研究生创新人才培养系列教材

工程测试技术

GONGCHENG CESHI JISHU

汪菲　刘习军　杨志永／主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

研究生创新人才培养系列教材

工程测试技术

GONGCHENG CESHI JISHU

汪 菲 刘习军 杨志永／主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书对工程测试技术相关知识进行介绍，内容丰富、结构合理。全书共九章，具体内容包括机械振动基本理论、工程测试基本原理与方法、激振设备、传感器、滤波器与放大器、数据采集与信号处理、基本振动参数测量、模态分析、虚拟仪器技术等。

本书可作为机械设计制造及自动化、测控技术及仪器、机械电子工程、工程振动与控制等专业研究生“工程测试技术”课程的教材或教学参考书，也可供相关专业的工程技术人员参考和学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程测试技术/汪菲，刘习军，杨志永主编. —天津：天津大学出版社，2014.1

研究生创新人才培养系列教材

ISBN 978-7-5618-4968-2

Ⅰ.①工… Ⅱ.①汪… ②刘… ③杨… Ⅲ.①工程测试－研究生－教材 Ⅳ.①TB22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 018507 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647
网　　址 publish.tju.edu.cn
印　　刷 天津大学出版社有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 11.25
字　　数 281 千
版　　次 2014 年 2 月第 1 版
印　　次 2014 年 2 月第 1 次
定　　价 25.00 元

前　　言

在科学研究和社会生产中，离不开对各种物理现象和物理量进行观察和定量的数据分析，而测试技术是获取这些信息的基本技术手段，是现代科学技术研究的一个重要领域，在社会发展中起到至关重要的作用。

测试技术广泛应用于工、农业自动化，军事现代化，机器人技术，航空航天技术，医疗卫生，环境监测等领域。虽然不同的领域的测试目的、试验研究对象及使用的仪器设备有所差异，但试验工作所关心的问题具有很多共性，比如测试理论、测试方法、测试系统的结构框架、测试信号及试验数据的分析处理方法以及如何减少干扰因素提高信噪比、如何合理选择测试系统和仪器设备以求得较大的效费比。

随着现代科学技术的迅猛发展，先进的测试与传感技术不断涌现，测试仪器和设备不断更新换代。因此，有必要编写一本适用于机电类专业研究生“工程测试技术”课程的教材，以机械振动测试技术经典理论为重点，兼顾近些年测试技术发展中的新技术、新内容，在现有相关教材的基础上增新弃旧、取长补短、求同存异、优化组合，力求让读者对工程振动测试技术有更全面的理解。

本教材共分九章。第 1 章介绍了机械振动基本理论，作为后续振动测量原理的铺垫和基础。第 2 章介绍了工程测试基本原理与方法，阐明了测试系统的一般组成，详细介绍了测试系统的静、动态特性及测试方法。第 3 章介绍了激振设备，包括激振器、振动台、力锤，并重点讨论了不同激励形式的激振器和振动台的工作原理和适用范围。第 4 章介绍了传感器，包括机械式、电位器式、电阻应变式、电感式、压电式、激光式、热电偶等七种传感器的工作原理及其相应的工程应用，并简要介绍了实验室中常用的测力装置——测力仪。第 5 章介绍了滤波器与放大器，其中滤波器部分简要介绍了数字滤波器的分类和基本用法，着重介绍了模拟滤波器的滤波原理和电路构成，而在放大器部分主要介绍了前置放大器配合压电传感器的工作原理和主要功能。第 6 章介绍了数据采集与信号处理，阐述了模数、数模转换，混淆与采样定理，泄露与窗函数，傅里叶、快速傅里叶变换等基本概念；讨论了工程实际中对采样频率的要求和窗函数的选择，并以实例的形式介绍了用 MATLAB 软件实现傅里叶变换的操作方法。第 7 章介绍了基本振动参数测量，主要包括固有频率、幅值、相位差、衰减系数等基本振动参量的测量方法。第 8 章介绍了模态分析，阐述了单自由度系统传递函数和多自由度系统传递函数矩阵的物理意义，详细介绍了模态参数识别的基本方法——曲线

拟合法和导纳圆法，并简单讨论了模态参数识别领域新方法与传统方法的不同之处和选用准则。第 9 章介绍了虚拟仪器技术，并以虚拟仪器开发平台 LabVIEW 为研究对象，讲述了该软件的使用方法，重点讲解了数据采集模块的基本功能。

本书具有三大特点。

(1)结构合理，深入浅出。本书注重基本理论和基础知识的讲解，不仅可以帮助有振动理论基础的读者迅速回忆线性振动的基础知识，而且适合无基础的读者。

(2)根植实践，兼顾理论。本书精简篇幅，严格控制理论基础内容和公式推导的长度，适量增加仪器设备操作与使用的具体方法和步骤，并在其中增加实物图的数量，使读者对测量实践有更直观的认识，加深对测试过程的理解。

(3)增新弃旧，与时俱进。本书充分考虑了传统设备与新仪器之间的内在关系与不同，在详细介绍传统技术及理论的同时，介绍了一些新发展起来的技术和仪器设备，使读者在掌握实验室常用设备使用方法的同时，了解先进测试技术的发展趋势。

本书由汪菲、刘习军、杨志永主编，第 1、3、4、6、8 章由汪菲编写，第 5、7 章由刘习军编写，第 2、9 章由杨志永编写，全书由汪菲进行了统稿。

对于本书编写过程中可能出现的纰漏之处，热忱希望得到广大读者的批评指正，我们将不胜感谢。

编者

2013 年 5 月 7 日

目　　录

第 1 章　机械振动基本理论

振动是指系统在平衡位置(物体静止时的位置)附近做往复运动。振动的形式按激励的性质可分为定则振动和随机振动,按激励控制的方式可分为自由振动、强迫振动、自激振动和参激振动。

自由振动是指系统受到初始扰动的激发所产生的振动,自由振动系统与外界没有能量的交换,振动的形成和演变机制是通过将初始激发能量在系统内传递和转换实现的。强迫振动是指系统受到外界持续的激励所产生的振动,强迫振动系统从外界不断获得能量来补偿阻尼所消耗的能量,从而维持系统的持续振动。自激振动是在非周期性变化的能源供给下,由系统内部激发反馈产生的持续而稳定的周期性振动,自激振动系统在运动过程中伴随有能量损耗,但系统存在一种反馈调节机制,能及时适量地予以补充,在日常生活中,电铃振动发声就是一个典型的自激振动,如图 1.1(a)所示。参激振动是指由系统本身含随时间变化的参数的激励所引起的振动,比如变幅长单摆的参激振动,如图 1.1(b)所示。

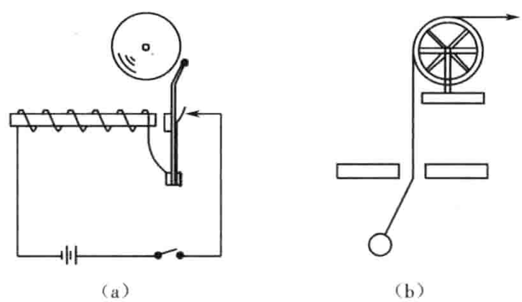


图 1.1　自激振动和参激振动实例

(a)电铃的自激振动　(b)变幅长单摆的参激振动

任何力学系统,只要它具有弹性和惯性,都可能发生振动,这种力学系统称为振动系统。振动系统的分类有多种,比如:按物理核型可分为离散系统(单自由度系统、多自由度系统)和连续系统,按系统特性或运动微分方程类型可分为线性系统和非线性系统。基本的振动系统由弹簧、具有一定质量的物体和阻尼器组成,单自由度弹簧 - 质量 - 阻尼系统如图 1.2 所示,图中 x 为广义坐标,F 为系统的外部激励(作用力)。

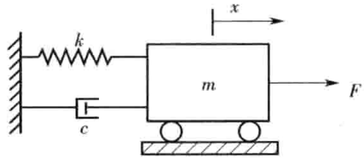


图 1.2　单自由度弹簧 - 质量 - 阻尼系统

1. 弹簧

弹簧是联系力与位移的弹性部件,通常假定弹簧是没有质量的,因而作用于弹簧两端的

力大小相等但方向相反。由于力 F 作用,弹簧被拉长,一般来说,弹簧都是非线性的,但当弹簧的伸长量较小时,弹簧力可认为与伸长量成正比,比例系数 k 称为弹性系数(或弹簧刚度),单位为 N/m。当弹簧在线性范围内工作时,通常用其刚度来标记弹簧。

2. 质量

质量决定系统的惯性,使物体保持运动状态。弹簧为系统提供恢复力,使运动指向平衡位置。在惯性和弹簧力的作用下,系统做往复运动。因此,弹簧和质量是振动基本要素。一般的振动系统,弹簧和质量能够储存和释放能量。在振动系统中,对于弹簧,其能量为弹性势能,对于质量,其能量为动能。

3. 阻尼

联系弹簧与质量(力与速度)的部分称为阻尼,它具有使自由振动振幅逐渐下降的特性。理论上,振动系统不需要阻尼,但阻尼是客观存在的。常见的黏性阻尼或减振器由活塞及盛有黏性液体的圆筒组成,黏性液体可以在圆筒内活塞的周围流过,阻尼的示意图如图1.3(a)所示。阻尼器假定是没有质量的,因而一端的作用力 F_d 必须与另一端相应的力平衡。阻尼一般是非线性的,当振动量小时可简化为线性的,其变化曲线如图 1.3(b)所示。曲线斜率比例系数 c 称为黏性阻尼系数,单位为 N·s/m。在振动系统中,阻尼只能消耗能量。

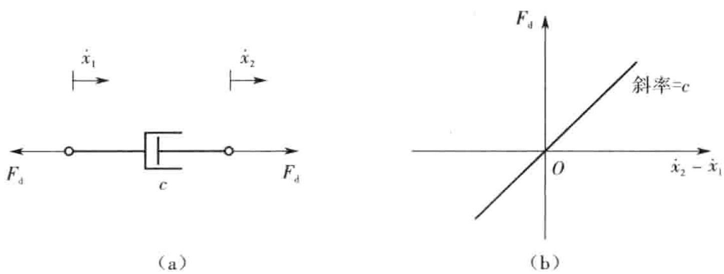


图 1.3 阻尼和黏性阻尼示意图

(a)阻尼示意图 (b)黏性阻尼示意图

1.1 单自由度系统的振动

单自由度系统如图 1.2 所示,振动微分方程是一个二阶常系数微分方程,其标准形式为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t) \tag{1.1}$$

没有阻尼($c=0$)的系统叫作**无阻尼系统**,现实中并不存在无阻尼系统,但无阻尼系统的讨论有着重要的理论意义。系统在没有激励($F(t)=0$)下的振动叫作**自由振动**,对应的振动微分方程是**齐次微分方程**,系统的振动由初始位移和速度确定;系统在外力 F 激励下的振动叫作**强迫振动**,对应的振动微分方程是**非齐次微分方程**。

在数学上,非齐次方程的解是由齐次方程的解加特解而得,而特解因外力表达形式不同而解法不同,所以强迫振动的分析通常按外力形式分类。本节后面将按无阻尼自由振动、有阻尼自由振动和强迫振动顺序讨论单自由度系统振动。

1.1.1 无阻尼系统的自由振动

当无阻尼系统发生自由振动时，没有阻尼也没有外力激励，令式(1.1)中$F(t)$和c为0，得无阻尼自由振动微分方程：

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{1.2}$$

这是一个二阶齐次微分方程。

设其解为

$$x(t)=Ae^{st} \tag{1.3}$$

式中 A——常数；

s——待确定的量。

将式(1.3)代入式(1.2)，有

$$(ms^2+k)Ae^{sx}=0 \tag{1.4}$$

当$ms^2+k=0$时，方程具有非零解，令

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.5}$$

有

$$s^2+\omega_n^2=0 \tag{1.6}$$

$$s=\pm j\omega_n \tag{1.7}$$

根据微分方程求解方法，式(1.2)的通解为

$$x(t)=A_1e^{j\omega_nt}+A_2e^{-j\omega_nt} \tag{1.8}$$

式中 A_1,A_2——待定系数，可由初始条件确定。

根据复变函数理论，还可以把式(1.8)表达为三角函数，即

$$e^{\pm j\omega_nt}=\cos\omega_nt\pm j\sin\omega_nt \tag{1.9}$$

将式(1.9)代入式(1.8)整理得

$$x(t)=(A_1+A_2)\cos\omega_nt+(A_1-A_2)j\sin\omega_nt \tag{1.10}$$

由于A_1和A_2都是待定系数，两个常数的和、差仍然是常数，可用另一个待定系数代替，设$B_1=A_1+A_2$，$B_2=(A_1-A_2)j$，式(1.10)改写为

$$x(t)=B_1\cos\omega_nt+B_2\sin\omega_nt \tag{1.11}$$

式中 B_1,B_2——新的待定系数。

设$B_1=B\cos\varphi$，$B_2=B\sin\varphi$，利用三角函数，式(1.11)可以写成另一种形式：

$$x(t)=B\cos(\omega_nt+\varphi) \tag{1.12}$$

式中 B,φ——待定系数，由初始条件确定。

由式(1.12)可知，无阻尼自由振动是等幅的、周期的，起始点的值由初相位确定。这样的振动叫作**简谐振动**。

由于正弦函数和余弦函数的周期是2π，所以有

$$T\omega_n=2\pi \tag{1.13}$$

ω_n只与系统的参数有关，并反映了系统的固有特性，在量纲上与简谐振动的圆频率一样，所以叫作**固有圆频率**，其单位为rad/s(弧度/秒)。固有圆频率与固有频率f_n(单位为Hz，即1/s)关系为

$$\omega_n = 2\pi f_n \tag{1.14}$$

1.1.2　有阻尼系统的衰减振动

有阻尼自由振动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{1.15}$$

式(1.15)等号两边同除以 m,得

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1.16}$$

令

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \tag{1.17}$$

式中　ζ——黏性阻尼因子。

将式(1.5)和式(1.17)代入式(1.16)有:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{1.18}$$

设该方程的解同式(1.3),即

$$x(t) = Ae^{st}$$

将其代入方程(1.18),得到代数方程

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{1.19}$$

式(1.19)称为该系统的特征方程,其解为

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \\ s_2 &= (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

则

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{1.21}$$

式中　A_1, A_2——常数,取决于初始条件,其值可根据初始位移 x_0 和初始速度 $\dot{x}_0$ 计算出来。

显然,根 s_1 和 s_2 的性质取决于 ζ 的值。可以看到,当 $\zeta = 0$ 时,得到虚根 $\pm j\omega_n$,对应无阻尼自由振动。下面分别讨论 $\zeta > 0$(有阻尼)的情况。根据式(1.20),方程的解取决于开方项,其结果有如下三种情况。

(1)当 $\zeta > 1$ 时,开方项开方后为小于 ζ 的正实数,s_1 和 s_2 为两个不相等的负实数,方程的解为一个按指数规律衰减的响应,不是振动解。$\zeta > 1$ 的情况称为过阻尼情况,其典型的响应曲线如图 1.4 所示。

(2)当 $\zeta = 1$ 时,开方项为 0,s_1 和 s_2 为两个相等的负实数,方程有重根 $s_1 = s_2 = -\omega_n$,其解为

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t} \tag{1.22}$$

显然,当 $t \to \infty$ 时,$x(t) \to 0$,方程的解也为一个按指数规律衰减的响应,也不是振动解。$\zeta = 1$ 的情况称为临界阻尼情况。从表达式 $\zeta = \dfrac{c}{2m\omega_n}$ 可以看出,当 $\zeta = 1$ 时,对应的阻尼叫作临界阻尼,其值为

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} \tag{1.23}$$

临界阻尼表示 $\zeta > 1$ 和 $\zeta < 1$ 这两种情况之间的分界线,当系统的阻尼超过了临界阻尼,

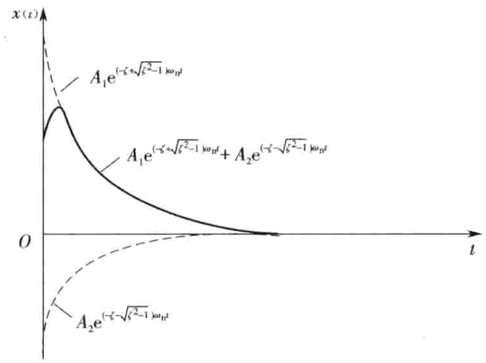


图 1.4　$\zeta>1$ 时衰减振动的响应曲线

系统不振动。但在给定的初始激励下,临界阻尼系统将能最快地趋近平衡位置。

(3)当 $0<\zeta<1$ 时,开方项开方后为虚数,s_1 和 s_2 为共轭复数,微分方程的解为

$$x(t)=(A_1e^{j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}+A_2e^{-j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t})e^{-\zeta\omega_n t}=(A_1e^{j\omega_d t}+A_2e^{-j\omega_d t})e^{-\zeta\omega_n t} \tag{1.24}$$

其中,$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$。

根据 1.1.1 节的思路和方法,式(1.24)可表达为另外两种形式:

$$x(t)=e^{-\zeta\omega_n t}(B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t) \tag{1.25}$$

$$x(t)=Ae^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t-\varphi) \tag{1.26}$$

该解由衰减的指数函数与三角函数的积组成,是周期性衰减振动。这个解可以理解为圆频率固定为 ω_d,振幅 $Ae^{-\zeta\omega_n t}$ 按指数规律衰减的振动,曲线 $\pm Ae^{-\zeta\omega_n t}$ 为振动响应的包络线。$0<\zeta<1$ 的情况称为小阻尼情况,其典型的响应曲线如图 1.5 所示。

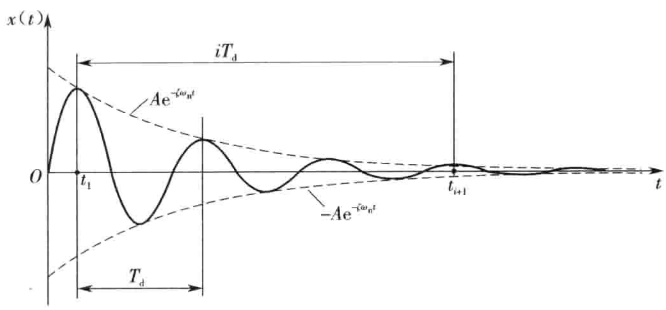


图 1.5　$0<\zeta<1$ 时衰减振动的响应曲线

有阻尼振动的周期为

$$T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1.27}$$

由式(1.27)可知,**有阻尼系统的振动周期大于无阻尼系统的振动周期**。

对于有阻尼系统,前一个周期和后一个周期振幅比值的对数称为**对数衰减率** δ,它与阻尼有关,有

$$\delta = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_d)} \tag{1.28}$$

而

$$\frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_d)} = \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \varphi)}{Ae^{-\zeta\omega_n(t_1 + T_d)}\cos[(\omega_d t_1 + T_d) - \varphi]} = e^{\zeta\omega_n T_d}$$

于是得到

$$\delta = \zeta\omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{1.29}$$

当阻尼很小时,式(1.29)可进一步简化为

$$\delta = 2\pi\zeta \tag{1.30}$$

式(1.29)和式(1.30)为测试系统阻尼提供了理论基础。

1.1.3 简谐激励下的强迫振动

系统受持续激励作用时的振动称为强迫振动。系统的持续激励表现为力、位移、应力等,可以是连续的,也可以是间断的,用时间的函数 $F(t)$ 表示,其方程的一般表达式为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{1.31}$$

这是一个二阶非齐次微分方程。在数学上其通解为齐次解 $x_1(t)$ 与特解 $x_2(t)$ 的叠加,即

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{1.32}$$

求出通解后,由初始条件定出齐次解中的两个待定常数后,就得到了系统的强迫振动解。显然,强迫振动解形式为

$$x_1(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t) \tag{1.33}$$

当激励为简谐激励时,$F(t) = F_0\sin\omega t$,并假设 $x_1(0) = x_0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_0$,设特解为

$$x_2(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \tag{1.34}$$

代入式(1.33)并比较系数,得特解

$$x_2(t) = \frac{F_0}{k\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}\sin(\omega t - \varphi) \tag{1.35}$$

式中 λ——频率比,$\lambda = \omega/\omega_n$。

最后得到通解

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t) + \frac{F_0}{k\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}\sin(\omega t - \varphi) \tag{1.36}$$

式中 φ——相位差,$\varphi = \arctan\dfrac{2\zeta\lambda}{1 - \lambda^2}$。

将初始条件 $x_1(0) = x_0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_0$ 带入式(1.36),得到

$$B_1 = x_0 + \beta H_0\sin\varphi$$

$$B_2 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0 + \beta H_0(\zeta\omega_n\sin\varphi - \omega\cos\varphi)}{\omega_d}$$

式中 β——放大因子,$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}}$;

H_0——最大静位移，$H_0 = \frac{F_0}{k}$。

于是，解的全形式可写为

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(x_0\cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right) + \beta H_0 \sin(\omega t - \varphi) +$$

$$\beta H_0 e^{-\zeta\omega_n t}\left(\sin\varphi\cos\omega_d t + \frac{\zeta\omega_n\sin\varphi - \omega\cos\varphi}{\omega_d}\sin\omega_d t\right) \tag{1.37}$$

可见，振动由三个部分组成：第一部分是完全由初始条件确定的自由振动；第二部分是激励完全确定的强迫振动，频率与激振力频率相同，振幅也与初始条件无关，取决于激振力和系统特性，是稳态振动；第三部分是由激励引起的和自由振动同频率的振动，叫作伴随振动。在阻尼影响下，自由振动和伴随振动部分是衰减的，并逐渐消失。因此，振动开始一段时间内三种振动同时存在，叫作过渡阶段，自由振动和伴随振动消失后叫作稳定阶段。简谐激励下强迫振动响应曲线如图 1.6 所示。由图可见，经过一段时间后，振动变为单纯的稳态振动。

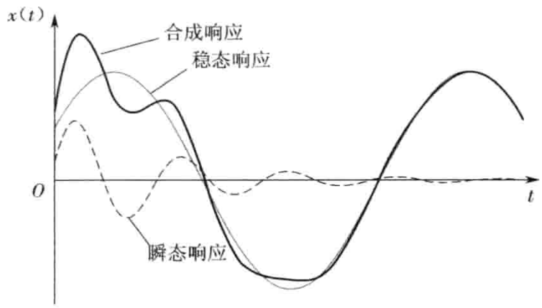


图 1.6　简谐激励下强迫振动响应曲线

下面讨论放大因子 β 和相位差 φ 随频率比 λ 变化的曲线，如图 1.7 所示，其中

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \tag{1.38}$$

$$\varphi = \arctan\frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2} \tag{1.39}$$

在图 1.7 中，幅频和相频曲线可根据 λ 分为三个部分。

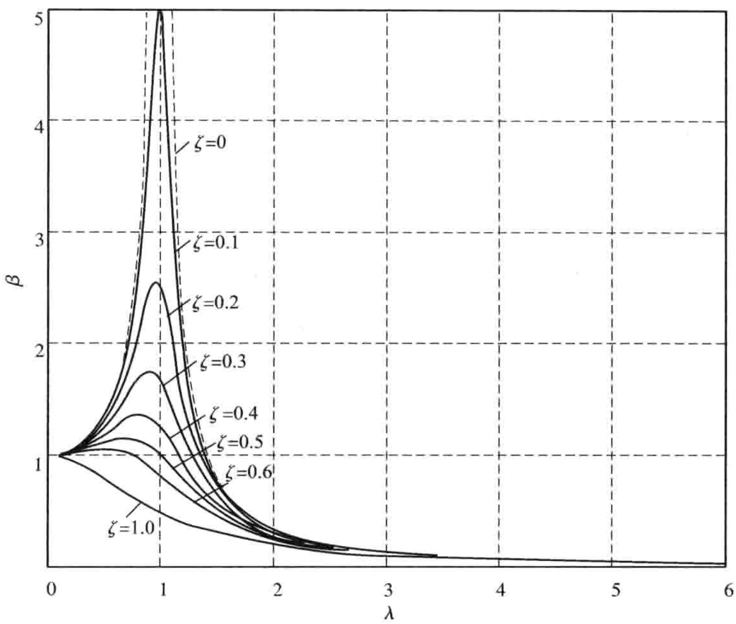
1. 低频区

当 $\lambda = 0$ 即 $\omega = 0$ 时，$\beta = 1$（此时弹簧变形为激振力幅值作用下的静变形）。当激振频率远小于系统固有频率时，无论阻尼大小如何，振幅都近似等于此静变形。这表明在低频区，振幅主要由系统的刚度控制，故低频区又称为刚度区或准静态区。

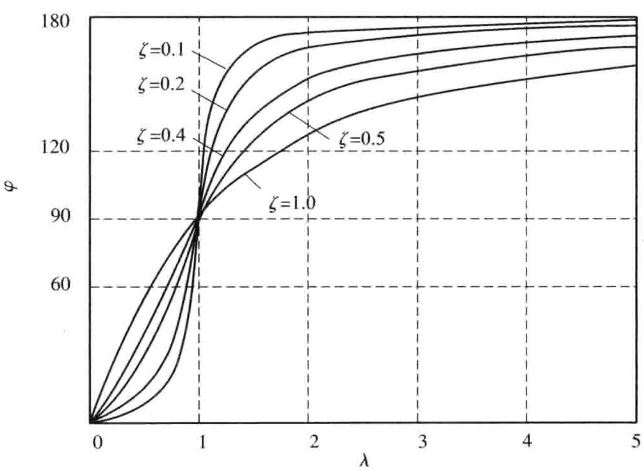
当 $\lambda = 0$ 即 $\omega = 0$ 时，$\varphi = 0$。当激振频率远小于系统固有频率时，无论阻尼大小如何，相位差近似等于 0，即位移与激振力接近于同相，这符合准静态区的性质。

2. 高频区

当激振频率远大于系统固有频率时，振幅都接近于 0。这是因为激振力改变方向太快，以至于振动物体由于惯性来不及对高频激励做出响应，因而振幅很小。这表明在高频区，振



(a)



(b)

图 1.7　简谐激励下幅频和相频特性曲线

(a)幅频特性曲线　(b)相频特性曲线

幅主要决定于系统的惯性(物体的质量),故高频区又称惯性区。

相位差近似等于 180°,即位移与激振力接近于反相,这正是惯性区的特点。一质量块的加速度与其受到的力是同相的,而加速度与位移是反相的,所以振动位移与激振力反相。

3. 共振区

当激振频率接近于系统固有频率时,振幅急剧增加,幅频特性曲线出现峰值,振动幅值高出静态位移许多倍,且随阻尼的不同有很大差异。这表明振动系统的特性主要是阻尼元件作用的结果,故又称为阻尼区。

共振时系统的振幅达到最大值,而且与阻尼有关,但相位差总是90°。这正是阻尼区的特点,因为阻尼器所受到的力与速度同相,而速度正好与位移相差90°。

1.2 多自由度系统的基本概念

1.1节介绍了单自由度系统的振动,它是振动理论的基础。但在实际工程问题中,经常会遇到一些不能简化为单自由度系统的振动问题。因此有必要进一步研究多自由度系统的振动理论。

最简单的多自由度系统是两自由度系统。从单自由度系统到两自由度系统,振动的性质和研究方法有质的不同,但从两自由度系统到多自由度系统的振动,无论从模型的简化、振动微分方程的建立和求解的一般方法以及系统响应表现出来的振动特性等,都没有什么本质上的区别,而主要是量上的差别。因此研究两自由度系统是分析和掌握多自由度系统振动特性的基础。

所谓两自由度系统,是指用两个独立坐标才能确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置的振动系统。很多生产实际中的问题都可以简化为两自由度系统的振动问题。图1.8为一个简单的两自由度系统的动力学模型。在多自由度系统中,阻尼的作用与在单自由度系统中的作用相同。因此,为了使数学式简化,并突出振动特性,本节在分析两自由度系统振动的基本规律时,没有把阻尼引入系统。

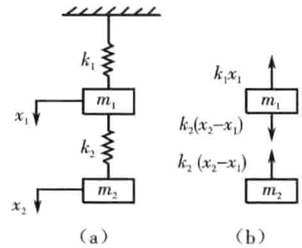


图1.8 两自由度系统动力学模型
(a)力学模型 (b)受力分析

1.2.1 两自由度无阻尼系统的自由振动

以图1.8(a)所示的双弹簧系统为例,设弹簧的刚度分别为k_1、k_2,物体质量分别为m_1、m_2,物体质心的位移分别用x_1、x_2来表示,并以静平衡位置为坐标原点,以向下为正方向。

在振动过程中的任一瞬间t,物体的位移分别为x_1及x_2。此时,在质量为m_1的物体上作用有弹性恢复力k_1x_1及$k_2(x_2-x_1)$,在质量为m_2的物体上作用有弹性恢复力$k_2(x_2-x_1)$,这些力的作用方向如图1.8(b)所示。应用牛顿第二定律或达朗贝尔原理,均可建立该系统的振动微分方程组:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1+k_1x_1-k_2(x_2-x_1)=0 \\ m_2\ddot{x}_2+k_2(x_2-x_1)=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

令$a=\dfrac{k_1+k_2}{m_1}$,$b=\dfrac{k_2}{m_1}$,$c=\dfrac{k_2}{m_2}$,则式(1.40)可改写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1+ax_1-bx_2=0 \\ \ddot{x}_2-cx_1+cx_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

这是一个二阶常系数线性齐次联立微分方程组。在第一个方程中包含$-bx_2$项,第二个方程中则包含$-cx_1$项,称为“耦合项”,把这种位移之间有耦合的情况称为弹性耦合。有时,在振动微分方程组中还会出现加速度之间有耦合的情况,称之为惯性耦合。

从单自由度振动理论得知,系统的无阻尼自由振动是简谐振动,在此同样假设方程组式(1.41)有简谐振动解,然后用待定系数法来寻找有简谐振动解的条件。

设在振动时，两个物体按相同的频率和相同的相位角做简谐振动。故可设方程组式(1.41)的特解为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\sin(\omega_n t+\varphi) \\ x_2 &= A_2\sin(\omega_n t+\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

其中，振幅 A_1 与 A_2、圆频率 ω_n、初相位角 φ 都有待确定。

对式(1.42)分别取二阶导数：

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -A_1\omega_n^2\sin(\omega_n t+\varphi) \\ \ddot{x}_2 &= -A_2\omega_n^2\sin(\omega_n t+\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

将式(1.42)、式(1.43)代入式(1.41)，并加以整理后得

$$\left.\begin{aligned} (a-\omega_n^2)A_1 - bA_2 &= 0 \\ -cA_1 + (c-\omega_n^2)A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.44}$$

式(1.44)是 A_1、A_2 的线性齐次代数方程组，要使 A_1、A_2 有非零解，则式(1.44)的系数行列式必须等于0，即

$$\begin{vmatrix} a-\omega_n^2 & -b \\ -c & c-\omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

将上式展开得

$$(a-\omega_n^2)(c-\omega_n^2) - bc = \omega_n^4 - (a+c)\omega_n^2 + c(a-b) = 0 \tag{1.45}$$

式(1.45)求解，可得到如下的两个根：

$$\left.\begin{aligned} \omega_{n1}^2 &= \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - c(a-b)} = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + bc} \\ \omega_{n2}^2 &= \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - c(a-b)} = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + bc} \end{aligned}\right\} \tag{1.46}$$

不难看出，ω_{n1}^2 及 ω_{n2}^2 均大于0，因此可以从中得到两个带正号或者带负号的频率 ω_{n1} 及 ω_{n2}，但在实用中当然只考虑正根。

式(1.46)是决定系统频率的方程，故称为频率方程或特征方程。特征方程的特征值 ω_n 只与参数 a、b、c 有关，而这些参数又只决定于系统物体的质量 m_1、m_2 和弹簧的刚度 k_1、k_2，即频率 ω_n 只决定于系统本身的物理性质，故称 ω_n 为系统的固有频率，也称之为主频率。两自由度无阻尼系统的固有频率有两个，即 ω_{n1} 及 ω_{n2}，且 $\omega_{n1}<\omega_{n2}$。把 ω_{n1} 称为系统的第一主频率，或第一阶固有频率，亦称基频；把 ω_{n2} 称为系统的第二主频率，或第二阶固有频率。理论证明，n 个自由度系统的频率方程是 ω_n^2 的 n 次代数方程，在无阻尼的情况下，它的 n 个根必定都是正实根，故主频率的个数与系统的自由度数相等。

将所求得的 ω_{n1} 和 ω_{n2} 代入式(1.44)中得

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} &= \frac{a-\omega_{n1}^2}{b} = \frac{c}{c-\omega_{n1}^2} = \beta_1 \\ \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} &= \frac{a-\omega_{n2}^2}{b} = \frac{c}{c-\omega_{n2}^2} = \beta_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

式中 $A_1^{(1)}$、$A_2^{(1)}$——对应于 ω_{n1} 的质量为 m_1、m_2 物体的振幅；