高等教育精品课程规划教材

石 琳 张 景 主编

概率论与数理统计

——理论与演练

西南交通大学出版社
http://press.swjtu.edu.cn

高等教育精品课程规划教材

概率论与数理统计

——理论与演练

主 编 石 琳 张 景
编 者 李江鹏 李 妍 于 涛
赵 娜 赵利云

西南交通大学出版社
·成都·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计：理论与演练 / 石林，张景主编.
—成都：西南交通大学出版社，2013.6
高等教育精品课程规划教材
ISBN 978-7-5643-2386-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①石…②张… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 139541 号

高等教育精品课程规划教材

概率论与数理统计

——理论与演练

主编　石　琳　张　景

责任编辑	张华敏
特邀编辑	唐建明　陈正余
封面设计	水木时代(北京)图书中心
出版发行	西南交通大学出版社 (成都二环路北一段 111 号)
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http://press.swjtu.edu.cn
印　　刷	北京广达印刷有限公司
成品尺寸	170mm×228 mm
印　　张	18.25
字　　数	328 千字
版　　次	2013 年 8 月第 1 版
印　　次	2013 年 8 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-2386-8
定　　价	31.00 元

内容简介

本书根据教育部最新修订高等院校本科工科类专业教学基础课程和教学基本要求，结合作者长期教学经验编写而成。在保持传统教材理论体系科学、完整的前提下，力求做到结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂，并增加了案例演示部分。

全书共十章，第一章至第五章为概率论部分，内容包括随机事件及其概率、随机变量、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理。第六章至第十章包括数理统计部分，内容有数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析。每章最后一节给出了部分内容的计算机模拟，将抽象内容与数学实验有机结合，提高了学生的学习积极性。各章均配习题。书后附有习题答案，既便于教学，又利于考试复习。

经审定，本书可作为高等院校工科类各专业、经济管理类专业教材，也可供作相关工程技术人员业务培训教材。

编审说明

“概率论与数理统计”是大学数学最重要的基础课程之一，对培养学生的思维能力、数学应用能力和分析判断能力至关重要。

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高等教育向大众化教育转变中社会对高校应用型人才培养的各类要求，急需探索应用型人才培养的教学内容、课程体系。为此，我们组织多年从事“概率论与数理统计”课程教学工作的骨干教师进行研讨，并根据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和应用型本科大学的特点，经过反复探讨，共同编写了《概率论与数理统计——理论与演练》教材。

本教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的。在编写过程中力求重点突出，循序渐进，使读者逐步掌握概率论与数理统计中的概念和基本计算方法。为培养学生应用所学知识解决实际问题的能力，各章均附加了案例演示部分，大大提高了学生学习的积极性。在例题选取上，侧重基础知识和基本计算能力的培养。

本教材在编写过程中，编者参考借鉴了国内外的一些同类教材，从中吸取了丰富的营养，在此向这些教材的作者表示深深的感谢。

本书由石琳、张景主编，石琳主审，参编人员包括李江鹏、李妍、于涛、赵娜、赵利云等。

本教材虽经多年教学经验积累而成，但由于编者水平有限，书中缺点和疏漏之处在所难免，敬请同行专家和读者不吝批评指正。

高等教育精品课程规划教材编审指导委员会

2013 年 8 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

【内容与要求】

本章作为深入学习概率论的基础和前提，我们首先介绍了概率论中两个最基本的概念：随机事件与随机事件的概率；之后介绍了关于概率的基本性质；最后讨论了条件概率与事件的独立性. 通过本章的学习，我们需要：

1. 了解样本空间、样本点等概念，理解随机事件的概念，掌握事件间的关系及运算；

2. 理解概率公理化定义、条件概率等概念，掌握概率的基本性质，能够计算简单的古典概型概率以及几何概型概率，掌握概率的几个基本公式：加法公式、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式；

3. 理解事件独立性的概念，会用事件的独立性进行概率计算，理解独立重复试验的概念.

引　言

我们对自然界和人类社会进行研究时，发现不同性质的现象大体可以分为两类. 一类现象是确定的，它的出现与否完全取决于它所依附的条件，当条件满足时，现象一定发生；反之，则不一定会发生. 比如，“在一个标准大气压下，纯水加热达到 100 ℃时必然沸腾，温度为 0 ℃时必然结冰”；“同性磁铁相互排斥，异性磁铁相互吸引”，等等. 这类现象具有条件完全决定结果的特点，称为**确定性现象或必然现象**.

另一类现象是随机的. 比如，“测量一个物体的长度，其测量误差的大小”；“从一批灯管中随机取一个，灯管的寿命长短”等都是随机现象. 这类现象具有条件不能完全决定结果的特点，称为**随机现象**.

人们经过长期实践及深入研究后，发现随机现象虽然就每次试验来说具

有偶然性，但在大量的重复试验之下却呈现出某种规律性. 例如，多次抛一枚硬币，出现正面次数和反面次数约各占一半；多次观察某电话交换台在1小时内接到的呼叫次数，会发现具有一定的规律. 这样，可把随机现象更确切地解释为：在个别试验中虽具有不确定性，但在大量重复试验中却呈现出某种统计规律性的现象.

概率论与数理统计，就是从数量方面研究和揭示随机现象统计规律性的一门基础学科.

它的应用非常广泛，几乎渗透到所有科学技术领域，如天文、气象、工业、农业、国防与国民经济的各个部门.

第一节 样本空间、随机事件

1. 随机试验

为了研究随机现象，就要对随机现象进行观察、测量或进行实验. 为了叙述方便，统称为试验. 若试验具有以下3个特点：

1° 试验可以在相同的条件下重复地进行；

2° 试验的所有可能结果是明确的，并且不止一个；

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，

则称这样的试验为**随机试验**(random trial)，记为 E.

下面举一些随机试验的例子.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H 和反面 T 出现的情况；

E_2：从一批设备中，任取一台设备记录无故障运行时间；

E_3：城市某一交通路口，指定 1 h 内的汽车数量；

E_4：记录某一地区1年内的最高温度和最低温度.

2. 样本空间与随机事件

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为**样本空间**(sample space)，记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 的每个基本结果，称为**样本点**，记为 ω.

下面给出前面提到的试验 $E_k(k=1,2,3,4)$ 的样本空间 Ω_k：

Ω_1：$\{H,T\}$；

Ω_2：$\{t \mid t \geqslant 0\}$，其中 t 为所取一台设备的无故障工作时间；

Ω_3：$\{0,1,2,3,\cdots\}$；

Ω_4：$\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，其中 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1.

随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的**随机事件**(random event)，简称事件，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

特别地，Ω 是所有样本点构成的集合，它在每次试验中都必然发生，称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不含任何样本点，在每次试验中都不会发生，称为**不可能事件**. 由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 例如，试验 E_1 有两个基本事件$\{\mathrm{H}\}$，$\{\mathrm{T}\}$.

3. 事件之间的关系及运算

一般来说，每一个随机试验都有若干个随机事件，这些事件是有一定联系的. 因此，需要研究在同一试验中的随机事件间的关系与运算，这对于研究复杂的随机事件以及概率的计算是非常有用的.

设试验 E 的样本空间为 Ω，A、B、C、$A_i(i=1,2,\cdots)$ 是试验 E 的事件. 下面介绍事件之间的关系与运算.

1）事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A（或事件 A 包含于事件 B）**，记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称**事件 A 与事件 B 相等（或等价）**，记为 $A=B$.

例如，在 E_2 中，设 $A=\{$设备无故障工作时间不超过500 h$\}$，$B=\{$设备无故障工作时间不超过 1 000 h$\}$，则 $A\subset B$.

为了方便起见，规定对任意事件 A，有 $\varnothing\subset A$. 显然，对任一事件 A，有$A\subset\Omega$.

2）事件的并(和)

“事件 A 与 B 中至少有一个发生”的事件，称为**事件 A 与事件 B 的并(和)**，记为 $A\cup B$.

$A\cup B$ 是由属于A 或属于B 的所有样本点组成的集合. 对任一事件A，有

$$A\cup\Omega=\Omega;\quad A\cup\varnothing=A.$$

一般地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，表示“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生”.

可列事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，它们都表示“可列

无穷多个事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 中至少有一个发生”.

3）事件的交（积）

“事件 A 与 B 同时发生”的事件，称为**事件 A 与事件 B 的交（积）**，记为 $A\cap B$ 或(AB).

$A\cap B$ 是由既属于 A 又属于 B 的样本点组成的集合. 对任一事件 A，有

$$A\cap\Omega=A;\quad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

一般地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，表示“$A_1$，$A_2,\cdots,A_n$ 中 n 个事件同时发生”.

可列事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积记为 $A_1A_2\cdots$ 或 $A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，表示“可列无穷多个事件 A_i 同时发生”.

4）事件的差

“事件 A 发生而 B 不发生”的事件，称为**事件 A 与事件 B 的差**，记为 $A-B$.

$A-B$ 是由属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合. 对任意事件 A 和 B，有

$$A-A=\varnothing;\quad A-\varnothing=A;\quad A-B=A\overline{B}=A-AB.$$

5）互逆（对立）事件

若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称**事件 A 与事件 B 互为逆事件（或对立事件）**. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

$\overline{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的事件，这一事件表示“A 不发生”.

6）互斥（互不相容）事件

如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生，则称**事件 A 与 B 为互不相容（互斥）**，记作 $A\cap B=\varnothing$.

若 A 与 B 互不相容，则 A 与 B 没有公共的样本点. 例如，基本事件是两两互不相容的.

若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\cup B$，记作：$A+B$(A 与 B 的直和).

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件是互不相容的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥.

对立事件必为互不相容事件，互不相容事件未必为对立事件.

以上事件之间的关系及运算可以用文氏图来直观地描述. 若用平面上一个矩形表示样本空间 Ω，矩形内的点表示样本点，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A

与事件 B,则 A 与 B 的各种关系及运算如下图所示(见图 1-1 ～ 图1-6).

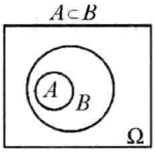

图 1-1

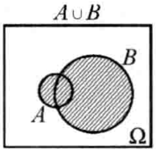

图 1-2

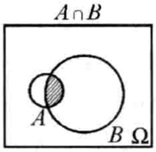

图 1-3

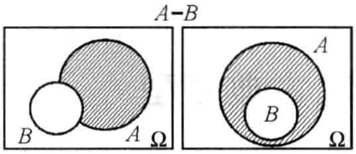

图 1-4

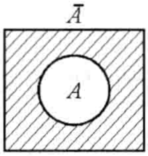

图 1-5

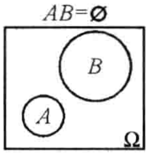

图 1-6

4. 事件的运算律

与集合论中集合运算一样,可以验证一般事件之间有下列运算规律:

1°　交换律　$A \cup B = B \cup A$,　$A \cap B = B \cap A$;

2°　结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

3°　分配律　$A \cap (B \cup C) = AB \cup AC$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

4°　对偶律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

对偶律的推广,即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

例 1.1　设一个工厂生产了 3 个零件,$A_i(i = 1,2,3)$ 表示生产的第 i 个零件为正品. 试用 A_i 的运算式表示下列各事件:

(1) 没有一个次品:$A_1A_2A_3$;

(2) 至少有一个次品:$\overline{A_1A_2A_3}$;

(3) 只有一个次品:$\overline{A}_1A_2A_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup A_1A_2\overline{A}_3$;

(4) 恰有两个次品:$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3 \cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3$.

例 1.2　现检查一批产品,只区分每件产品是否为正品. 设事件 A 表示"第一个产品为次品,第二个产品为正品",求其对立事件 $\overline{A}$.

解　设 B ="第一个产品是次品",C ="第二个产品是正品",则 $A = BC$,

故 $\overline{A} = \overline{BC} = \overline{B} \cup \overline{C} =$“第一个产品是正品或第二个产品是次品”.

例 1.3 在一堆球中任选一个球. 若事件 A 表示被选球是红色的，事件 B 表示该球是铁球，事件 C 表示该球是不合格品.

(1) 叙述 $AB\overline{C}$ 的意义；

(2) 在什么条件下 $ABC = C$ 成立？

解 (1)$AB\overline{C}$ 表示“该球是红色的铁球，且是合格品”；

(2) 当所有的不合格品都是红色的铁球时，$ABC = C$ 成立.

第二节 概率、古典概型

除必然事件与不可能事件外，任一随机事件在一次试验中都有可能发生，也有可能不发生. 不仅要知道它们可能出现哪些事件，更重要的是要知道各事件出现的可能性的大小. 为此，我们首先引入频率的概念，它直观地描述了事件发生的频繁程度. 进而我们提出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数 —— 概率，并介绍了概率的公理化定义.

1. 频率

定义 1.1 设在相同的条件下，进行了 n 次试验. 若随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**(frequency)，记为 $f_n(A)$. 即

$$f_n(A) = \frac{m}{n}. \tag{1-1}$$

由定义 1.1 容易得到，频率具有以下性质：

1° 对任一事件 A，有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

2° 对必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega) = 1$；

3° 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i).$$

事件 A 的频率 $f_n(A)$ 表示事件 A 发生的频繁程度. 频率大，事件 A 发生就频繁，在一次试验中事件 A 发生的可能性也就大；反之，频率小，事件 A 发生就很少，在一次试验中事件 A 发生的可能性也就小. 但由于 $f_n(A)$ 具有随机性，所以用频率来度量事件 A 出现的可能性大小是不确切的. 即使同样是进行 n

次试验，$f_n(A)$ 的值也不一定相同.

为了寻求事件 A 出现的规律性，历史上有人做过成千上万次抛硬币试验，下面列出他们的部分试验结果，如表 1-1 所示.

表 1-1

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	出现正面的频率
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维　尼	30 000	14 994	0.499 8

从表 1-1 中，我们可以发现，随着重复试验次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 越来越稳定在 0.5 数值周围. 频率具有“稳定性”的这一特点，说明事件 A 发生可能性大小的数具有一定的客观存在性. 因而可将频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时逐渐趋向稳定的这个常数定义为事件 A 发生的概率. 我们得到了下面概率的统计定义.

2. 概率的统计定义

定义 1.2　设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 m，频率 $\frac{m}{n}$ 随着 n 的不断增大趋向于某一个稳定的常数 p，则称**数 p 为事件 A 发生的概率**，记为

$$P(A) = p.$$

概率的这种定义，称为**概率的统计定义**.

要注意的是，上述定义并没有提供确切计算概率的方法，因为我们永远不可能依据它确切地定出任何一个事件的概率. 而且，在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验.

为了理论研究的需要，我们可通过频率的稳定性和频率的性质给出概率的公理化定义.

3. 概率的公理化定义

定义 1.3　设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，对于 Ω 中的每一个事件 A 对应一实数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足以下条件：

1°　**非负性**：$P(A) \geqslant 0$；

2°　**规范性**：$P(\Omega) = 1$；

3° 可列可加性:对于两两互不相容的可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称**实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率**(probability).

由概率公理化定义,可以推出概率的一些性质.

性质 1 $P(\varnothing) = 0$.

证 由于 $\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$,且 $\Omega, \varnothing, \varnothing, \cdots$ 两两互不相容,则

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots,$$

所以,

$$P(\varnothing) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots = 0, \text{又 } P(\varnothing) \geqslant 0,$$

那么,

$$P(\varnothing) = 0.$$

性质 2(有限可加性) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互不相容事件,则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

证 $\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n + \varnothing + \varnothing + \cdots$,

它们两两互不相容,则根据可列可加性有:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + \\ &\quad P(\varnothing) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \end{aligned}$$

性质 3 设 A, B 是两个事件,若 $A \subset B$,则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad \text{且} \quad P(A) \leqslant P(B).$$

证 因为 $B = A + (B - A)$,而且,A 与 $B - A$ 互不相容. 所以,$P(B) = P(A) + P(B - A)$,则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$,$P(A) \leqslant P(B)$.

性质 4 对任一事件 A,$P(A) \leqslant 1$,$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证 因为 $\Omega = A + \overline{A}$,则由有限可加性:$P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$,即 $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. 所以,$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,$P(A) \leqslant 1$

性质 5(加法公式) 对于任意两个事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1-2}$$

证 由于 $A \cup B = A \cup (B - AB)$,且 $A \cap (B - AB) = \varnothing$,$AB \subset B$. 根据性质 2、性质 3 可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$$
$$=P(B)-P(AB).$$

由性质 5 还可推广到 3 个事件的情形. 设 A,B,C 为任意 3 个事件，则有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

例 1.4　设 A,B 为两事件，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$，求：

(1) A,B 都发生的概率；

(2) A 发生但 B 不发生的概率；

(3) 至少有一个事件不发生的概率.

解　(1) $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
$$=0.3+0.4-0.6=0.1;$$

(2) $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$；

(3) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9$.

4. 古典概型

在概率的发展史上，人们最早研究的随机试验是“抛硬币”、“掷骰子”之类的问题. 这些试验的共同特点是：

1°　试验的样本空间 Ω 所含的基本事件的个数是有限的，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\};$$

2°　试验中每个基本事件发生的可能性是相等的，即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n).$$

具有上述两个特点的试验，叫做**古典概型试验**，简称**古典概型**或称为**等可能概型**.

定义 1.4　在古典概型中，设样本空间 Ω 所含的基本事件总数为 n，事件 A 含有 Ω 中的 m 个基本事件，则规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

古典概率定义是概率公理化定义的特殊情形，显然它满足概率的性质.

例 1.5　某一时刻医院出生了两个婴儿，求：

(1) 恰有一个男孩的概率；

(2) 至少有一个男孩的概率.

解　某一时刻生了两个婴儿这一事件的样本空间是

$$\Omega=\{男男,男女,女男,女女\};$$

Ω 中包含 4 个元素，且由对称性知每个元素发生的可能性相同.