

射影微分几何学

周丽珍 易 中 编著

冶金工业出版社

014042794

射影微分几何学

周丽珍 易 中

0186.13
02



0186.13
02

北 京

冶金工业出版社

2014



北航

C1729166

内 容 简 介

本书从李群和李代数、射影曲线、射影曲面、射影共轭网、射影联络空间、射影球丛几何、对称黎曼空间七个方面介绍了射影微分几何学的初步知识。

本书可供仪器仪表、电子、数控、机电、建筑设备、结构工程、计算机、金融和建筑物理等专业的科技人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

射影微分几何学/周丽珍, 易中编著. —北京: 冶金工业出版社, 2014.4

ISBN 978-7-5024-5899-7

I. ①射… II. ①周… ②易… III. ①射影微分几何
IV. ①O186.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 043481 号

出 版 人 谭学余

地 址 北京北河沿大街嵩祝院北巷 39 号, 邮编 100009

电 话 (010)64027926 电子信箱 yjcbs@cnmip.com.cn

责任编辑 于昕蕾 美术编辑 彭子赫 版式设计 孙跃红

责任校对 王永欣 责任印制 牛晓波

ISBN 978-7-5024-5899-7

冶金工业出版社出版发行; 各地新华书店经销; 北京百善印刷厂印刷
2014 年 4 月第 1 版, 2014 年 4 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32; 16 印张; 429 千字; 503 页

49.00 元

冶金工业出版社投稿电话: (010)64027932 投稿邮箱: tougao@cnmip.com.cn

冶金工业出版社发行部 电话: (010)64044283 传真: (010)64027893

冶金书店 地址: 北京东四西大街 46 号(100010) 电话: (010)65289081(兼传真)

(本书如有印装质量问题, 本社发行部负责退换)

前 言

射影微分几何学既可以作为射影几何学的延伸,也可以作为微分几何学的一个分支。在射影微分几何学领域,以苏步青先生为代表的中国数学家做出了杰出的贡献。

射影是最基本的数学概念之一,射影微分几何学与许多数学分支都有重要的联系。微分几何学的研究通常分成两个部分,即局部的和整体的;现代微分几何学是研究整体性质的,而整体性质研究又是以局部性质研究为基础的。

本书重点讨论射影微分几何学中曲线、曲面的局部性质,从李群和李代数、射影曲线、射影曲面、射影共轭网、射影联络空间、射影球丛几何、对称黎曼空间七个方面介绍了射影微分几何学的初步知识。

本书可供仪器仪表、电子、数控、机电、建筑设备、结构工程、计算机、金融和建筑物理等专业的科技人员使用。

囿于作者水平,书中必定有许多不妥之处,恳请读者不吝赐教。

作 者



北航

C1729166

冶金工业出版社部分图书推荐

书 名	定价(元)
场论基础	59.00
函数论初步	29.00
统计力学基础	30.00
低速空气动力学	25.00
分析力学初步	25.00
离散数学概论	25.00
数学物理方程	20.00
物理污染控制工程	30.00
建筑力学	35.00
理论力学	35.00
流体力学	27.00
工程流体力学 (第 3 版)	25.00
工程力学	28.00
材料电子显微分析	19.00
环境材料	30.00
微生物应用技术	39.00
稀有金属真空熔铸技术及其设备设计	79.00
铌微合金化高性能结构钢	88.00
金属表面处理与防护技术	36.00
金属固态相变教程 (第 2 版)	30.00
有色金属特种功能粉体材料制备技术及应用	45.00
精细化学品分析与应用	29.00
机电工程控制基础	29.00
健美图解	39.00

目 录

1 李群和李代数	1
1.1 张量	1
1.2 线性变换群	3
1.3 典型群的几何学	6
1.4 实向量空间的复化	14
1.5 不可约线性群	17
1.6 外形式	19
1.7 外运算	22
1.8 完全可积性	26
1.9 法普系统的特征变量	31
1.10 法普式的规范形式	33
1.11 局部李群及第一基本定理	36
1.12 第二和第三基本定理	40
1.13 李群第二类不变法普式	45
1.14 正规子群	47
1.15 一维子群	54
1.16 局部变换群	56
1.17 李群和李代数的关系	64
1.18 线性李代数	69
1.19 内微分代数	72
1.20 紧致李代数	77
1.21 旋转群的交换旋转	87

2 射影曲线	95
2.1 平面曲线	95
2.1.1 射影协变元素	95
2.1.2 两条平面曲线的接触不变式	104
2.1.3 平面曲线的奇点	107
2.1.4 平面曲线对	110
2.2 空间曲线	117
2.2.1 三维空间曲线	118
2.2.2 两条空间曲线的接触不变式	128
2.2.3 具有不同切线的两条相交空间曲线不变式	130
2.2.4 四维空间曲线	134
2.2.5 n 维空间曲线	137
3 射影曲面	141
3.1 曲面元素	141
3.1.1 主切曲线	141
3.1.2 基本微分方程	145
3.1.3 可积条件	152
3.1.4 李配极	156
3.1.5 李织面	161
3.1.6 嘉当规范标架	163
3.1.7 杜姆兰四边形	168
3.1.8 伴随织面	172
3.1.9 哥德织面序列	182
3.1.10 曲面的规范展开	194
3.1.11 塞格勒曲线	199
3.1.12 邦皮阿尼定理	203
3.1.13 射影变形	210

3.1.14	姆塔尔织面	216
3.1.15	平截线的密切二次曲线	227
3.1.16	捷赫变换	235
3.1.17	泛测地线	243
3.1.18	射影测地线	254
3.1.19	洼田锥面	258
3.2	极小曲面	264
3.2.1	S 曲面的伴随织面	264
3.2.2	S 曲面与极小曲面	273
3.2.3	极小曲面的特征	281
3.2.4	迈叶尔定理	288
3.2.5	哥德伴随序列	296
3.2.6	交扭定理	303
3.2.7	交点序列	308
3.2.8	波尔曲面	322
4	射影共轭网	327
4.1	共轭网与拉普拉斯方程	327
4.1.1	高维射影空间共轭网	327
4.1.2	拉普拉斯序列	332
4.1.3	拉普拉斯序列的中断问题	336
4.1.4	周期性拉普拉斯序列	340
4.1.5	共轭于定线汇的共轭网	342
4.1.6	调和于定线汇的共轭网	346
4.2	共轭网与直线汇的广义调和	349
4.2.1	共轭网的附属方程组	349
4.2.2	第 k 类共轭性和调和性	353
4.2.3	延拓定理	356
4.2.4	达布 k 重导来序列	359

4.2.5	第 k 类共轭与 k 重导来的等阶性	365
4.2.6	两共轭序列的联合序列	371
4.2.7	嵌入定理	374
5	射影联络空间	378
5.1	和乐群	378
5.2	基本定理	389
5.3	可分层空间	400
5.4	外尔空间	406
5.4.1	外尔空间定义	406
5.4.2	爱因斯坦引力场方程	408
5.4.3	米尔诺怪球	412
5.5	射影联络	415
5.6	仿射运动群	420
5.7	射影运动群	429
6	射影球丛几何	438
6.1	联络和曲率	438
6.2	芬斯勒丛的可积条件	444
6.3	芬斯勒丛的极小性	447
7	对称黎曼空间	450
7.1	定义	450
7.2	对称空间的几何性质	453
7.3	不可约对称空间	460
附录 1	射影变换与偏微分方程	465
附录 2	复空间积分几何学	497
参考文献		503

1 李群和李代数

1.1 张量

设 P_n 为 n 维复向量空间, x, y 为其中的元素。 P_n 上的线性函数为定义在 P_n 上的复值函数 $f(x)$, 满足

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad (1.1)$$

λ, μ 为任意复数。取 P_n 中的一组基 $e_1, e_2, \dots, e_n$; 对任意 $x \in P_n$, 可记

$$x = \sum_{l=1}^n x^l e_l = x^l e_l$$

上式利用了爱因斯坦求和约定; $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ 为向量 x 对应于该组基的坐标。若

$$f(e_l) = f_l \quad (1.2)$$

则线性函数 $f(x)$ 可用于向量 x 的坐标一次齐式表达

$$f(x) = f(x^l e_l) = x^l f(e_l) = f_l x^l \quad (1.3)$$

空间 P_n 的所有线性函数构成一个 n 维线性空间, 称之为 P_n 的共轭空间 P_n^* 。

对应于 P_n 的一组给定的基 $\{e_l\}$, 在 P_n^* 中也可取 n 个元素 $e^l (l = 1, 2, \dots, n)$ 使

$$e^l e_j = \delta_j^l \quad (1.4)$$

而

$$\delta_j^l = \begin{cases} 1 & (l = j) \\ 0 & (l \neq j) \end{cases}$$

显见 e^l 也构成 P_n^* 一组基, 称之为 P_n 基 $\{e_l\}$ 的对偶基, 基 $\{e_l\}$ 也称作 P_n 的一个标架, 故对偶基 $\{e^l\}$ 也称作标架 $\{e_l\}$ 的对偶标架。当空间 P_n 的基 $\{e_l\}$ 改为 $\{e'_l\}$ 时

$$e'_l = a^j_l e_j \quad (1.5)$$

这样对偶基 $\{e^l\}$ 变为 $\{e'^l\}$ 。依

$$e'^l \{e'_j\} = e'^l (a^m_j e_m) = a^m_j e'^l (e_m) = \delta^l_j$$

可知

$$e'^l = \tilde{a}^l_h e^h \quad (1.6)$$

这里 $\tilde{a}^l_j$ 为非奇异方阵 (a^l_j) 的逆阵的一般元素, a^l_j 即为矩阵 (a^l_j) 中第 l 行、第 j 列的元素。

在式 (1.5) 下向量 x 的坐标从 $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ 变为 $(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$, 有

$$x^l = a^l_j x'^j \quad x'^l = \tilde{a}^l_j x^j \quad (1.7)$$

参照对偶标架 $\{e^l\}$, 任意 P_n 的线性函数 f 由式 (1.2)、式 (1.4) 可记作

$$f = f_l e^l \quad (1.8)$$

f_l 为 f 参考于标架 $\{e^l\}$ 的坐标。当标架 $\{e^l\}$ 由式 (1.6) 变为 $\{e'^l\}$ 时, 得

$$f'_l = a^j_l f_j \quad f_l = \tilde{a}^j_l f'_j \quad (1.9)$$

今定义两个线性空间的张量积。取 $P_n^{(1)}$ 、 $P_m^{(2)}$ 为任意复向量空间, $P_n^{(1)}$ 中有一组基 $e^{(1)}_l (l = 1, 2, \dots, n)$ 、 $P_m^{(2)}$ 中有一组基 $e^{(2)}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, m)$, 形式上构造元素 $e_{l\alpha} = (e^{(1)}_l, e^{(2)}_\alpha)$, 形如 $\lambda^{l\alpha} e_{l\alpha}$ 的元素全体记作 P_{nm} , 规定:

$$\lambda^{l\alpha} e_{l\alpha} + \mu^{l\alpha} e_{l\alpha} = (\lambda^{l\alpha} + \mu^{l\alpha}) e_{l\alpha} \quad (1.10)$$

$$\lambda(x^{l\alpha} e_{l\alpha}) = (\lambda \lambda^{l\alpha}) e_{l\alpha} \quad (1.11)$$

$$\lambda^{l\alpha} e_{l\alpha} = \mu^{l\alpha} e_{l\alpha} \quad \text{当且仅当} \quad \lambda^{l\alpha} = \mu^{l\alpha} \quad (1.12)$$

足见 P_{nm} 为线性空间, 维数为 nm 并有基 $e_{l\alpha}$ 。称空间 P_{nm} 为空间 $P_n^{(1)}$ 、空间 $P_m^{(2)}$ 的张量积。经过处理, 可使张量积的形式与基的选择无关; 当然还可以定义许多线性空间的张量积。

取 a 个 P_n 、 b 个 P_n^* 作张量积 (a, b 为非负整数), 各个 P_n 的标架都使用同一组 $\{e_l\}$, 各个 P_n^* 的标架选用 $\{e_l\}$ 的对偶标架 $\{e^l\}$, 于是该张量积空间是 n^{a+b} 维的, 它的基是 $e_{l_1 l_2 \dots l_a}^{j_1 j_2 \dots j_b}$ 。对标架 $\{e_l\}$ 进行式 (1.5) 变换, 其规则为

$$e_{l_1 l_2 \dots l_a}^{j_1 j_2 \dots j_b} = a_{l_1}^{m_1} a_{l_2}^{m_2} \dots a_{l_a}^{m_a} \tilde{a}_{n_1}^{j_1} \tilde{a}_{n_2}^{j_2} \dots \tilde{a}_{n_a}^{j_b} e_{m_1 m_2 \dots m_a}^{n_1 n_2 \dots n_b} \quad (1.13)$$

这个空间的元素称为 a 阶逆变、 b 阶协变的张量, 即 $a+b$ 阶混合张量, 可表为

$$T_{j_1 j_2 \dots j_b}^{l_1 l_2 \dots l_a} e_{j_1 j_2 \dots j_b}^{j_1 j_2 \dots j_b} \quad (1.14)$$

的形式, n^{a+b} 个数 $T_{j_1 j_2 \dots j_b}^{l_1 l_2 \dots l_a}$ 称为该张量在标架 $\{e_l\}$ 下的分量。取定标架后, 一个张量就由它的分量完全确定。因为式 (1.13)、式 (1.12), 所以当 P_n 的基变化时, 可以得到张量分量的规律。对于固定类型的张量而言, 它的全体组成复数域上的向量空间, 则它有加法以及同复数的乘法为两种代数运算。约定复数为 0 阶张量。

1.2 线性变换群

复向量空间 P_n 到自身的映射 A 具有性质:

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay \quad (1.15)$$

式中 $x, y \in P_n$, λ, μ 为复数; 称之为线性变换。命 $\{e_l\}$ 为空间 P_n 的一组基, 线性变换 A 可由它作用于基向量 e_l 的象完全确定。事实上, 设

$$Ae_l = a_l^j e_j \quad (1.16)$$

于是

$$Ax = Ax^l e_l = x^l Ae_l = x^l a_l^j e_j \quad (1.17)$$

据此, 线性变换可依

$$\tilde{x}^l = a_j^l x^j \quad (1.18)$$

表示, x^l 、 $\tilde{x}^l$ 分别表示变前、变后向量的坐标。如果将 P_n 的向量坐标写成单列的矩阵并称之为坐标向量, 式 (1.16) 系数 a_l^j 可写成 $n \times n$ 方阵 (a_j^l) , 那么线性变换式 (1.18) 表明: 在线性变换下, 变后向量的坐标向量为以方阵 (a_l^j) 乘变前向量的坐标向量的结果。确定标架后, 线性变换可以利用 $n \times n$ 方阵表示; 若给定一个 $n \times n$ 方阵, 那么可作出一个线性变换, 两者之间存在双射。

当 $e'_l = a_l^j e_j$ 时

$$Ae'_l = a_l^j Ae_j = a_l^j a_j^m e_m = a_l^j a_j^m \tilde{a}_m^n e'_n \quad (1.19)$$

于是表示变换的 $n \times n$ 方阵与矩阵 (a_l^j) 相似, 即

$$(a_j^n) = (\tilde{a}_m^n)(a_l^j)(a_h^l) \quad (1.20)$$

线性变换 A 、 B 的和、积定义为

$$(A+B)x = Ax + Bx \quad (1.21)$$

$$(AB)x = A(Bx) \quad (1.22)$$

可由

$$(\lambda A)x = \lambda Ax \quad (\lambda \text{ 为复数}) \quad (1.23)$$

定义复数与线性变换的乘积。选定标架后, 这些运算对应于相应的方阵之间的加法、乘法、复数和方阵相乘等。若 A 、 B 对应方阵为 (α_i^j) 、 (β_i^j) , 则 $A+B$ 对应方阵为 $(\alpha_i^j) + (\beta_i^j) = (\alpha_i^j + \beta_i^j)$ 、 (AB) 对应方阵为 $(\alpha_i^l)(\beta_j^n) = (a_k^l \beta_j^k)$ 、 λA 对应方阵为 $\lambda(\alpha_i^j) = (\lambda \alpha_i^j)$ 。

一对一的线性变换称为非奇异的线性变换, 非奇异线性变换存在非奇异性逆变换。故所有非奇异的线性变换构成空间 P_n 的完全线性群 $GL(n, C)$, 完全线性群的任何子群称为线性变换群 (线性群)。

当 P_n 中作用一个非奇异性线性变换 A 时, 要求在 P_n^* 中的一个相应的线性变换 A^* , 使线性函数 $f(x)$ 值保持不变, 也就是 $(A^*f)(Ax) = f(x)$ 。为此只需考虑 $x = e_l$ 、 $f = e^j$, 有

$$(A^*e^j)(a_l^m e_m) = e^j(e_l) = \delta_l^j$$

或

$$a_l^m (A^*e^j)(e_m) = \delta_l^j$$

(a_l^m) 的逆方阵记作 $(\tilde{a}_l^m)$, 得

$$(A^*e^j)(e_m) = \tilde{a}_m^j = \tilde{a}_l^j e^l(e_m)$$

推出

$$A^*e^j = \tilde{a}_l^j e^l \quad (1.24)$$

这样的线性变换称为 P_n 中的线性变换 A 在 P_n^* 中诱导的线性变换。若记 $f = f_l e^l$, 则 $A^*f = f_l \tilde{a}_j^l e^j$, f 的变后元素坐标为

$$\tilde{f}_l = \tilde{a}_l^j f_j \quad (1.25)$$

从式 (1.25)、式 (1.18) 知

$$\tilde{f}_l \tilde{x}^l = \tilde{a}_l^j f_j a_m^l x^m = f_l x^l \quad (1.26)$$

考虑任意张量空间, 当 P_n 中有线性变换 A 时, 在 a 阶逆变、 b 阶协变的张量也可诱导一个线性变换 $A_{(a,b)}$, 并有

$$A_{(a,b)} e_{l_1 l_2 \dots l_a}^{j_1 j_2 \dots j_b} = a_{m_1}^{j_1} a_{m_2}^{j_2} \dots a_{m_a}^{j_a} \tilde{a}_{n_1}^{j_1} \tilde{a}_{n_2}^{j_2} \dots \tilde{a}_{n_b}^{j_b} e_{m_1 m_2 \dots m_a}^{n_1 n_2 \dots n_b} \quad (1.27)$$

对张量分量而言

$$\tilde{T}_{j_1 j_2 \dots j_b}^{l_1 l_2 \dots l_a} = a_{m_1}^{l_1} a_{m_2}^{l_2} \dots a_{m_a}^{l_a} \tilde{a}_{j_1}^{n_1} \tilde{a}_{j_2}^{n_2} \dots \tilde{a}_{j_b}^{n_b} T_{n_1 n_2 \dots n_b}^{m_1 m_2 \dots m_a} \quad (1.28)$$

从 n^{a+b} 维空间 ($a+b > 1$) 看, 这样的变换为完全线性群 $GL(n^{a+b}, C)$ 的一个子群, 与 $GL(n, C)$ 同构。

若 G 为任意线性群, $T = T_{j_1 j_2 \dots j_b}^{l_1 l_2 \dots l_a} e_{l_1 l_2 \dots l_a}^{j_1 j_2 \dots j_b}$ 为任意张量, 而 G 中任意元素 g 诱导的线性变换 $A_{(a,b)}$ 符合

$$A_{(a,b)} T = T \quad (1.29)$$

式 (1.28) 定义的 $\tilde{T}_{j_1 j_2 \dots j_b}^{l_1 l_2 \dots l_a}$ 满足

$$\tilde{T}_{j_1 j_2 \dots j_b}^{l_1 l_2 \dots l_a} = T_{j_1 j_2 \dots j_b}^{l_1 l_2 \dots l_a} \quad (1.30)$$

则称张量 T 在群 G 下不变。

1.3 典型群的几何学

变换群与几何学密切相关; 若以此分析线性空间, 则与之相关的变换群为完全线性群。在完全线性群下不变的基本性质为向量之间的线性相关的关系。许多重要空间与完全线性群的子群有关, 本节研究复欧几里得空间及复辛空间, 其对应的子群为使某些二阶协变张量或双线性形式不变的群。

对 $x, y \in P_n$, 双线性形式 $f(x, y)$ 若满足

$$f(x, y) = f(y, x) \quad (1.31)$$

则称其为对称的; 若满足

$$f(x, y) = -f(y, x) \quad (1.32)$$

则称其为反对称的; 若无非零 x 使

$$f(x, y) = 0$$

对任何 y 成立, 则 $f(x, y)$ 称为满秩的。取定标架 $f(x, y)$ 后可表达成

$$f(x, y) = g_{lj} x^l y^j$$

式中 g_{lj} 为复数, 于是 $f(x, y)$ 是对称的当且仅当

$$g_{lj} = g_{jl} \quad (1.33)$$

$f(x, y)$ 是反对称的当且仅当

$$g_{lj} = -g_{jl} \quad (1.34)$$

$f(x, y)$ 是满秩的当且仅当

$$\det(g_{lj}) \neq 0 \quad (1.35)$$

一个复 n 维向量空间如有满秩的双线性形式 $f(x, y)$, 并定义空间中任意向量 x, y 的数量积, 则该空间称为复欧几里得向量空间。在这种空间中称 $f(x, x)$ 为向量 x 的长度的平方, 长度平方为 1 的向量称为单位向量; 当 x, y 满足

$$f(x, y) = 0$$

时称其为直交 (正交) 的。当有两个子空间 K, L , 且 K 中任意向量和 L 中的任意向量正交 (直交) 时, 称 K, L 为直交的。空间中的一个标架, 如果它的基为单位向量又相互直交, 那么称该标架为直交规范的, 有时也称为直交标架。

定理 1.1 复欧几里得向量空间存在直交规范标架。

首先注意必有向量 e 使 $f(e, e) = c_1 \neq 0$ 。实际上, 若 $f(x, x) = 0$ 对所有 x 成立, 则对任何一对向量 x, y 成立

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) &= \lambda^2 f(x, x) + 2\lambda\mu f(x, y) + \mu^2 f(y, y) \\ &= 2\lambda\mu f(x, y) = 0 \end{aligned}$$

这与 $f(x, y)$ 为满秩的假设矛盾; 置

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}} e$$

则 $f(e_1, e_1) = 1$ 。当取 $e_1, e_2, \dots, e_m (m < n)$ 使

$$f(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m$ 。今证明

$$f(e_\alpha, x) = 0 \quad (1.36)$$

必有解, 它符合 $f(x, x) \neq 0$ 。为此, 先注意到任意向量 y 必可写成 $y = y^{(1)} + y^{(2)}$, 这样 $y^{(1)}$ 为 e_α 的线性组合, $y^{(2)}$ 满足式 (1.36)。事实上, 令 $c^\alpha = f(e_\alpha, y)$ 、 $y^{(1)} = c^\beta e_\beta$ 、 $y^{(2)} = y - c^\beta e_\beta$, 结果

$$f(e_\alpha, y^{(2)}) = f(e_\alpha, y - c^\beta e_\beta) = f(e_\alpha, y) - c^\beta f(e_\alpha, e_\beta) = 0$$

利用反证法。若所有符合式 (1.36) 的向量均成立 $f(x, x) = 0$, 则当 x, y 满足式 (1.36) 时, $\lambda x + \mu y$ 也满足式 (1.36); 故

$$f(\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) = 0$$

由此导出 $f(x, y) = 0$ 。因而取 x 为满足式 (1.36) 的任意非零元素, 式 (1.36) 实际上为有 n 个未知量的线性齐次方程组, 方程个数为 m 。由于 $m < n$, 因此存在非零解。又 y 为任意向量, 把 y 写作 $y^{(1)} + y^{(2)}$, 则依上述知 $f(x, y) = 0$, 这和双线性形式 $f(x, y)$ 是满秩的假定矛盾; 根据所述事实, 可取元素 e 使之满足式 (1.36) 且 $f(e, e) = c_m \neq 0$, 置

$$e_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{c_m}} e$$

于是存在 $e_1, e_2, \dots, e_{m+1}$ 使

$$f(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

由此逐步推演, 得到一组向量 $e_l (l = 1, 2, \dots, n)$, 使

$$f(e_l, e_j) = \delta_{lj} \quad (1.37)$$

表明它们是相互直交的单位向量。最后需证明它们也是线性无关的。若有 $\lambda^l e_l = 0$, 则

$$f(e_j, \lambda^l e_l) = 0$$

给出 $\lambda^j = 0 (j = 1, 2, \dots, n)$, 至此定理 1.1 获证。

在直交规范标架下, 双线性形式 $f(x, y)$ 具有形式

$$f(x, y) = f(e_l, e_j) x^l y^j = \delta_{lj} x^l y^j = \sum_{l=1}^n x^l y^l \quad (1.38)$$