全国高职高专教育“十一五”规划教材

管理工程数学

主编　刘　平

高等教育出版社
Higher Education Press

全国高职高专教育“十一五”规划教材

管理工程数学

GUAN LI GONG CHENG SHU XUE

主编 刘 平

副主编 刘 琳 王庭宽

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是全国高职高专教育“十一五”规划教材。全书分线性代数、线性规划、概率论、数理统计和数学实验五部分，各部分以讲清基本概念和思想方法为主，并配置了数量较多且与专业联系紧密、适合高职数学教学的应用实例，用实例引出数学概念，并用通俗易懂的语言阐述概念的内涵和实质，使数学知识通俗化、简单化、实用化和专业化；节后有习题；章末有颇具特色的小结和同步测验题；书末有习题答案。

本书可作为高职高专经济类与管理类专业的数学教材，也可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校的数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

管理工程数学/刘平主编. —北京：高等教育出版社，2010.2
ISBN 978-7-04-028898-8

Ⅰ.①管… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 002618 号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 王玲玲 **封面设计** 赵 阳 **责任绘图** 黄建英
版式设计 马敬茹 **责任校对** 刘 莉 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2010年2月第1版
印　　张	15.25	印　　次	2010年2月第1次印刷
字　　数	360 000	定　　价	17.30元

物料号　28898-00

前　言

本书是根据教育部《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，结合高职院校学生的特点编写的，以培养学生创新意识和实践能力为目标，以掌握概念、强化应用、培养技能为重点，充分体现“以应用为目的，以必需够用为度”，并兼顾学科体系的高职教学基本原则来确定教材内容。本书具有以下特点：

1. 采用“案例驱动”的方式，用实例引出数学概念，并用通俗易懂的语言阐述概念的内涵和实质。内容上纲目清晰，条理分明，简明实用。注重数学思想方法的介绍。

2. 淡化纯数学理论，突出实际应用，教材中精心编写了大量与专业联系紧密，适合高职数学教学的应用实例。尽量采用几何解释、数表、实例以加深对概念、思想方法的理解，并将基本方法条理化，以培养学生的应用能力。努力使数学知识通俗化、简单化、实用化和专业化，突出了高等职业技术人才培养过程中数学的基础性地位和工具性作用。

3. 形式新颖，结构合理。章前有学习目标，能使学生对本章所学内容、学习时目标更加明确；章末配有颇具特色的小结和同步测验，小结包括主要内容、重点难点、疑难解析。通过小结加强对学生的学习指导，重点和难点一目了然；结合学生特点，重点内容滚动复习，帮助理出知识框架和脉络，使其领会思想，掌握精髓。同步测验的题型丰富，与教学内容密切配合。

4. 本教材增加了数学实验方面的内容，强调与计算机应用相结合，加强了 MATLAB 软件的使用。

5. 本书参考学时为 68 学时。打 * 的内容根据专业需要选学，其他部分可以根据教学课时进行内容取舍，不必求全。

本书由刘平教授任主编，刘琳、王庭宽任副主编，李小敏、吕倩如、梁岩参加了编写。第一章由刘平编写，第二章由刘琳编写，第三章由吕倩如、李小敏编写，第四章由刘平、王庭宽编写，第五章由刘琳、梁岩编写，全书最后由主编统稿。

本书由高等教育出版社高等职业教育研究与出版中心策划组稿，高等教育出版社的编辑为本书的出版发行付出了辛勤劳动。河北行政学院孟少沛教授审阅了全部书稿，提出了许多修改意见。在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中若有不当之处，恳请同仁和读者批评指正，以便再版时更加完善。

编者
2009 年 12 月

目　　录

第一章

线性代数

学习目标

理解行列式的概念,了解行列式的代数余子式的概念,能按对角线展开法熟练计算二阶、三阶行列式,能用行列式的性质运用“降阶法”或“**化三角形法**”熟练计算 $n(n \leqslant 5)$ 阶行列式的值;会用克莱姆法则解较简单的线性方程组;理解矩阵、逆矩阵的有关概念,理解矩阵和行列式的本质区别,掌握矩阵的各种运算及求逆矩阵的方法,会解简单的矩阵方程;理解矩阵乘法与普通数的乘法的区别;理解矩阵秩的概念,掌握利用矩阵初等变换求矩阵秩的方法;掌握用初等变换求解线性方程组的方法;掌握一般线性方程组有解的充要条件及解的各种讨论.知道行列式、矩阵和线性方程组的实际应用.

在科学研究、生产实践和经济管理中,经常要遇到解多元一次线性方程组的问题,行列式和矩阵就是解线性方程组的重要工具.本章将介绍行列式和矩阵的一些基本概念、基本理论和基本计算方法,讨论一般线性方程组的解法,重点介绍行列式、矩阵和线性方程组的应用.

第一节　行　列　式

本节主要介绍行列式的概念、性质和计算方法,最后介绍解线性方程组的克莱姆法则及其应用.

1.1.1　行列式的定义

一、二阶行列式的定义

引例【二元线性方程组与二阶行列式】

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

用消元法易得其解:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

从解的形式中我们可以看出,其分母是由未知项的系数交叉相乘再求差组成,而分子则由其中一个未知项的系数与常数项交叉相乘再求差组成.

为方便记忆及应用，引进记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，并对这个记号给出定义：

定义 1　2^2个数 $a_{ij}(i=1,2;\quad j=1,2)$ 排成二行二列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为**二阶行列式**，记为 D. 它表示算式　$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素**，横排为**行**，纵排为**列**. a_{ij}的第一个下标 i 表示该元素所在的行数，叫**行指标**，第二个下标 j 表示该元素所在的列数，叫**列指标**. a_{ij}就是第 i 行与第 j 列交叉位置的元素. 此外，从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**.

我们称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为方程组(1.1.1)的**系数行列式**.

利用上述定义，(1.1.2)式的分子可以分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

可见，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1.1)的解可记为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1　求下列各二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

解(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=1\times(-2)-3\times 4=-14.$

(2) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}=\sin^2 x-(-\cos^2 x)=1.$

(3) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=4x-x^2.$

二、三阶行列式的定义

类似地，可以定义三阶行列式.

定义 2　3^2个元素 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 排成三行三列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**，记为 D. 它表示算式

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}. \tag{1.1.3}$$

(1.1.3)式右端被称为三阶行列式的展开式. 它有如下特点:一共有 6 项,每一项都是行列式的不同行、不同列的三个元素的乘积,其中三项带有“+”号,另三项带有“-”号. 为便于记忆,我们画出图 1.1,图中用实线连接的三元素之积带有“+”号,用虚线连接的三元素之积带有“-”号. 这种展开三阶行列式的方法称为**对角线展开法**.

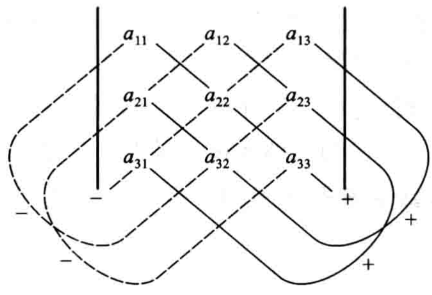

图 1.1

例 2 求下列各三阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1\times1\times3+3\times2\times2+(-1)\times4\times0-2\times1\times(-1)-0\times3\times3-1\times2\times4=9.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1\times4\times2+2\times1\times3+3\times6\times2-3\times4\times3-2\times2\times2-1\times1\times6=0.$

三、*n* 阶行列式的定义

前面,我们给出了二阶行列式和三阶行列式的定义,可以据此计算二、三阶行列式的值. 提问:三阶以上的行列式如何计算呢? 我们不妨回过头来再看一看三阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}. \qquad (1.1.4)$$

由(1.1.4)式可以看出,一个三阶行列式,可化为某一行(列)的元素与其对应的二阶行列式的乘积之和的形式. 这就意味着三阶行列式可化为二阶行列式来计算. 利用这个特点可以证明,四阶行列式、五阶行列式直至 n 阶行列式也可用其某一行(列)的元素与其对应的低一阶的行列式的乘积之和来计算. 为此,先引入余子式和代数余子式的概念.

定义 3(余子式和代数余子式) 在一个行列式中,去掉元素 a_{ij}所在的行和列,其余各元素按照原来的相对位置排列而成的低一阶的行列式称为元素 a_{ij}的**余子式**,记作 M_{ij}. 称 a_{ij}的余子式 M_{ij}与$(-1)^{i+j}$的乘积为元素 a_{ij}的**代数余子式**,记作 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如,在三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$中,

a_{11}的余子式 $M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$,$a_{11}$的代数余子式 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$.

a_{12}的余子式 $M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$,$a_{12}$的代数余子式 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$.

引入代数余子式的概念后,三阶行列式的值可表示为它的任一行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}(i=1,2,3),$$

或 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}(j=1,2,3)$.

定义 4 n^2个元素 $a_{ij}(i=1,2,3,\cdots,n;j=1,2,3,\cdots,n)$排列成 n 行 n 列的数表

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**,记为 D. n 阶行列式的值为:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)$$
或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n).$$

例 3 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&0&0&4\\1&2&-1&1\\3&1&1&2\\0&3&1&2\end{vmatrix}$.

解 按第一行展开,得

$$D=\begin{vmatrix}2&0&0&4\\1&2&-1&1\\3&1&1&2\\0&3&1&2\end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&2\\3&1&2\end{vmatrix}+4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&1&1\\0&3&1\end{vmatrix}$$

$$=2\times(-6)-4\times(-17)=56.$$

1.1.2 行列式的性质

利用行列式的定义计算行列式的值是非常麻烦的. 因此,我们要讨论行列式的性质以简化其计算. 下面,我们主要以二阶或三阶行列式为例介绍行列式的性质,并且所有这些性质对 n 阶行列式均成立.

性质 1 行列式的行与列互换,行列式的值不变.

例如, $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}$.

用二阶行列式来验证.

因为 $\begin{vmatrix}5&4\\3&2\end{vmatrix}=5\times2-4\times3=-2$, $\begin{vmatrix}5&3\\4&2\end{vmatrix}=5\times2-3\times4=-2$.

所以 $\begin{vmatrix}5&4\\3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3\\4&2\end{vmatrix}$.

将行列式 D 的行与列互换后,得到的行列式称为行列式 D 的**转置行列式**,记为 D' 或 D^{T}.

如 $D=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$, 则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}$,且 $D=D^{\mathrm{T}}$.

于是性质 1 又可写成:行列式 D 与其转置行列式 D^{T} 相等.

这个性质说明:在行列式中,行与列的地位是相当的,即行列式对行成立的性质对列也同样成立.

性质 2 将行列式中任意两行(列)互换位置后,行列式的值变号.

如第 i 行与第 j 行互换,记作 $r_i\leftrightarrow r_j$;第 i 列与第 j 列互换,记作 $c_i\leftrightarrow c_j$,其中 r_i 代表第 i 行,c_j 代表第 j 列.

例如,$D=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&2&1\\3&1&3\end{vmatrix}$,将其第一行与第二行互换可得

$$D_1=\begin{vmatrix}2&2&1\\1&3&2\\3&1&3\end{vmatrix}.$$

此时,$D=-12$,$D_1=12$, 所以 $D=-D_1$.

推论 1 若行列式中有两行(列)对应元素完全相同,则此行列式的值为零.

例如,设行列式为 D,将 D 中相同的两行互换,则由性质 2 得 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3 若行列式中某一行(列)的所有元素含有公因子,则此公因子可以提到行列式符号

外面.

例如，$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 2　若行列式中某一行(列)的元素全为零,则行列式的值为零.

推论 3　若行列式中某两行(列)的对应元素成比例,则行列式的值为零.

例如,$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = k\times 0 = 0.$$

性质 4　若行列式中某一行(列)的所有元素均为两项之和的形式,则此行列式等于两个行列式的和,而且这两个行列式除了这一行(列)外,其余的元素与原来行列式的对应元素相同.

例如,$\begin{vmatrix} a+b & c \\ e+f & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix}$.

性质 5　若将行列式的某一行(列)的每一个元素加上另一行(列)对应元素的 k 倍(简称对行(列)进行倍加运算),则行列式的值不变. 即

如将第 j 行(列)的每一个元素乘以 k 加到第 i 行(列)的对应元素上,记作 $r_i+kr_j(i\neq j)$;(c_i+kc_j).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

这是因为

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

这个性质在行列式的计算中起着较大的作用,利用它可以将行列式中某些元素变为零,从而简化行列式的计算.

1.1.3　行列式的计算

上面,我们介绍了行列式的性质与推论. 下面举例说明如何应用这些性质计算行列式.

例 4　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ -9 & 8 & -7 & 5 \\ 4 & -2 & 6 & 14 \\ 11 & 2 & 9 & -13 \end{vmatrix}$.

解 注意到第三行的所有元素有公因子 2,于是利用性质 3,有

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&3&7\\-9&8&-7&5\\4&-2&6&14\\11&2&9&-13\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-1&3&7\\-9&8&-7&5\\2&-1&3&7\\11&2&9&-13\end{vmatrix},$$

上式右边行列式中第一行和第三行相同,由推论 1 可知 $D=0$.

例 5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&7&8&9\\-5&3&1&-8\\1&7&8&9\\6&4&2&-16\end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix}2&7&8&9\\-5&3&1&-8\\1&7&8&9\\6&4&2&-16\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-r_3}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-5&3&1&-8\\1&7&8&9\\6&4&2&-16\end{vmatrix},$$

由于第一行只有一个非零元素,故按第一行展开,得

$$D=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1&-8\\7&8&9\\4&2&-16\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&-8\\7&8&9\\4&2&-16\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&1&-8\\7&8&9\\2&1&-8\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-r_3}2\begin{vmatrix}1&0&0\\7&8&9\\2&1&-8\end{vmatrix}$$

$$=2\times\left[1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}8&9\\1&-8\end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}7&9\\2&-8\end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}7&8\\2&1\end{vmatrix}\right]$$

$$=2\times(-73)=-146.$$

例 6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&0\\a_{21}&a_{22}&0&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&0\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$.

解 由于第一行只有一个非零元素,故按第一行展开,得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0&0\\a_{32}&a_{33}&0\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&0\\a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

例 6 中行列式主对角线以上的元素全为零,这样的行列式称为**下三角形行列式**. 由例 6 的计算过程,可得出这样的**结论**:下三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

类似地,如果行列式主对角线以下的元素全为零,则行列式称为**上三角形行列式**,且上三角形行列式的值也等于主对角线上元素的积. 上三角形行列式和下三角形行列式统称为**三角形行列式**,三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积. 行列式非主对角线上元素全为零的行列式称为**对角形行列式**,易知,它的值等于主对角线上元素的乘积.

对于一般的行列式来说,都可以利用两行(列)互换以及对行(列)的倍加运算把其化为三角

形行列式,再利用三角形行列式的上述结论得出行列式的值,这种方法称为"**化三角形法**".

例 7 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}=40.$$

上述运算步骤是先考虑第一列,若第一列中有非零元素,则先利用行互换以及行倍加运算,使第一列中除第一个元素外其他元素均为零,继而再考虑第二列,目标是使第二列中主对角线以下的元素全为零,依次下去就可得到上三角形行列式.

***例 8** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$.

解

$$D \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix} =(a+3b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}} (a+3b)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} =(a+3b)(a-b)^3.$$

例 8 无论从题型还是解法上,都具有相当的代表性. 凡是各行(列)元素之和均相等的行列式都可以用这种方法计算.

计算行列式的另一种基本方法是"**降阶法**",选择零元素最多的行(列)将行列式展开,或利用性质 5 把行列式某一行(列)的元素化为仅有一个非零元素,再按这一行(列)将行列式展开,达到降低行列式的阶的目的,这种方法称为"**降阶法**".

例 9 求下列方程中 x 的值.

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -2 & x-3 & -1 \\ -3 & -1 & x-2 \end{vmatrix}=0.$$

解

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -2 & x-3 & -1 \\ -3 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3} \begin{vmatrix} x-6 & x-6 & x-6 \\ -2 & x-3 & -1 \\ -3 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & x-3 & -1 \\ -3 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}(x-6)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & x-1 & 1 \\ -3 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-6)\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-6)(x^2-3),$$

即 $(x-6)(x^2-3)=0$,

其解为 $x_1=6$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$.

*1.1.4 行列式的应用——克莱姆法则

现在我们来应用行列式求解线性方程组.这里只考虑方程组中方程个数与未知量的个数相等的情形,至于一般的情形将在第四节讨论.

设含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1.1.5}$$

行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为方程组(1.1.5)的**系数行列式**;而把 D 中第 j 列的元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 分别换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 而得到的行列式记为 D_j.

克莱姆法则 若线性方程组(1.1.5)的系数行列式 $D\neq 0$,则方程组(1.1.5)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

(证明略.)

例 10 **【飞行速度】**一架飞机以 x_1 km/h 的速度飞行,风速为 x_2 km/h,若飞机顺风飞行时,飞机相对地面的速度为 300 km/h,逆风飞行时,飞机相对地面的速度为 220 km/h,问飞机的飞行速度和风速分别是多少?

解 由题意知,飞机的飞行速度为 x_1 km/h,风速为 x_2 km/h. 根据题意,得

$$\begin{cases} x_1+x_2=300, \\ x_1-x_2=220. \end{cases}$$

它的系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$,故方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}300 & 1\\ 220 & -1\end{vmatrix}=-520,\ D_2=\begin{vmatrix}1 & 300\\ 1 & 220\end{vmatrix}=-80$$

因此,$x_1=\dfrac{D_1}{D}=260(\mathrm{km/h})$,$x_2=\dfrac{D_2}{D}=40(\mathrm{km/h})$.

即　飞机的飞行速度为260(km/h)，　风速为40(km/h).

例 11　【生产计划安排】某工厂生产 A、B、C 三种产品,每种产品所需工时数由表 1.1 给出(单位:h),已知机械甲、乙、丙能提供的工时分别是550 h、1 200 h、850 h,如果要充分利用所提供的工时,产品 A、B、C 的产量应为多少?

表 1.1

机械＼产品	A	B	C
甲	1	1	2
乙	4	2	1
丙	2	1	3

解　设产品 A、B、C 的产量应为 x_1、x_2、x_3(件),根据题意可得方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=550,\\ 4x_1+2x_2+x_3=1\ 200,\\ 2x_1+x_2+3x_3=850.\end{cases}$$

它的系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=-5\neq 0$,故方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}550 & 1 & 2\\ 1\ 200 & 2 & 1\\ 850 & 1 & 3\end{vmatrix}=-1\ 000,\ D_2=\begin{vmatrix}1 & 550 & 2\\ 4 & 1\ 200 & 1\\ 2 & 850 & 3\end{vmatrix}=-750,\ D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 550\\ 4 & 2 & 1\ 200\\ 2 & 1 & 850\end{vmatrix}=-500,$$

因此,$x_1=\dfrac{D_1}{D}=200$,$x_2=\dfrac{D_2}{D}=150$,$x_3=\dfrac{D_3}{D}=100$.

即产品 A、B、C 的产量分别为200件、150件、100件.

第二节　矩阵及其运算

矩阵是线性代数的研究对象之一,是解线性方程组的有力工具,也是现代数学各分支中不可缺少的工具. 随着科技的进步和社会的发展,它还广泛地应用于自然科学、工程技术、经济管理以及社会科学等领域. 本节主要介绍矩阵的概念、运算及其应用.

1.2.1 矩阵的概念

一、矩阵的定义

引例1【电器销售】 某公司三种家用电器在今年四、五、六三个月份的销售额(单位:百万元)见表1.2.

表1.2

销售额 产品 \ 月份	四	五	六
电风扇	5	6	7
电冰箱	10	9	12
空调	4	7	9

去掉表格线且数字保持相对位置,可以简化成一个3行3列的数表:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 9 & 12 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

我们称这种数表为矩阵,其定义如下:

定义1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n **列矩阵**,简称 $m\times n$ **矩阵**. 数 a_{ij} 称为矩阵的**元素**,a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素,i 和 j 分别称为**行标**和**列标**. $m\times n$ 矩阵可记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$,有时简记为 $\boldsymbol{A}$. 矩阵通常用大写的英文字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$…表示.

如,对于含有 n 个未知量,m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

如果把它的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 保持原来的相对位置写出,就得到如下含有 m 行 n 列的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{或简写为 } \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}、\boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

如果把它的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 和常数项 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 保持原来的相对位置