcal{I}_\alpha\subseteq\mathcal{I}$, 同时 $ma\in\mathcal{I}_\alpha\subseteq\mathcal{I}$, 即 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的理想, 因此有 $\mathcal{I}\in\mathcal{Q}$. 这样 $\{\mathcal{I}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 在 $\mathcal{Q}$ 中有上界 $\mathcal{I}$. 由 Zorn 引理知, $\mathcal{Q}$ 有极大元, 记 $\mathcal{I}_0$ 是 $\mathcal{Q}$ 中的一个极大元. 显然 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{I}_0$, 只需证明 $\mathcal{I}_0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的极大理想. 事实上, 若有 $\mathcal{A}$ 的理想 $\mathcal{N}\supseteq\mathcal{I}_0$, 则 $\mathcal{N}\supseteq\mathcal{I}_0\supseteq\mathcal{M}$, 即 $\mathcal{N}\in\mathcal{Q}$, 注意到 $\mathcal{I}_0$ 是 $\mathcal{Q}$ 中的极大元, 所以 $\mathcal{I}_0=\mathcal{N}$, 因此 $\mathcal{I}_0$ 是 $\mathcal{A}$ 中含 $\mathcal{M}$ 的极大理想, 且 $\mathcal{I}_0\supseteq\mathcal{M}$. 证毕.

定理 1.1.12 设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元 e 的交换代数, $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个理想, 则 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的极大理想的充分必要条件是商代数 $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ 是可除代数.

证明 “$\Longrightarrow$”用反证法. 若 $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ 不是可除代数, 则存在非零元 $a+\mathcal{M}\in\mathcal{A}/\mathcal{M}$, 使得 $a+\mathcal{M}$ 不可逆. 因此 $a+\mathcal{M}\neq\mathcal{M}$, 即有 $a\notin\mathcal{M}$. 由性质 1.1.5 与性质 1.1.11 可得 $a+\mathcal{M}$ 含于 $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ 的某个极大理想 $\mathcal{I}$ 中, 记

$$\mathcal{J}=\{x+y:x+\mathcal{M}\in\mathcal{I},y\in\mathcal{M}\},$$

则 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个理想. 事实上, 对任意的 $x_i+y_i\in\mathcal{J}(i=1,2)$, $\lambda\in\mathbf{C}$, 其中 $x_i+\mathcal{M}\in\mathcal{I},y_i\in\mathcal{M}$. 于是有

$$(\lambda x_1+x_2)+\mathcal{M}=\lambda(x_1+\mathcal{M})+(x_2+\mathcal{M})\in\mathcal{I},$$

因此 $\lambda(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=(\lambda x_1+x_2)+(\lambda y_1+y_2)\in\mathcal{J}$. 又因为 $x_1x_2+\mathcal{M}=(x_1+\mathcal{M})(x_1+\mathcal{M})\in\mathcal{I}$, 所以有 $(x_1+y_1)(x_2+y_2)=x_1x_2+(x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2)\in\mathcal{J}$. 故 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}$ 一个子代数. 现在证明 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的理想, 事实上, 对任意的 $c\in\mathcal{A}$ 以及 $x+y\in\mathcal{J}$, 其中 $x+\mathcal{M}\in\mathcal{I},y\in\mathcal{M}$, 有 $(c+\mathcal{M})(x+\mathcal{M})=cx+\mathcal{M}\in\mathcal{I}$, 且 $cy\in\mathcal{M}$, 即 $cx+cy\in\mathcal{J}$, 或 $c(x+y)\in\mathcal{J}$. 同理 $(x+y)c\in\mathcal{J}$. 又因为 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ 中的理想, 所以存在 $b+\mathcal{M}\notin\mathcal{I}$. 下证 $b\notin\mathcal{J}$. 事实上, 若不然 $b\in\mathcal{J}$, 则存在 $x+\mathcal{M}\in\mathcal{I}$ 以及 $y\in\mathcal{M}$, 使得 $b=x+y$. 于是 $b-x=y\in\mathcal{M}$. 进而有 $b+\mathcal{M}=x+\mathcal{M}\in\mathcal{I}$, 矛盾. 故 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的理想. 注意到 $a=a+0\in\mathcal{J}$, $a\notin\mathcal{M}$ 且 $\mathcal{M}\subset\mathcal{J}$. 这与 M 是 $\mathcal{A}$ 中的极大理想矛盾. 故 $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ 是可除的.

“$\Longleftarrow$”若 $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ 是可除的. 下证 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 中极大理想. 若不然, 则必存在 $\mathcal{A}$ 中的极大理想 $\mathcal{I}$, 使得 $\mathcal{I}\supset\mathcal{M}$. 取 $x\in\mathcal{I}$, 但 $x\notin\mathcal{M}$, 则 $x+\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ 中的非零元, 故可逆. 于是存在 $y+\mathcal{M}\in\mathcal{A}/\mathcal{M}$, 使得 $(x+\mathcal{M})(y+\mathcal{M})=e+\mathcal{M}$, 即

$xy+\mathcal{M}=e+\mathcal{M}$, 或者 $xy-e\in\mathcal{M}$. 进而存在 $b\in\mathcal{M}$, 使得 $xy-e=b\in\mathcal{I}$. 因此 $e=xy-b\in\mathcal{I}$, 这与 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 的理想矛盾. 证毕.

命题 1.1.13 设 $(\mathcal{L},\prec)$ 是一个格, $a,b,c\in\mathcal{L}$, 则下列等式成立.

(1) 交换律: $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$;

(2) 结合律: $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$, $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$;

(3) $a\vee a=a$, $a\wedge a=a$;

(4) $(a\vee b)\wedge a=a$, $(a\wedge b)\vee a=a$.

证明 (1) 与 (3) 由定义显然可得.

(2) 由定义可知 $(a\vee b)\vee c\succ a\vee b$, 且 $(a\vee b)\vee c\succ c$, 又 $a\vee b\succ a, a\vee b\succ b$, 于是有 $(a\vee b)\vee c\succ a,b,c$. 因此 $(a\vee b)\vee c$ 是 $\{b,c\}$ 的上界, 即有 $(a\vee b)\vee c\succ b\vee c$, 故 $(a\vee b)\vee c\succ a\vee(b\vee c)$. 同理可证 $(a\vee b)\vee c\prec a\vee(b\vee c)$, 故 $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$. 类似可证 $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$.

(4) 因为 $(a\vee b)\wedge a$ 是 $\{a\vee b,a\}$ 的最大下界, 所以 $a\vee b\succ(a\vee b)\wedge a$, $a\succ(a\vee b)\wedge a$. 又因为 $a\vee b\succ a, a\succ a$, 所以 a 是 $\{a\vee b,a\}$ 的下界, 即 $(a\vee b)\wedge a\succ a$. 故 $(a\vee b)\wedge a=a$. 同理 $(a\wedge b)\vee a=a$. 证毕.

命题 1.1.14 设 $(\mathcal{L},\prec)$ 是一个格, $a,b\in\mathcal{L}$, 则下列命题等价:

(1) $a\prec b$;

(2) $a\wedge b=a$;

(3) $a\vee b=b$.

证明 由定义直接可得. 证毕.

命题 1.1.15 设 $\mathcal{L}$ 是非空集合, 在 $\mathcal{L}$ 上定义了两种运算"$\vee$""$\wedge$", 满足如下条件: 对任意的 $a,b,c\in\mathcal{L}$, 有下列等式成立:

(1) $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$;

(2) $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$, $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$;

(3) $a\vee a=a$, $a\wedge a=a$;

(4) $(a\vee b)\wedge a=a$, $(a\wedge b)\vee a=a$.

在 $\mathcal{L}$ 上定义一个关系"$\prec$"如下: 对任意的 $a,b\in\mathcal{L}$, 当 $a\vee b=b$ 时, 规定 $a\prec b$, 则下列命题成立.

(1) $(\mathcal{L},\prec)$ 是一个格;

(2) 若 $a,b\in\mathcal{L}$, 则 $\{a,b\}$ 的最大下界正好是 $a\wedge b$;

(3) 若 $a,b\in\mathcal{L}$, 则 $\{a,b\}$ 的最小上界正好是 $a\vee b$.

证明 (1) 对任意的 $a,b,c\in\mathcal{L}$, 有

(i) 因为 $a\vee a=a$, 由定义有 $a\prec a$.

(ii) 若 $a\prec b, b\prec a$, 即 $a\vee b=b, b\vee a=a$, 所以 $a=b\vee a=a\vee b=b$.

(iii) 若 $a \prec b, b \prec c$, 即 $a \vee b = b, b \vee c = c$, 于是有

$$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c.$$

由定义知 $a \prec c$. 故 $(\mathcal{L}, \prec)$ 是一个格.

(2) 若 $a, b \in \mathcal{L}$, 分别记 $a \vee' b$ 与 $a \wedge' b$ 为 $\{a, b\}$ 的最小上界与最大下界. 下证 $a \wedge b = a \wedge' b$ 即可. 事实上, 因为 $a \wedge' b$ 是 $\{a, b\}$ 的最大下界, 所以 $a, b \succ a \wedge' b$, 即有 $(a \wedge' b) \vee a = a$, $(a \wedge' b) \vee b = b$. 由条件, 有

$$\begin{aligned} &(a \wedge' b) \wedge (a \wedge b) = [(a \wedge' b) \wedge a] \wedge b \\ =& \{(a \wedge' b) \wedge [(a \wedge' b) \vee a]\} \wedge b \\ =& (a \wedge' b) \wedge b = (a \wedge' b) \wedge [(a \wedge' b) \vee b] = a \wedge' b. \end{aligned}$$

进而有

$$(a \wedge' b) \vee (a \wedge b) = [(a \wedge' b) \wedge (a \wedge b)] \vee (a \wedge b) = a \wedge b,$$

故 $a \wedge b \succ a \wedge' b$.

反之, 因为 $(a \wedge b) \vee a = a$, 由定义有 $a \wedge b \prec a$. 同理可得 $a \wedge b \prec b$, 即 $a \wedge b$ 是 $\{a, b\}$ 的下界, 而 $a \wedge' b$ 是 $\{a, b\}$ 的最大下界, 所以 $a \wedge b \prec a \wedge' b$. 故 $a \wedge' b = a \wedge b$. 证毕.

(3) 同 (2) 可证. 证毕.

定义 1.1.16　设 $(\mathcal{L}, \prec)$ 是一个格.

(1) 若对任意的子集都存在最小上界与最大下界, 则称 $(\mathcal{L}, \prec)$ 是一个完备格.

(2) 若对任意的 $a, b, c \in \mathcal{L}$, 有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$

则称 $(\mathcal{L}, \prec)$ 是一个分配格.

(3) 若 $(\mathcal{L}, \prec)$ 存在最大元 e 与最小元 0, 且对任意的 $a \in \mathcal{L}$, 存在 $a' \in \mathcal{L}$, 使得

$$a \vee a' = e, \quad a \wedge a' = 0,$$

则称 $(\mathcal{L}, \prec)$ 是一个可补格.

(4) 若 $(\mathcal{L}, \prec)$ 是分配格且存在最大元与最小元, 则称 $(\mathcal{L}, \prec)$ 是布尔代数.

命题 1.1.17　设 $(\mathcal{L}, \prec)$ 是一个格, 则 $(\mathcal{L}, \prec)$ 是一个分配格的充分必要条件是: 对任意的 $a, b, c \in \mathcal{L}$, 有 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

证明　"$\Longrightarrow$" 若 $(\mathcal{L}, \prec)$ 是分配格, 则对任意的 $a, b, c \in \mathcal{L}$, 有

$$\begin{aligned} &(a \vee b) \wedge (a \vee c) = [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ =& a \vee [(a \vee b) \wedge c] = a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \\ =& [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c). \end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$" 若任取 $a,b,c\in\mathcal{L}$, 有 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$, 则有

$$
\begin{aligned}
&(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=[(a\wedge b)\vee a]\wedge[(a\wedge b)\vee c]\\
=&a\wedge[(a\vee b)\wedge(b\vee c)]=[a\wedge(a\vee b)]\wedge(b\vee c)\\
=&a\wedge(b\vee c).
\end{aligned}
$$

故 $(\mathcal{L},\prec)$ 是分配格. 证毕.

命题 1.1.18 设 $(\mathcal{L},\prec)$ 是布尔代数, 则下列命题成立.

(1) 若 $a\in\mathcal{L}$, 则 a 的补元是唯一的 (a 的唯一补元记为 a').

(2) 若 $a,b\in\mathcal{L}$, 则下列等式成立:

$$(a\vee b)'=a'\wedge b';\quad (a\wedge b)'=a'\vee b';\quad (a')'=a.$$

(3) 若 $a,b\in\mathcal{L}$, 且 $a\prec b$, 则 $a'\succ b'$.

(4) 映射 $a\mapsto a'$ 是 $\mathcal{L}$ 到自身的双射.

证明 (1) 若 a_1,a_2 都是 a 的补元, 即 $a\vee a_i=e,a\wedge a_i=0(i=1,2)$, 注意到 e 与 0 分别为 $\mathcal{L}$ 的最大元与最小元, 由命题 1.1.14 可得

$$a_1=a_1\wedge e=a_1\wedge(a\vee a_2)=(a_1\wedge a)\vee(a_1\wedge a_2)=a\vee(a_1\wedge a_2)=a_1\wedge a_2.$$

所以 $a_1\prec a_2$. 同理可证 $a_2\prec a_1$, 故 $a_1=a_2$.

(2) 由命题 1.1.14 可得

$$
\begin{aligned}
&(a\vee b)\vee(a'\wedge b')=[(a\vee b)\vee a']\wedge[(a\vee b)\vee b']\\
=&[(a\vee a')\vee b]\wedge[a\vee(b\vee b')]=(e\vee b)\wedge(a\vee e)=e\wedge e=e,
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
(a\vee b)\wedge(a'\wedge b')&=[a\wedge(a'\wedge b')]\vee[b\wedge(a'\wedge b')]\\
&=(0\wedge b')\vee(0\wedge a')=0\vee 0=0,
\end{aligned}
$$

故 $a'\wedge b'$ 是 $a\vee b$ 的补元, 由补元的唯一性可得 $(a\vee b)'=a'\wedge b'$. 同理可证 $(a\wedge b)'=a'\vee b'$. 最后由 $a'\vee a=e,a'\wedge a=0$, 可得 a 是 a' 的补元, 即 $(a')'=a$.

(3) 若 $a\prec b$, 由命题 1.1.14 知 $a\vee b=b$, 进而有 $a'\wedge b'=(a\vee b)'=b'$. 再由命题 1.1.14 知 $b'\prec a'$.

(4) 由 (1) 知 $a\mapsto a'$ 为单射. 又对任意的 $a\in\mathcal{L}$, 存在 $a'\in\mathcal{L}$, 使得 $a'\mapsto(a')'=a$, 即 $a\mapsto a'$ 为满射. 故 $a\mapsto a'$ 为双射. 证毕.

1.2 Banach 代数的概念及其基本性质

在代数上赋予一个范数, 且使其与代数结构具有某中相容性, 就得到一种同时具有代数与拓扑结构的新研究对象, 即 Banach 代数.

定义 1.2.1　设 $\mathcal{A}$ 是一个代数, 且 $\mathcal{A}$ 上定义了一个范数 $\|\cdot\|$, 满足如下不等式: 对任意 $x,y\in\mathcal{A}$

$$\| xy \|\leqslant\| x \|\| y \|,$$

则称 $\mathcal{A}$ 是赋范代数. 特别地, 若 $(\mathcal{A},\|\cdot\|)$ 是完备的, 则称 $\mathcal{A}$ 是一个 Banach 代数.

算子代数中比较广泛且有较好性质的应该是的 Banach 代数. 下面我们来讨论 Banach 代数的最基本的性质.

性质 1.2.2　设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元 e 的 Banach 代数且 $\mathcal{A}$ 上的范数为 $\|\cdot\|$, 则存在 $\mathcal{A}$ 上与 $\|\cdot\|$ 等价范数 $\|\cdot\|'$, 使得 $(\mathcal{A},\|\cdot\|')$ 成为 Banach 代数且 $\| e\|'=1$.

证明　取定 $x\in\mathcal{A}$, 作映射 $L_x:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 如下: 对任意 $y\in\mathcal{A}$, 定义 $L_xy=xy$. 显然 L_x 是 $\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 的线性映射且对任意的 $y\in\mathcal{A}$, 有

$$\| L_xy \|=\| xy \|\leqslant\| x \|\| y \|,$$

故 $\| L_x \|\leqslant\| x \|$, 即 $L_x\in B(\mathcal{A})$ ($B(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 上的有界线性算子全体). 在 $\mathcal{A}$ 上定义新范数如下: 对任意的 $x\in\mathcal{A}$, 定义 $\| x \|'=\| L_x \|$. 下证 $\|\cdot\|'$ 即为所求范数.

(1) 先证 $\|\cdot\|'$ 是 $\mathcal{A}$ 上的范数. 事实上, 对任意的 $x,y\in\mathcal{A},\lambda\in C$, 有

(a) $\| x \|'=\| L_x \|\geqslant 0$, 且 $\| x \|'=0\Leftrightarrow\| L_x \|=0\Leftrightarrow$ 对任意的 $y\in\mathcal{A}$, 有 $xy=0\Leftrightarrow x=0$.

(b) $\| x+y \|'=\| L_{x+y} \|=\| L_x+L_y \|\leqslant\| L_x \|+\| L_x \|=\| x \|'+\| y \|'$.

(c) $\| \lambda x \|'=\| L_{\lambda x} \|=\| \lambda L_x \|=|\lambda|\| L_x \|=|\lambda|\| x \|'$.

综上所述 $\|\cdot\|'$ 是 $\mathcal{A}$ 上的范数.

(2) 因为 L_e 是 $\mathcal{A}$ 上的恒等算子, 所以 $\| e \|'=\| L_e \|=1$.

(3) 最后证 $\|\cdot\|'$ 与 $\|\cdot\|$ 等价. 事实上, 对任意 $x\in\mathcal{A}$, 因为 $L_xe=xe=x$, 所以 $\| x \|=\| L_xe \|\leqslant\| L_x \|\| e \|=\| x \|'\| e \|$. 因此有 $\dfrac{\| x \|}{\| e \|}\leqslant\| x \|'=\| L_x \|\leqslant\| x \|$. 故 $\|\cdot\|'$ 与 $\|\cdot\|$ 等价. 证毕.

注 1　以下对有单位元 e 的 Banach 代数假设 $\| e \|=1$. 这时 $\| x \|'=\| x \|$.

注 2　L_x 称为左乘算子, 显然每个左乘算子都是有界线性算子. 同样可定义右乘算子 R_x, 且 R_x 也是有界线性算子.

性质 1.2.3　设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元 e 的 Banach 代数, 则存在 $B(\mathcal{A})$ 的子代数 $\mathcal{B}$ 等距同构于 $\mathcal{A}$.

证明　对任意的 $x\in\mathcal{A}$, 由于 $L_x\in B(\mathcal{A})$, 记

$$\mathcal{B}=\{L_x:x\in\mathcal{A}\}\subseteq B(\mathcal{A}).$$

易验证 $\mathcal{B}$ 是 $B(\mathcal{A})$ 中的子代数. 下证 $\mathcal{B}$ 即为所求. 事实上, 作映射 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 如下: 对任意 $x\in\mathcal{A}$, 定义 $\varphi(x)=L_x$, 则 φ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的等距同构映射. 证毕.

Banach 代数的简单例子如下.

例 1.2.4 设 X 是一个 Banach 空间, 则 $B(X)$ 是一个 Banach 代数, 且 $B(X)$ 的每个闭子代数也是 Banach 代数.

例 1.2.5 设 X 是紧 Hausdorff 空间, $C(X)$ 表示 X 上的连续函数全体, 在通常的线性运算及乘法运算下 $C(X)$ 是一个代数. 若在 $C(X)$ 上定义范数如下: $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in X\}$, 则 $C(X)$ 是一个交换 Banach 代数, 且常函数 $x(t) \equiv 1$ 是 $C(X)$ 中的单位元.

性质 1.2.6 设 $\mathcal{A}$ 是一个无单位元的 Banach 代数, 则存在一个有单位元的 Banach 代数 $\mathcal{B}$, 使得 $\mathcal{A}$ 等距同构于 $\mathcal{B}$ 的某个子代数.

证明 作集合 $\mathcal{A} \times \mathbb{F}$, 如性质 1.1.3 在 $\mathcal{A} \times \mathbb{F}$ 定义加法、数乘与乘法, 则 $\mathcal{A} \times \mathbb{F}$ 是一个代数. 在 $\mathcal{A} \times \mathbb{F}$ 上定义范数如下: 对任意的 $(x, \lambda) \in \mathcal{A} \times \mathbb{F}$, 定义 $\|(x, \lambda)\|' = \|x\| + |\lambda|$, 则容易验证 $(\mathcal{A} \times \mathbb{F}, \|\cdot\|')$ 是有单位元 $(0, 1)$ 的 Banach 代数. 记 $\mathcal{D} = \{(x, 0) : x \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A} \times \mathbb{F}$, 则 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{A} \times \mathbb{F}$ 的 Banach 子代数. 作映射 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ 如下: 对任意的 $x \in \mathcal{A}$, 定义 $\varphi(x) = (x, 0)$, 容易验证 φ 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{D}$ 的等距同构映射. 证毕.

定义 1.2.7 设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元 e 的代数, $x_0 \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

(1) 若 $\lambda e - x_0$ 在 $\mathcal{A}$ 中可逆, 则称 λ 是 x_0 的正则点, x_0 的正则点全体之集称为正则集, 常记为 $\varrho_{\mathcal{A}}(x_0)$. 当 $\mathcal{A}$ 明确时, 简记为 $\varrho(x_0)$.

(2) 若 $\lambda e - x_0$ 在 $\mathcal{A}$ 中不可逆, 则称 λ 是 x_0 的谱点, x_0 的谱点全体之集称为谱集, 常记为 $\sigma_{\mathcal{A}}(x_0)$. 当 $\mathcal{A}$ 明确时, 简记为 $\sigma(x_0)$.

(3) 若 $\lambda e - x_0$ 在 $\mathcal{A}$ 中右可逆, 则称 λ 是 x_0 的右正则点, x_0 的右正则点全体之集称为右正则集, 常记为 $\varrho^r_{\mathcal{A}}(x_0)$. 当 $\mathcal{A}$ 明确时, 简记为 $\varrho^r(x_0)$.

(4) 若 $\lambda e - x_0$ 在 $\mathcal{A}$ 中非右可逆, 则称 λ 是 x_0 的右谱点, x_0 的右谱点全体之集称为右谱集, 常记为 $\sigma^r_{\mathcal{A}}(x_0)$. 当 $\mathcal{A}$ 明确时, 简记为 $\sigma^r(x_0)$.

(5) 若 $\lambda e - x_0$ 在 $\mathcal{A}$ 中左可逆, 则称 λ 是 x_0 的左正则点, x_0 的左正则点全体之集称为左正则集, 常记为 $\varrho^l_{\mathcal{A}}(x_0)$. 当 $\mathcal{A}$ 明确时, 简记为 $\varrho^l(x_0)$.

(6) 若 $\lambda e - x_0$ 在 $\mathcal{A}$ 中非左可逆, 则称 λ 是 x_0 的左谱点, x_0 的左谱点全体的集合称为左谱集, 常记为 $\sigma^l_{\mathcal{A}}(x_0)$. 当 $\mathcal{A}$ 明确时, 简记为 $\sigma^l(x_0)$.

注 由定义 1.2.7 不难看出 $\varrho(x_0) \cup \sigma(x_0) = \mathbb{F}$, $\varrho^r(x_0) \cup \sigma^r(x_0) = \mathbb{F}$, $\varrho^l(x_0) \cup \sigma^l(x_0) = \mathbb{F}$.

正则集与谱集有如下基本性质.

性质 1.2.8 设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元 e 的 Banach 代数, $x \in \mathcal{A}$ 且 $\|x\| < 1$, 则 $1 \in \varrho(x)$, 且

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} x^n.$$

证明 因为 $\| x \| < 1$, 所以有 $\sum_{n=0}^{\infty} \| x \|^n$ 收敛, 进而有 $\sum_{n=0}^{\infty} \| x^n \|$ 收敛. 记 $y_m = \sum_{k=0}^{m} x^k$, 下证 $\{y_m\}$ 是柯西序列. 事实上, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 $N > 0$, 使得当 $m > n > N$ 时, 有

$$\sum_{k=n+1}^{m} \| x^k \| = \left| \sum_{k=0}^{m} \| x^k \| - \sum_{k=0}^{n} \| x^k \| \right| < \varepsilon.$$

于是有

$$\| y_m - y_n \| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x^k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \| x^k \| < \varepsilon.$$

故 $\{y_m\}$ 是柯西序列, 记 $y = \lim_{m\to\infty} y_m = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

下证 y 正好是 $e - x$ 的逆元. 注意到, $\| x^{n+1} \| \leqslant \| x \|^{n+1} \to 0 (n \to \infty)$, 于是有

$$\begin{aligned}(e-x)y &= L_{e-x}y = L_{e-x}(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} L_{e-x}y_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (e-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} (e - x^{n+1}) = e.\end{aligned}$$

同理可证 $y(e-x) = e$, 故 $e - x$ 可逆, 即 $1 \in \varrho(x)$, 且

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} x^n.$$

证毕.

推论 1.2.9 设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元 e 的 Banach 代数, $x \in \mathcal{A}$, 则

$$\{\lambda \in \mathbb{F} : | \lambda | > \| x \|\} \subseteq \varrho(x).$$

证明 任取 $\lambda \in \mathbb{F}$, 且 $| \lambda | > \| x \|$, 则

$$\lambda e - x = \lambda e \left(e - \frac{x}{\lambda} \right),$$

且 $\left\| \frac{x}{\lambda} \right\| < 1$, 即有 $e - \dfrac{x}{\lambda}$ 可逆. 又 λe 有逆元 $\dfrac{e}{\lambda}$, 由性质 1.1.6 知 $\lambda e - x$ 可逆, 即 $\lambda \in \varrho(x)$. 证毕.

定理 1.2.10 设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元 e 的 Banach 代数, 记 $\mathcal{G} = \{x \in \mathcal{A} : x$ 是可逆元 $\}$, 则

(1) 对任意的 $x \in \mathcal{G}$, 有 $B\left(x, \dfrac{1}{\| x^{-1} \|}\right) \subseteq \mathcal{G}$. 特别地, $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的开集;

(2) 映射 $\varphi(x) = x^{-1}$ 是从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{G}$ 的连续映射.