XIANXING
DAISHU

线性代数

（第二版）

主　编　张兴元
副主编　万美凯　朱星亮

西南交通大学出版社

线性代数

（第二版）

主　编　张兴元

副主编　万美凯　朱星亮

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 张兴元主编. —2 版. —成都：西南交通大学出版社，2014.8
ISBN 978-7-5643-3317-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 191942 号

线性代数
（第二版）
主编　张兴元

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //www.xnjdcbs.com
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　　张	15.75
字　　数	393 千字
版　　次	2014 年 8 月第 2 版
印　　次	2014 年 8 月第 3 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-3317-1
定　　价	34.00 元

图书如有印装质量问题　本社负责退换
版权所有　盗版必究　举报电话：028-87600562

第二版前言

线性代数（linear algebra）是数学的一个分支，它是研究矩阵理论、与矩阵结合的有限维向量空间及其线性变换理论的一门学科，它的研究对象是向量、向量空间（或称线性空间）、线性变换和有限维的线性方程组。向量空间是现代数学的一个重要课题，被广泛地应用于抽象代数和泛函分析中；通过解析几何，线性代数又得以被具体表示. 由于科学研究中的非线性模型通常可以被近似为线性模型，使得线性代数被广泛地应用于自然科学和社会科学中. 线性代数课程已经成为高等学校理工科各专业学生的一门必修的重要基础理论课，尤其是计算机日益发展和普及的今天，线性代数已成为工科学生所必备的基础理论知识和重要的数学工具.

本书第一版自 2012 年 1 月出版至今已有两年，在这段时间里，为使本教材更适合教与学的需要，我们在自身实践的同时，又反复征求了同行和学生们的意见与建议，本次修订对部分章节内容作了修改，具体内容有增也有减，有合也有分. 主要工作有以下几个方面：

（1）调整并重编了部分章节. 考虑各章内容的衔接和教学选择的方便，将原书第 4 章第 1 节、第 2 节合并到第 3 章，重点介绍 n 维实向量空间的结构，并重新编写了本章的内容.

（2）增加了部分选讲内容. 根据与同行和专业基础课教师的交流，我们在第 3 章中增加了向量应用的例子，及一般向量空间的部分内容，在第 7 章增加了离散傅里叶变换的基本内容.

（3）例题、习题配制的改进. 每章中都增加了相应的例题、习题和应用题.

（4）进一步加强对抽象概念的直观说明. 第 3 章中对线性组合、线性相关、线性无关、矩阵的零空间、行空间、列空间和线性方程组的解集等方面，增加了几何直观的例子和图示.

不同学时建议教学内容

Ⅰ 32 学时教学内容

1.1 ~ 1.3，1.4 部分内容	6 学时
2.1 ~ 2.4，2.5 部分内容	10 学时
3.1 ~ 3.6	12 学时
5.1 ~ 5.2	4 学时

Ⅱ 48 学时教学内容（不含 MATLAB）

1.1 ~ 1.3，1.4	6 学时
2.1 ~ 2.5，2.6 部分内容	14 学时
3.1 ~ 3.6，3.8	14 学时
4.1 ~ 4.2	2 学时
5.1 ~ 5.3，5.4 部分内容	10 学时

6.1～6.5　　2 学时

Ⅲ 48 学时教学内容（含 MATLAB 上机 8 学时）

1.1～1.3，1.4　　6 学时

2.1～2.5，2.6 部分内容　　12 学时

3.1～3.6，3.8　　12 学时

5.1～5.3，5.4 部分内容　　10 学时

6.1～6.5　　6 学时

7.1～7.4 选讲　　2 学时

在本书第二版的修订过程中，得到了西南交通大学峨眉校区数学教研室全体老师的热情关怀和大力支持；也得到了成都西南交大出版有限公司领导和编审的鼎力支持. 在此，对他们的关心、支持和帮助一并表示感谢. 在这里，也非常感谢多年来一直关心、帮助我们的所有领导、老师、同事、朋友和家人.

限于编者水平有限，书中疏漏、不妥之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2014 年 2 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一版前言

线性代数是大学理、工、经管等学科所有专业学生的一门重要数学基础课. 随着计算机技术的发展，线性代数的重要性日益凸显，其应用领域也越来越广泛. 线性代数又是一门新概念多且比较抽象的课程，作为基础课，它一般被安排在第一学年，甚至是第一学期上，因而可以说它承担着提高学生素质，帮助学生完成从中学到大学跨越的重任. 因此在大学人才培养中，线性代数课程有着重要的地位和作用. 同时，现代软件技术为改进线性代数课程的教学方法提供了可能.

本教材在编写中作了以下探索：

（1）注重知识的引入和数学模型的建立，在阐明结果的同时着眼提高学生的素质. 在知识内容的引入与扩展上，尽量以提出问题、建立数学模型、化为数学问题、解决数学问题及应用等线索来展开. 例如，对三个不同的由简单到复杂的问题，利用数学建模思想，建立起三个不同的数学模型，一般化后即得数学问题：线性方程组，然后提出对线性方程组需要考虑的四个基本问题，并在此基础上逐步展开线性代数的内容，最后逐一回答这些基本问题，同时给出它们的一些应用.

（2）突出核心内容和核心计算技术，弱化部分不太重要的内容. 全书第一章直接进入线性代数的核心内容：线性方程组，同时引出最重要的计算技术：矩阵的初等行变换，并将它们贯穿于全书，在内容的不断深化扩展中把最基本、最重要的内容讲深讲透. 由于行列式在现代计算中的作用正在下降，我们将行列式弱化为第二章的一节内容：方阵的行列式，概念也改成递归定义. 这样使全书脉络清晰，核心内容突出，有助于集中精力掌握最基本、最重要的知识.

（3）注重几何直观，力图在教材中体现线性代数与几何的联系，这有助于学生理解抽象的概念. 建立了二（三）维向量的几何直观图；低维向量的线性运算的几何直观；线性方程组（二元、三元）解的情况的几何直观；从平面旋转的合成引出矩阵乘法的定义；二（三）维向量的线性相关与线性无关的几何表示；二（三）维图像变换的矩阵表示；从二次曲面方程的化简引出实对称阵的对角化以及实二次型通过正交变换化成标准形的问题.

（4）注重联系实际，加强应用. 线性代数在其他学科的渗透和应用非常广泛，教材中收集和整理了大量的应用实例和应用题目，并且单独介绍了线性代数内容的三个重要应用领域：线性规划问题、线性最小二乘法问题和马尔可夫链问题. 同时，在每章也安排了例题和习题，通过解决应用问题，提高实际应用线性代数知识的能力.

（5）例题丰富，讲解详细；习题安排由浅入深，循序渐进. 每部分知识之后均有例题和习题，对于重要的计算方法，给出了详细的步骤及文字说明，便于自学. 习题按小节配置，主要侧重对线性代数的概念和基本计算的训练，以帮助学生迅速掌握线性代数的知识和计算方法，同时注意兼容各类题型.每章结束之后有复习题，复习题分为基础篇、应用篇和提高篇. 基础篇习题是对本章所涉及概念、定理以及计算方法的一个小型总结；应用篇习题是为了提高学生应用线性代数知识而选择的，完成这部分题目有助于增加对相应知识的应用能力培养；提高篇习题有一定难度，是为学有余力或者准备考研的同学准备的.

（6）注重计算能力的培养. 学生的计算能力体现为按照逻辑规则进行推演的能力和借助计算机快速获得结果的能力（即计算能力），逻辑推演能力可以通过前面 5 章的学习获得. 教材中专门安排了利用数学软件 MATLAB 解线性代数问题和数学模型问题的内容，这有利于学生在掌握原理之后，进一步借助计算软件提高自己的计算能力.

（7）难点分散. 在编排教材章节时尽量使难点分散，由浅入深时注意逐步过渡，加强了相互之间的联系，力求使全书步步深入，使一般程度的学生通过努力都能学会全书. 全书涵盖了教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中有关线性代数的所有内容，且在核心部分有所展开和加深，因而为学生进一步深造打下了良好的线性代数基础.

（8）考虑到不同学时教学的需要，教材分为主体和选学（斜体或打星号的内容）两部分，通过合理配置可适用于不同学时不同层次的教学.

不同学时建议教学内容：

Ⅰ 32 学时教学内容

1.1 ~ 1.3，1.4 部分内容	5 学时
2.1 ~ 2.4，2.5 部分内容	10 学时
3.1 ~ 3.4	10 学时
4.1 部分内容，4.2 部分内容	3 学时
5.1 ~ 5.2	4 学时

Ⅱ 48 学时教学内容(不含 MATLAB)

1.1 ~ 1.3，1.4 部分内容	5 学时
2.1 ~ 2.5，2.6 部分内容	10 学时
3.1 ~ 3.4	10 学时
4.1 ~ 4.3	9 学时
5.1 ~ 5.3，5.4 部分内容	12 学时
6.1 ~ 6.5	2 学时

Ⅲ 48 学时教学内容（含 MATLAB）

1.1 ~ 1.3，1.4 部分内容	5 学时
2.1 ~ 2.5，2.6 部分内容	9 学时
3.1 ~ 3.4	9 学时
4.1 ~ 4.3，4.4 部分内容	9 学时
5.1 ~ 5.3，5.4 部分内容	10 学时
6.1 ~ 6.5	3 学时
7.1 ~ 7.3 选讲	3 学时

本书的出版得到了成都西南交大出版有限公司张雪总编和西南交通大学峨眉校区数学教研室全体老师的热情关怀和大力支持，在本书编写过程中还参考了一些现有教材，获益匪浅，在此一并致以衷心的感谢！

本书第一章由张兴元编写，第二、三、四章由万美凯编写，第五、六、七章由朱星亮编写，全书的修改和定稿由张兴元完成.

限于编者水平，疏漏、不妥之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2011 年 9 月

目　录

1 线性方程组

线性方程组广泛地出现在商业、经济学、社会学、生态学、人口统计学、遗传学、电子学、工程学以及物理学等领域，因而求解线性方程组是数学问题中最重要的问题之一，同时它还是线性代数的核心内容.

本章首先介绍解线性方程组的一套系统方法——高斯-约当消元法，它将贯穿全书；然后给出线性方程组解的情况的判别定理，最后是线性方程组的应用举例.

1.1 线性方程组的基本概念

1.1.1 引例

我们先从一个简单的问题开始.

引例 1 一群鸡和兔被关在同一个笼子内，脑袋数为 14 个，脚数为 40 只，问鸡、兔各有几只?

分析 解决这个问题的关键是从生活经验中把包含问题的内在数量关系找到，并表示出来.

解 在描述数量关系时，我们的祖先经常用画圆（○）、方框（□）等形式来表示，也叫做“天元”、“地数”等. 例如，把鸡的数量画成○，把兔子的数量画成□，利用生活常识，得到关于鸡和兔的头和脚的两个数量关系：

$$\bigcirc + \quad \square = 14;$$
$$2\times\bigcirc + 4\times\square = 40.$$

西方人多用 x, y 来表示未知的数量. 例如，用 x 表示鸡的数量，y 表示兔子的数量，上面的数量关系则表示为

$$x + \quad y = 14;$$
$$2x + 4y = 40.$$

它们都是该问题的数学模型——一个二元一次方程组. 对此问题，我们可用消元法得到其解：○=8，□=6（或 $x=8, y=6$）.

注意：此题的本质是数量关系，而非描述的符号○或 x，但第二种符号明显更方便一些，因此，我们也采用此记号.

下面看一个数学上的例子.

引例 2（插值问题） 给定 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 以及平面上的 $n+1$ 个点

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \cdots,\ (x_n, y_n),$$

要求确定一个函数 $y = f(x)$，使得 $y = f(x)$ 通过这些点. 此问题称为**插值问题**. 若 $y = f(x)$ 为多项式，则称为**多项式插值**.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

利用表 1.1 给出的数据，试求一个三次多项式：

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$

使它的曲线通过所有点，并求 $f(2.5)$（见图 1.1）.

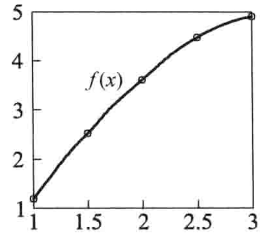

图 1.1

表 1.1　插值问题

x_i	1	1.5	2	3
$f(x_i)$	1.2	2.5	3.6	4.8

解　由函数 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 通过表中已知 4 点，可以得到四个变量的方程组：

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=1.2, \\ 3.375a_0+2.25a_1+1.5a_2+a_3=2.5, \\ 8a_0+4a_1+2a_2+a_3=3.6, \\ 27a_0+9a_1+3a_2+a_3=4.8. \end{cases}$$

这就是求解该问题的数学模型——一个四元一次方程组.

求解该方程组可以得到 a_0, a_1, a_2, a_3 的数值，从而确定函数 $f(x)$，再利用 $f(x)$ 计算出 $f(2.5)$.

引例 3　热传导研究中的一个重要问题是，已知金属薄片边界附近的温度，确定其稳态温度的分布. 假设图 1.2 所示的金属薄片表示一根金属柱的横截面，并且忽略与盘片垂直方向上的热量传递. 将薄片划分成一些正方形网格，位于四条边界上的点称为边界点，而其他点叫做内点. 测量表明，当加热或者冷却时，任一内点的温度约等于与它相邻的四个网格点（内点或边界点）温度值的算术平均. 我们希望边界点的温度（°C）如图 1.2 所示，这可能吗？

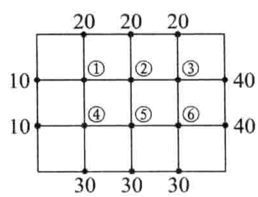

图 1.2

解　将 6 个内点编号为①～⑥（见图 1.2），并设对应的温度分别为 t_1 至 t_6. 由于任一内点的温度约等于与其相邻的四个网格点（内点或边界点）温度值的算术平均，因此可以得到内点温度分布满足的方程组：

$$\begin{cases} 4t_1-t_2-t_4=30, \\ -t_1+4t_2-t_3-t_5=20, \\ -t_2+4t_3-t_6=60, \\ -t_1+4t_4-t_5=40, \\ -t_2-t_4+4t_5-t_6=30, \\ -t_3-t_5+4t_6=70. \end{cases}$$

这个方程组就是该问题的数学模型——一个六元一次方程组.

如果该方程组有解，这样的边界温度分布是可能存在的；否则，这样的边界温度分布就是不可能存在的.

1.1.2 线性方程组的基本概念

在实际中遇到的许多问题，都可通过使用字母如 $x, y, \cdots$ 来表示未知量，根据问题的等量关系列出含未知量的方程组. 若每个方程中未知量都是一次，则称为线性方程组. 为了统一研究，下面建立线性方程组的一般模型：

定义 1.1 **线性方程组**（linear equations）是一个或者多个一次方程的集合，一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中每个方程都含有相同的未知变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$， a_{ij} 称为第 i 个方程中未知量 x_j 的**系数** $(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$， $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 称为**右端常量**，**线性方程组又称为线性系统**. 如果右端常量 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$，则称方程组（1.1）为**齐次的**，否则称方程组（1.1）为**非齐次的**.

在方程组（1.1）中，方程的个数 m 与未知量的个数 n 可以相等，也可以不相等.

定义 1.2 如果用一组数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 分别替换线性方程组（1.1）中未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 后，线性方程组（1.1）中的每个方程均变成恒等式，则称 n 元有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是线性方程组（1.1）的一个**解**.

线性方程组（1.1）的所有解的集合称为方程组的**解集**.

如果线性方程组（1.1）有解，即解集不为空集，则称它是**相容**的；如果无解，即解集为空集，则称它是**不相容**的.

如果两个线性方程组有相同的解集，则称它们是**等价**或**同解**.

1.1.3 矩阵记号

线性方程组（1.1）的未知量的系数 a_{ij} 可以紧凑地记录成一个矩形阵列：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

称为线性方程组（1.1）的**系数矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$；列表

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

称为**右端向量**，记为 $\boldsymbol{b}$；矩形阵列

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{1.4}$$

称为方程组（1.1）的**增广矩阵**，记作$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$，可简单记为$\tilde{\boldsymbol{A}}$.

简单地说，矩阵就是一个矩形的数字阵列．一个m行n列矩阵称为$m\times n$矩阵.

例如，引例2中的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3.375 & 2.25 & 1.5 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{和} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1.2 \\ 3.375 & 2.25 & 1.5 & 1 & 2.5 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3.6 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 4.8 \end{array}\right].$$

1.1.4　线性方程组的基本问题

根据实际问题和数学的需要，对于线性方程组（1.1），必须研究以下几个基本问题：

基本问题1：如何求线性方程组（1.1）的解？

基本问题2：线性方程组（1.1）是否一定有解？若有解，有多少个解？

基本问题3：如果线性方程组（1.1）有无穷多解，解集的结构如何？

基本问题4：如果线性方程组（1.1）无解，能否找到一个满意的近似解？

本章将围绕前两个问题展开讨论，对于基本问题3将在第3章得到结论，对于基本问题4将在第7章介绍.

习　题　1.1

1. 写出下列线性方程组的系数矩阵与增广矩阵.

（1）$\begin{cases} x_1+3x_2=1, \\ 2x_1-x_2=0; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1=2, \\ x_2=3; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1, \\ 2x_1 \qquad +x_3=0; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x_1+x_3-x_4=1, \\ x_2+2x_3+x_4=0. \end{cases}$

2. 写出与下列每一个增广矩阵对应的线性方程组.

（1）$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$；　　（2）$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$；

（3）$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$　　（4）$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$.

3. 营养学家配制一种具有1 200卡，30 g蛋白质及300 mg维生素C的配餐．有3种食物可供选用：果冻、鲜鱼和牛肉．它们中每盎司（28.35 g）的营养含量如表1.2所示.

表1.2　营养含量表

营养含量 \ 食物	果冻	鲜鱼	牛肉
热量（卡）	20	100	200
蛋白质	1	3	2
维生素C	30	20	10

请建立计算所需果冻、鲜鱼、牛肉的数量的线性方程组.

4. 高锰酸钾($KMnO_4$)与硫酸锰在水中发生化学反应生成二氧化锰、硫酸钾和硫酸，其方程式为：

$$(x_1)KMnO_4+(x_2)MnSO_4+(x_3)H_2O \longrightarrow (x_4)MnO_2+(x_5)K_2SO_4+(x_6)H_2SO_4$$

根据在化学反应中原有的原子不可能消失，也不可能产生新原子的原理，试建立配平该化学方程式的线性方程组模型.

1.2 高斯（Gauss）–约当（Jordan）消元法

如何求线性方程组（1.1）的解呢？这是一个古老的数学问题，早在《九章算术》中就已详细记述了如何运用“消去”方法求解带有三个未知量的三方程系统，但没有发展成系统的求解线性方程组理论. 高斯①（Gauss）大约在 1800 年提出了高斯消元法，并用它解决了天体计算和后来的地球表面测量计算中的最小二乘法问题. 在最初的几年里，高斯消元法一直被认为是测地学发展的一部分，而不是数学. 高斯-约当消元法则最初出现在由 Wilhelm Jordan 撰写的测地学手册中.

1.2.1 高斯–约当消元法

下面通过一个具体的例子来了解高斯-约当消元法是如何工作的.

例 1 求解线性方程组：$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=-4, \\ -4x_1+6x_2-x_3=7, \\ 2x_2-6x_3=4. \end{cases}$

分析 如果我们能够设法消去未知量 x_1,x_2，最后剩下一个含 x_3 的一次方程，那么就能求出 x_3 的值，从而得到只含有 x_1,x_2 的线性方程组. 类似地，可以求出未知量 x_2,x_1 的值. 所谓消去未知量 x_1，就是使 x_1 的系数变成 0. 为了使求解方法适应于一般的线性方程组，应当使解法有规律可循.

解 我们采用方程组的一般式和增广矩阵两种记号分别描述高斯-约当消元过程，以便对照并寻找解法的特点. 方程组右边的数字①、②、③表示方程的序号，而增广矩阵右边的数字①、②、③表示增广矩阵的行号.

$$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=-4 & ① \\ -4x_1+6x_2-x_3=7 & ② \\ 2x_2-6x_3=4 & ③ \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 4 & -4 \\ -4 & 6 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

第一步：保留方程①中的 x_1，消去其余方程中的 x_1，这可以通过方程①乘以 4 再加到方

① Gauss,Carl Friedrich（高斯 C. F, 1777.4.30—1855.2.23）

德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家.他有数学王子的美誉，被誉为历史上最伟大的数学家之一，和阿基米德、牛顿、欧拉同享盛名.高斯的成就遍及数学的各个领域，在数论、非欧几何、微分几何、超几何级数、复变函数论、椭圆函数论等方面均有开创性贡献.他十分注重数学的应用，并在天文学、大地测量学和磁学的研究中也偏重于用数学方法进行研究.

程②上来消去方程②中的 x_1；方程③中 x_1 的系数已经为 0，不需要再消去，即

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 & ① \\ \quad -6x_2 + 15x_3 = -9 & ② \\ \quad 2x_2 - 6x_3 = 4 & ③ \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 15 & -9 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

第二步：交换方程②和③（目的是避免分数运算）：

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 & ① \\ \quad 2x_2 - 6x_3 = 4 & ② \\ \quad -6x_2 + 15x_3 = -9 & ③ \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & -6 & 15 & -9 \end{array}\right]\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

第三步：方程②乘以 3 再加到方程③上，从而消去方程③中的 x_2，即

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 & ① \\ \quad 2x_2 - 6x_3 = 4 & ② \\ \quad\quad -3x_3 = 3 & ③ \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

此时，方程③中只含有未知量 x_3，可以解出 x_3，即通过下述运算来实现：

第四步：以 $\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ 乘以方程③，得

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 & ① \\ \quad 2x_2 - 6x_3 = 4 & ② \\ \quad\quad x_3 = -1 & ③ \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

第五步：将 $x_3 = -1$ 代入方程①和方程②，得到只含有 x_1, x_2 的方程组. 即通过运算：方程①加上方程③的 (-4) 倍，方程②加上方程③的 6 倍来实现，即

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 & ① \\ \quad 2x_2 = -2 & ② \\ \quad\quad x_3 = -1 & ③ \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

第六步：方程②只含未知量 x_2，因此可以求出 x_2. 通过方程②乘以 $\dfrac{1}{2}$，得

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 & ① \\ \quad x_2 = -1 & ② \\ \quad\quad x_3 = -1 & ③ \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

第七步：将 $x_2 = -1$ 代入方程①，可以解出 x_1. 即通过运算：方程①加上方程②的 3 倍来实现，即

$$\begin{cases} x_1 = -3, \\ \quad x_2 = -1, \\ \quad\quad x_3 = -1, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

因此，方程组的解为: $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = -1$.

第三步到以后形式的方程组称为**阶梯形方程组**.

在例 1 中，我们对线性方程组作了三种基本变换：

（i）交换两个方程的先后次序；

（ii）将一个方程的每一项乘以一个非零常数；

（iii）把一个方程替换成它本身与另一个方程的倍数之和.

这三种变换称为**线性方程组的初等变换**. 不难验证，线性方程组经过三种初等变换后得到的方程组的解集与原方程组的解集相同. 因此求解方程组就是利用线性方程组的三种初等变换，把原方程组变成阶梯形方程组，然后从最后一个方程开始，逐次往回代，求得原方程组的解.

1.2.2 矩阵的初等变换

仔细观察例 1 中的等价方程组对应的增广矩阵，我们会发现线性方程组求解可以通过对增广矩阵进行运算得到，并且用于得到等价方程组的线性方程组的初等变换与增广矩阵的行的三种运算对应，我们称之为矩阵的初等行变换.

定义 1.3 下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**（elementary row transformation）：

（i）**交换行**：交换第 i 行和第 j 行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；

（ii）**数乘行**：以非零常数 λ 乘以第 i 行的所有元素，记作 $\lambda \times r_i$ 或 λr_i；

（iii）**替换行**：第 i 行加上第 j $(j \neq i)$ 行的 λ 倍，记作 $r_i + \lambda \times r_j$ 或 $r_i + \lambda r_j$.

注意：矩阵的初等行变换是可逆的. 事实上，如果两行交换，那么再进行一次相同的行交换，它们就可以回到原来的位置；如果第 i 行乘以非零常数 λ，那么将得到的新的第 i 行乘以 $\dfrac{1}{\lambda}$ 就又回到原来的行；考虑第 i 行和第 j $(j \neq i)$ 行，如果第 j 行的 λ 倍加到第 i 行得到新的第 i 行，那么将第 j 行的 $(-\lambda)$ 倍加到新的第 i 行上就得到原来的第 i 行.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过有限次初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ **行等价**，记作 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$. 关于矩阵的行等价，容易验证下面的性质：

（i）自反性：$\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{A}$；

（ii）对称性：若 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{A}$；

（iii）传递性：若 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{C}$.

定理 1.1 如果两个线性方程组的增广矩阵是行等价的，那么这两个线性方程组有相同的解集.

提示：利用增广矩阵行等价和初等行变换是可逆的即可证明.

例 1 中出现了两类特殊形状的矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

它们分别称为**行阶梯形矩阵**和**行最简形矩阵**. 一般地，

定义 1.4 如果一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足以下三个特点：

（i）所有元素均为零的行（称为**全零行**）必在不全为零的行（称为**非零行**）之后；

（ii）每一非零行的最左边的非零元素（称为**先导元素**）所在的列位于前一行（如果存在）先导元素所在列的右边；

（iii）每一先导元素所在列下方的元素（如果存在）均为零，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com