

1.1.2 结构力学的研究对象和任务

为了使结构既能安全、正常地工作,又能符合经济的要求,就需对其进行强度、刚度和稳定性的计算。这一任务由材料力学、结构力学、弹性力学等几门课程共同承担。材料力学主要研究单个杆件的计算;结构力学则在此基础上着重研究由杆件所组成的结构;弹性力学将对杆件作更精确的分析,并将研究板、壳、块体等非杆状结构。当然,这种分工不是绝对的,各课程间常存在相互渗透的情况。

如上所述,结构力学的研究对象主要是杆件结构,其具体任务是:

- (1) 研究结构的组成规则和合理形式;
- (2) 研究结构在荷载等因素作用下的内力和位移的计算,以便进行结构强度和刚度的验算;而强度和刚度的验算可利用材料力学的方法,在结构力学中一般不再叙述。
- (3) 研究结构的稳定性计算,以及动力荷载作用下结构的反应等问题。

1.1.3 结构力学课程的能力培养及学习方法

1. 结构力学课程的能力培养

结构力学是土木工程各专业的一门重要的技术基础课,它一方面要用到数学、理论力学和材料力学等课程的知识,另一方面又为学习建筑结构、桥梁、隧道等课程和日后工作提供必要的基本理论和计算方法。所以结构力学课程教学基本要求提出了分析能力、计算能力、判断能力和自学能力的培养要求。

(1) 分析能力要求对常用的杆件结构具有选择计算简图的初步能力,并能根据具体问题选择恰当的计算方法。这是进行结构分析的前提,是学好结构力学的关键所在。

(2) 计算能力要求具有对各种静定、超静定结构进行计算的能力,初步具有使用结构计算程序的能力。在计算能力中,手算是基础,是进行结构分析的基本要求,应达到正确、熟练、灵活应用的水平,此为经典结构力学的根本任务。而电子计算机的出现和广泛应用,对结构力学学科产生了巨大的影响,一些与计算关系密切的内容占据越来越重要的地位,逐步形成借助计算机采用数值方法解决结构力学问题的分支学科——计算结构力学。

(3) 判断能力要求具有对计算结果进行校核、对内力分布的合理性作出定性判断的能力。在结构分析的过程中,无论是应用手算还是电算,都应具有定性判断的能力,会用简略的方法确定计算结果的合理性。通过对这一能力培养的要求,催生了结构力学的另外一个分支——概念结构力学。

(4) 自学能力要求具有自学和阅读结构力学教学参考书的能力。自学包含两个方面:一是学习新知识;二是消化已学知识。通过学习,逐步扩大自己的知识面,加厚知识积累;通过消化,把已学的知识变成自己的,让所学知识落地生根。

2. 结构力学课程的学习方法

本课程中,新的、纯粹的理论推导并不多,主要是将前面所学的理论力学、材料力学等课程的知识,综合应用在结构的分析和计算中。学习时要注意对问题的分析方法和解题思路,强调能力培养。

1) 要注意结构力学与其他课程的联系

结构力学是一门重要的专业基础课,在各门课程的学习中起着承上启下的作用。

先修课: 数学(高等数学、线性代数等)、理论力学(刚体机械运动的一般规律和刚体的力学分析)、材料力学(单根杆件的强度、刚度、稳定性)。对先修课程的知识,应根据情况进行必要的复习,并在运用中得到巩固和提高。

后续课: 建筑工程的钢筋混凝土及砌体结构、高层建筑结构等,交通土建的结构设计原理、桥梁工程等专业课程(为其提供必要的基本理论和计算方法)。

2) 要注意分析方法与解题思路

结构力学的计算问题分为两类: 一类为静定性的问题,只需根据下面三个基本条件的第一个条件——平衡条件即可求解;另一类为超静定性的问题,必须满足以下三个基本条件,方能求解。三个基本条件是:

(1) 力系的平衡条件: 在一组力系作用下,结构的整体及其任何一部分都应满足力系的平衡条件。

(2) 变形的连续条件,即几何条件: 连续的结构发生变形后,仍是连续的,材料没有重叠或缝隙;同时结构的变形和位移应满足支座和结点的约束条件。

(3) 物理条件: 把结构的应力和变形联系起来的物性条件,即物理方程或本构方程。

以上三个基本条件,贯穿在本课程的全部计算方法中,只是满足的次序和方式不同而已。在学习时要注意各种方法在其计算过程中是怎样实现三个基本条件的要求的。

学习时要着重掌握各种方法的解题思路,特别是从这些具体的计算方法中学习分析问题的一般方法,例如: 如何由已知领域逐步过渡到未知领域的方法,如何将整体分解为局部再由局部综合成整体的方法,如何把有关几个问题加以对比的方法,等等。

3) 要注意多练

做题练习是学习结构力学的重要环节,不做一定数量的习题,是很难掌握其中的概念、原理和方法的。但是做题也要避免各种盲目性: ①不看书,不复习,只埋头做题;②贪多求快,不求甚解;③只会对答案,不会自己校核;④错题不改正,不会从中吸取教训得以提高。

1.2 荷载的分类

荷载是作用在结构上的主动力,可根据不同特征进行分类。

1. 按荷载作用时间长短分类

按荷载作用时间的长短,可分为恒载和活载。

(1) 恒载: 是指长期作用在结构上的不变荷载,如结构的自重、土压力等。

(2) 活载: 是指暂时作用在结构上的可变荷载,如人群荷载、列车荷载、吊车荷载、雪荷载和风荷载等。

2. 按荷载作用位置是否变化分类

按荷载作用位置是否变化,可分为固定荷载和移动荷载。

(1) 固定荷载: 是指在结构上的作用位置不变化的荷载,如恒载和某些活载(风荷载、雪荷载等)。

(2) 移动荷载: 是指在结构上的作用位置发生变化的荷载,如列车荷载、车辆荷载、吊车荷载等。

3. 按荷载对结构产生的动力效应大小分类

按荷载对结构产生的动力效应大小,可分为静力荷载和动力荷载。

(1) 静力荷载:是指其大小、方向和作用位置不随时间变化或变化极为缓慢的荷载,它不致使结构产生显著的加速度,因而惯性力的影响可以忽略。结构的自重和其他恒载就是静力荷载。

(2) 动力荷载:是指随时间迅速变化或在短暂时段内突然作用或消失的荷载,它将使结构产生显著的加速度,因而惯性力的影响不能忽略。动力机械运转时产生的振动荷载、打桩机产生的冲击荷载、风及地震产生的随机荷载等是动力荷载的例子。

除荷载外,还有其他一些非荷载因素作用也可使结构产生内力或位移,例如温度变化、制造误差、材料收缩以及松弛、徐变等,统称为广义荷载。

进行结构计算之前,应先确定结构所受的荷载。确定荷载在结构设计中极为重要,荷载估计过大,引起设计的结构过于笨重,造成浪费;荷载估计过低,则导致设计的结构不安全。精确地确定荷载比较复杂,荷载规范总结了以往设计经验和科学研究成果,供设计者参考应用。但在不少情况下,设计者需要结合实际情况进行研究,合理地确定荷载。

1.3 结构的计算简图

1.3.1 计算简图及其选择原则

实际结构复杂多样,完全按照结构的实际情况来进行力学分析,是不可能的,也是不必要的。因此对实际结构进行力学分析之前,必须加以简化,略去其次要因素,突出其主要特点,用一个简化图形来代替实际结构,这种图形就称为结构的计算简图。

计算简图的选择是力学计算的基础,选择的恰当与否直接影响着计算的工作量和精确度。若计算简图选择不恰当,则计算结果不能反映结构的实际工作状态,严重的将会造成工程事故,故应慎重对待。

选择计算简图应遵循以下原则:

- (1) 从实际出发:计算简图应能反映结构的主要受力和变形性能;
- (2) 分清主次,略去次要因素:计算简图应便于分析计算。

1.3.2 计算简图的简化要点

1. 体系的简化

一般结构实际上都是空间结构,各部相连成为一空间整体,以承受各方向可能出现的荷载。在多数情况下,常忽略一些次要的空间约束,而将实际结构分解为平面结构。当然也有一些结构具有明显的空间特征而不宜简化成平面结构,则必须按照空间结构的理论进行计算。

2. 杆件的简化

杆件的截面尺寸一般远小于杆件长度,可近似地采用平截面假定,故截面上的应力可以根据截面的内力来确定,截面上的变形也可根据轴线上的变形来确定。因此,在计算简图中,杆件用其轴线表示。

算简图。

例 1-2 图 1-14(a)所示为一钢筋混凝土单层厂房结构,梁和柱都是预制的。柱子下端插入基础的杯口内,然后用细石混凝土填实。梁和柱的连接是通过将梁端和柱顶的预埋钢板进行焊接而实现的。在横向平面内梁与柱组成排架(图 1-14(b)),各个排架之间,在梁上有屋面板连接,在柱的牛腿上有吊车梁连接。试讨论其计算简图。

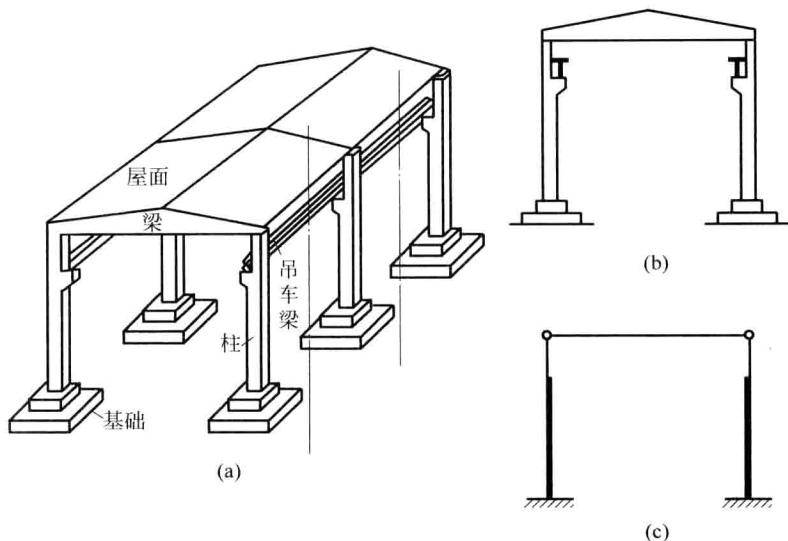


图 1-14 单层厂房结构的计算简图
(a) 单层厂房结构; (b) 平面单元; (c) 计算简图

解: 确定上述的厂房结构时,可采用图 1-14(c)所示的计算简图。

首先,厂房结构虽然是由许多排架用屋面板和吊车梁连接起来的空間结构,但各排架在纵向以一定的间距有规律地排列着。作用于厂房上的荷载,如恒载、雪载和风载等一般是沿纵向均匀分布的,通常可把这些荷载分配给每个排架,而将每一排架看作一个独立的体系,于是实际的空間结构便简化成平面结构(图 1-14(b))。

其次,梁和柱都用它们的几何轴线来代表。由于梁和柱的截面尺寸比长度小得多,轴线都可近似地看作直线。

梁和柱的连接只依靠预埋钢板的焊接,梁端和柱顶之间虽不能发生相对移动,但仍有发生微小相对转动的可能,因此可取为铰结点。柱底和基础之间可以认为不能发生相对移动和相对转动,因此柱底可取为固定端。

1.4 杆件结构的分类

杆件结构的类型很多,可以从不同的观点来分类。

1. 按照组成和受力特性分类

按照结构的组成和受力特性,杆件结构通常可分为下列几类:

(1) 梁: 梁是一种受弯构件,其轴线通常为直线,当荷载垂直于梁轴线时,横截面上的

图 2-11(b)所示为两个刚片用三根不全平行也不交于同一点的链杆相连的情况。此时可把链杆 AB 、 CD 看作是在其交点 O 处的一个铰。故此两刚片又相当于用铰 O 和链杆 EF 相连,而铰与链杆不在一直线上,故为几何不变体系,而且没有多余联系。

如图 2-13 所示体系,可将地基作为一个刚片, T 字形部分 CDE 作为一个刚片。左边的 AC 部分虽为折线,但本身是一个刚片且只用两个铰与其他部分相联,因此它实际上与 A 、 C 两铰连线上的一根链杆(如图中虚线所示)的作用相同。同理,右边的 BD 部分也相当于一根链杆。这样,此体系便是两个刚片用 AC 、 BD 和 EF 三根链杆相联而组成,三杆既不全平行也不交于同一点,故为几何不变体系,而且没有多余联系。

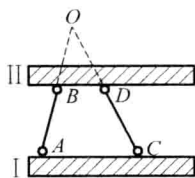


图 2-12 虚铰

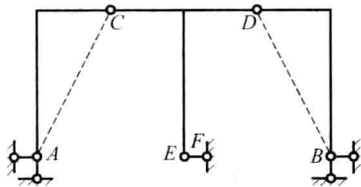


图 2-13 两刚片规则的应用

以上介绍了几何不变无多余联系平面体系的三个基本组成规则,而它们实质上只是一个规则,即三刚片规则。凡是按照这些规则组成的几何不变体系,都是没有多余联系的,其计算自由度均为 $W=0$ (或只就体系本身 $W=3$),因此不必再进行 W 的计算。若体系除了符合上述组成规则之外,还有另外的联系,便是具有多余联系的几何不变体系,此时多余联系的数目就等于这些另外的联系数目。

2.4 瞬变体系

2.3 节所述三刚片规则中,规定三个铰不在同一直线上,现在来讨论三铰共线的情况。如图 2-14 所示,三个刚片用位于同一直线上的三个单铰 A 、 B 、 C 两两铰接。假设刚片 III 不动,刚片 I、II 分别绕铰 A 、 B 转动时,在 C 点处两圆弧有一公切线,故此瞬时铰 C 可沿此公切线方向移动,因而体系是几何可变的。从联系布置情况来看,这也是布置不当: AC 、 BC 两链杆都是水平的,因而对限制 C 点的水平位移来说具有多余联系,而在限制 C 点的竖向位移上则缺少联系,故 C 点仍可沿竖直方向移动。不过一旦发生微小位移后,三铰就不再共线,运动也就不再继续发生。这种原为几何可变,经微小位移后即可转化为几何不变的体系,称为瞬变体系。瞬变体系也是一种几何可变体系。为了区别起见,又将经微小位移后仍能继续发生刚体运动的几何可变体系称为常变体系。这样,几何可变体系便包括常变和瞬变两种。

瞬变体系既然只是瞬时可变,随后即转化为几何不变,那么工程结构中能否采用这种体系呢? 为此来分析图 2-15 所示体系的内力。由平衡条件可知, AC 和 BC 杆的轴力为

$$F_N = \frac{F}{2\sin\theta}$$

当 $\theta=0$ 时,便是瞬变体系,此时若 $F=0$ (称为零荷载),则 F_N 为不定值;若 $F\neq 0$,则 F_N 趋向 ∞ 。这表明,瞬变体系即使在很小的荷载作用下也会产生巨大的内力,从而可能导致体系的破

标成正比。当荷载已知时,只需求出相应简支梁的弯矩方程,然后除以常数 F_H ,便得到合理拱轴线方程。

例 3-11 试求图 3-25(a)所示对称三铰拱在图示满跨竖向均布荷载 q 作用下的合理拱轴线。

解: 相应简支梁(图 3-25(b))的弯矩方程为

$$M^0 = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{1}{2}qx(l-x)$$

又由式(3-3)求得推力为

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f}$$

于是由式(3-6)有

$$y = \frac{M^0}{F_H} = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

可见,在满跨竖向均布荷载作用下,三铰拱的合理拱轴线是抛物线。

例 3-12 试求图 3-26 所示对称三铰拱在拱上填料重量作用下的合理拱轴线。拱上荷载集度按 $q=q_C+\gamma y$ 变化,其中 q_C 为拱顶处的荷载集度, γ 为填料容重。

解: 根据图 3-26 所示的坐标系,式(3-4)第一式成为

$$M = M^0 - F_H(f-y)$$

由 $M=0$ 有

$$f-y = \frac{M^0}{F_H}$$

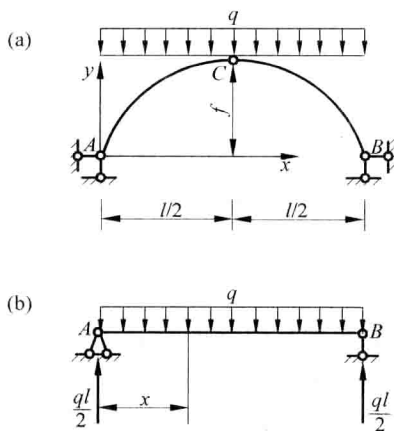


图 3-25 例 3-11 图

(a) 三铰拱及荷载; (b) 相应简支梁

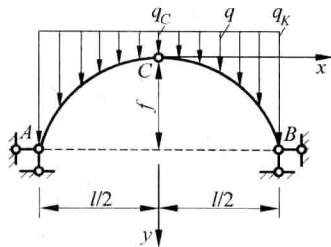


图 3-26 例 3-12 图

本题由于荷载集度 q 随拱轴线纵坐标 y 而变,而 y 尚属未知,故相应简支梁的弯矩方程 M^0 亦无法事先写出,因而不能由上式直接求出合理拱轴线方程。为此,将上式两边分别对 x 求导两次得

$$-y'' = \frac{1}{F_H} \frac{d^2 M^0}{dx^2}$$

注意到 q 以向下为正时, 有 $\frac{d^2 M^0}{dx^2} = -q$, 故得

$$y'' = \frac{q}{F_H} \quad (3-7)$$

这就是竖向荷载作用下合理拱轴线的微分方程。求解此微分方程并结合边界条件, 即可确定合理拱轴线方程。

对于本例, 将 $q = q_c + \gamma y$ 代入式(3-7), 可得

$$y'' - \frac{\gamma}{F_H} y = \frac{q_c}{F_H}$$

这是一个二阶常系数线性非齐次微分方程, 它的一般解可用双曲线函数表示

$$y = A \cosh \sqrt{\frac{\gamma}{F_H}} x + B \sinh \sqrt{\frac{\gamma}{F_H}} x - \frac{q_c}{\gamma}$$

常数 A, B 可由边界条件确定:

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } y=0, \text{ 得} \quad A = \frac{q_c}{\gamma}$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } y'=0, \text{ 得} \quad B=0$$

于是, 可得合理拱轴线的方程为

$$y = \frac{q_c}{\gamma} \left(\cosh \sqrt{\frac{\gamma}{F_H}} x - 1 \right)$$

为了实际应用方便, 避免直接计算推力 F_H , 可将上式改写为另一种形式。为此, 引入比值

$$m = \frac{q_K}{q_c} \quad (3-8)$$

由于 $q_K = q_c + \gamma f$, 故有

$$m = \frac{q_c + \gamma f}{q_c}$$

可得

$$\frac{q_c}{\gamma} = \frac{f}{m-1}$$

再引入 $\xi = \frac{x}{l/2}$, 并令 $K = \sqrt{\frac{\gamma}{F_H}} \frac{l}{2}$, 则合理拱轴线方程可写为

$$y = \frac{f}{m-1} (\cosh K\xi - 1) \quad (3-9)$$

这一方程所代表的曲线称为列格式悬链线。式中 K 值可由比值 m 和下述第三个边界条件确定: 当 $\xi=1$ 时, $y=f$, 代入式(3-9)得

$$\cosh K = m \quad (3-10a)$$

或

$$K = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1}) \quad (3-10b)$$

可见, 只要当拱趾与拱顶处的荷载集度之比 $m = \frac{q_K}{q_c}$ 给定时, 合理拱轴线方程即可确定。但

当 $m=1$ 时, 式(3-9)不再适用, 此时 $q_K = q_c$, 拱上荷载为均布荷载, 合理拱轴线应为抛物线

反力和内力的解答只有一种,而且是有限的数值。这就是静定结构静力解答的唯一性。据此可知,在静定结构中,能够满足平衡条件的内力解答就是真正的解答,并可确信除此之外再无其他任何解答存在。这一特性,对于静定结构的所有理论,具有基本的意义。

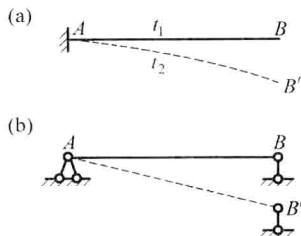


图 3-48

(a) 温度变化; (b) 支座位移

(2) 在静定结构中,除荷载外,其他任何原因如温度改变、支座位移、材料收缩、制造误差等均不引起内力。

如图 3-48(a)所示简支梁,若其上、下侧温度分别升高 t_1 和 t_2 (假设 $t_2 > t_1$), 则梁将变形即产生伸长和弯曲(如图 3-48(a)中虚线所示)。但因没有荷载作用,由平衡条件可知,梁的反力和内力均为零。又如图 3-48(b)所示简支梁,其支座 B 发生了沉陷,因而梁随之产生位移(如图 3-48(b)中虚线所示)。同样,由于荷载为零,其反力及内力也均为零。实际上,当荷载为零时,零内力状态能够满足结构所有各部分的平衡条件,对于静定结构,这就是唯一的解答。因此,可以

断定除荷载外其他任何因素均不引起静定结构的内力。

(3) 静定结构的局部平衡特性

当由平衡力系组成的荷载作用于静定结构的某一本身为几何不变的部分上时,则只有此部分受力,其余部分的反力和内力均为零。

例如图 3-49(a)所示静定结构,有平衡力系作用于本身为几何不变的部分 DE 上。若依次取 BC 和 AB 为隔离体计算,则可得知支座 C 处的反力、铰 B 处的约束力及支座 A 处的反力均为零。由此可知,除 DE 部分外其余部分的内力均为零。结构的弯矩图如图中阴影线所示。又如图 3-49(b)所示,有平衡力系作用在本身几何不变部分 BG 上,同上分析可知除 BG 部分外其余部分均不受力。这种情形实际上具有普遍性。因为当平衡力系作用于静定结构的任何本身几何不变部分上时,若设想其余部分均不受力而将它们撤去,则所剩部分由于本身是几何不变的,在平衡力系作用下仍能独立地维持平衡。而所去部分的零内力状态也与其零荷载相平衡。这样,结构上各部分的平衡条件都能得到满足。根据静力解答的唯一性可知,这样的内力状态就是唯一的解答。

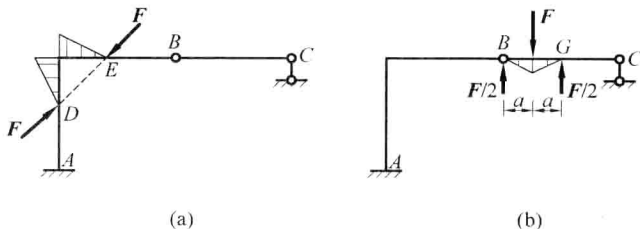


图 3-49 静定结构的局部平衡特性

当平衡力系作用的部分本身不是几何不变部分时,则上述结论一般不能适用。例如图 3-50(a)所示,平衡力系作用于 HBG 部分。若仍设想其余部分均不受力而将它们撤去,则所剩部分是几何可变的,不能承受图示荷载的作用而维持平衡。因此,设想其余部分不受力是错误的。但当几何可变部分在某些特殊的荷载作用下可以独立维持平衡时,则上述结

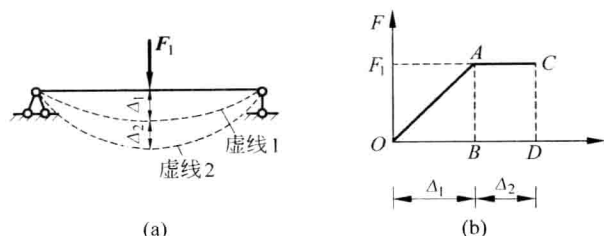


图 4-3 实功与虚功。

(a) 梁的变形；(b) 荷载位移图

4.2.2 变形体系的虚功原理

在理论力学中已讨论过质点系的虚位移原理(或称为虚功原理),它表述为:具有理想约束的质点系在某一位置处于平衡的必要和充分条件是,对于任何虚位移,作用于质点系的主动力所做的虚功总和为零。

在刚体中,因任何两点间的距离保持不变,故刚体属于具有理想约束的质点系。由若干个刚体用理想约束联结起来的体系自然也是具有理想约束的质点系。此外,作用于体系的外力通常包括荷载(主动力)和约束反力,而对于任何约束,当去掉该约束而以相应的反力代替其对体系的作用时,其反力便可当作荷载(主动力)看待。因此,虚功原理应用于刚体体系时又可表述为:刚体体系处于平衡的必要和充分条件是,对于任何虚位移,所有外力所做虚功总和为零。

虚功原理应用于变形体系时,外力虚功总和则不等于零。对于杆件结构,变形体系的虚功原理可表述为:变形体系处于平衡的必要和充分条件是,对于任何虚位移,外力所做虚功总和等于各微段上的内力在其变形上所做的虚功总和,或者简单地说,外力虚功等于变形虚功。

下面来说明上述原理的正确性,为了简明,这里只着重从物理概念上来论证其必要条件。关于更详细的数学推导及充分性的证明,可参考其他书籍。

图 4-4(a)表示一平面杆件结构在力系作用下处于平衡状态,图 4-4(b)表示该结构由于别的原因(图中未示出)而产生的虚位移状态,下面分别称这两个状态为结构的力状态和位移状态。这里,虚位移可以是与力状态无关的其他任何原因引起的,甚至是假想的。但虚位移必须是微小的,并为支承约束条件和变形连续条件所允许,即应是所谓协调的位移。

现从图 4-4(a)的力状态中取出一个微段来研究,作用在微段上的力除外力 q 外,还有两侧截面上的内力即轴力、剪力和弯矩(注意:这些力对整个结构而言是内力,对于所取微段而言则是外力,由于习惯,同时也为了与整个结构的外力即荷载和支座反力相区别,这里仍称这些力为内力)。在图 4-4(b)的位移状态中,此微段由 $ABCD$ 移到了 $A'B'C'D'$,于是上述作用在微段上的各力将在相应的位移上做虚功。把所有微段的虚功总加起来,便是整个结构的虚功。下面按两种不同的途径来计算虚功。

(1) 按外力虚功与内力虚功计算。设作用与微段上所有各力所做虚功总和为 dW ,它可以分为两部分:一部分是外力所做的功 dW_e ,另一部分是截面上的内力所做的功 dW_i ,即

$$dW = dW_e + dW_i$$

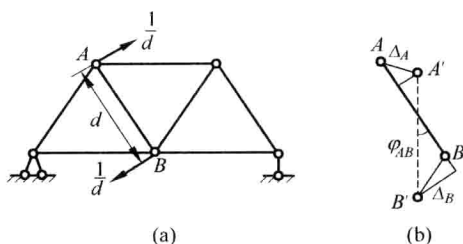


图 4-7 求桁架杆件角位移的虚拟状态

一力系等,则可统称为广义力。这样,在求任何广义位移时,虚拟状态所加的荷载就应是与所求广义位移相应的单位广义力。这里的“相应”是指力与位移在做功关系上的对应,如集中力与线位移对应,集中力偶与角位移对应等。

4.4 静定结构在荷载作用下的位移计算

4.4.1 荷载作用下的位移计算公式

现在讨论结构在荷载作用下的位移计算。此时,由于没有支座移动,故式(4-9)中 $\sum \bar{F}_{RC}$ 一项为零,因而位移计算公式为

$$\Delta_{KP} = \sum \int \bar{M} d\varphi_P + \sum \int \bar{F}_N du_P + \sum \int \bar{F}_S \gamma_P ds \quad (4-10a)$$

式中, Δ_{KP} 有两个下标: 第一个下标 K 表示该位移的地点和方向, 即 K 点沿指定方向; 第二个下标 P 表示引起位移的原因, 即是由于广义荷载引起的。 $\bar{M}$ 、 $\bar{F}_N$ 、 $\bar{F}_S$ 为虚拟单位荷载引起的微段 ds 上的内力; $d\varphi_P$ 、 du_P 、 $\gamma_P ds$ 为实际荷载作用引起的微段 ds 上的变形。

若实际状态中微段上的内力为 M_P 、 F_{NP} 、 F_{SP} , 则由材料力学可知, 由 M_P 、 F_{NP} 和 F_{SP} 分别引起的微段的弯曲变形、轴向变形和剪切变形为

$$d\varphi_P = \frac{M_P ds}{EI} \quad (4-10b)$$

$$du_P = \frac{F_{NP} ds}{EA} \quad (4-10c)$$

$$\gamma_P ds = \frac{k F_{SP} ds}{GA} \quad (4-10d)$$

式中, E 和 G 分别为材料的弹性模量和切变模量; I 和 A 分别为杆件截面的惯性矩和面积; k 为切应力沿截面分布不均匀而引用的改正系数, 其值与截面形状有关, 对于矩形截面 $k = \frac{6}{5}$, 圆形截面 $k = \frac{10}{9}$, 薄壁圆环截面 $k = 2$, 工字形截面 $k \approx \frac{A}{A'}$ (A' 为腹板截面面积)。

应该指出, 上述微段变形的计算, 只是对于直杆才是正确的, 对于曲杆还需考虑曲率对变形的影响, 不过在常用的曲杆结构中, 其截面高度与曲率半径相比很小 (称为小曲率杆), 曲率的影响不大, 可以略去不计。

将式(4-10b)、式(4-10c)、式(4-10d)代入式(4-10a)可得

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M} M_P ds}{EI} + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP} ds}{EA} + \sum \int \frac{k \bar{F}_S F_{SP} ds}{GA} \quad (4-11)$$

4-7 图乘法的适用条件及注意事项是什么? 求变截面梁和拱的位移时是否可用图乘法? 如果梁的截面沿杆长呈阶梯变化, 求位移时能否用图乘法?

4-8 在温度变化引起的位移计算公式中, 怎样确定各项的正负号?

4-9 反力互等定理是否可用于静定结构? 这时会得出什么结果?

4-10 位移反力互等定理是否可用于静定结构? 是否可用于非弹性的静定结构?

4-11 图 4-32 所示的图乘是否正确? 如不正确应如何改正?

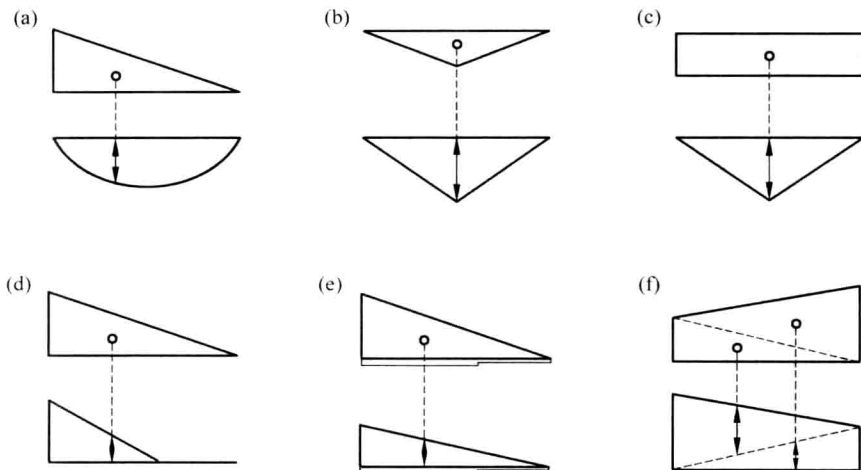


图 4-32

4-12 图 4-33 所示结构分别承受两组荷载作用如图(a)、(b)所示, 下列等式中哪些是正确的? (各位移均以同相应广义力指向一致为正)

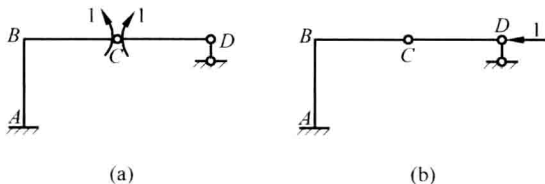


图 4-33

- (1) 图(a)中 D 截面的转角等于图(b)中 C 点的水平位移;
- (2) 图(a)中 C 点的水平位移等于图(b)中 D 截面的转角;
- (3) 图(a)中 C 铰两侧截面相对转角等于图(b)中 D 点的水平位移;
- (4) 图(a)中 D 点的水平位移等于图(b)中 C 铰两侧截面相对转角。

习题

4-1 试用积分法求图示刚架 A 点的竖向位移。 EI 为常数。

4-2 试求图示圆弧形曲梁 B 点水平位移(用直杆公式)。 EI 为常数。

超静定结构的几何构造特征是几何不变、有多余联系存在,这就决定了超静定结构的基本静力特性:在外部因素作用下,超静定结构的反力和内力需同时运用静力平衡条件、变形协调条件和物理条件才能求解,而满足上述三种条件的解答是唯一的。图 5-1(a)所示的连续梁属于具有一个多余联系的超静定结构,其支座 A、B 和 C 处的三根竖向链杆中的任何一根都可以视为多余联系。在图示竖向荷载作用下,由平衡条件 $\sum F_x = 0$,可知 A 支座的水平反力为零。但是,三个支座竖向反力却无法由 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum M = 0$ 两个独立平衡方程唯一确定。但只要任意设定其中一个竖向反力的数值,便可由上述平衡条件求出另外两个竖向反力。这说明满足上述平衡方程的竖向反力可以有无穷多组,所以需要解决的问题就是,如何从这无穷多组解答中找出真实解。

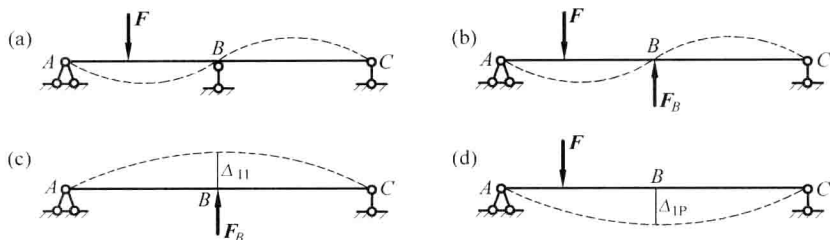


图 5-1 力法的基本思路

(a) 连续梁; (b) 相应的简支梁; (c) 未知力 F_B 单独作用下的简支梁;
(d) 荷载 F 单独作用下的简支梁

如果将支座 B 的竖向链杆撤除,代以原支座反力 F_B ,如图 5-1(b)所示。此时,原超静定的连续梁便转化为静定的简支梁。如果图 5-1(b)中的 F_B 与原连续梁 B 支座的反力相等,则图 5-1(a)、(b)所示梁的反力、内力及变形情况就应该完全相同。这样,就可以将原超静定结构的受力分析问题转化为相应静定结构的受力分析问题。因此,问题的关键在于如何确定真实的 F_B 。

根据线弹性体系的叠加原理,图 5-1(a)所示的受力状态可以看作是外荷载 F 和未知力 F_B 单独作用下效应的叠加。图 5-1(c)和图 5-1(d)分别对应 F_B 和 F 单独作用时的情况,两种情况下 B 点的竖向位移分别记为 Δ_{11} 和 Δ_{1P} 。 Δ_{11} 可视作单位力作用于 B 点时引起的竖向位移 δ_{11} 与 F_B 的乘积,即 $\Delta_{11} = \delta_{11} F_B$ 。按照已知条件,原结构 B 点处是没有竖向位移的。这样,真实的 F_B 应该满足方程

$$\delta_{11} F_B + \Delta_{1P} = 0$$

式中 δ_{11} 和 Δ_{1P} 均为已知外力作用下的位移,可以按单位荷载法求得。然后,就可以由上式确定 F_B 的数值。将 F_B 也视作一种荷载,对图 5-1(b)所示的静定梁进行受力分析,就可以求得图 5-1(a)所示原超静定梁的全部反力、内力及变形。这就是用力法求解超静定结构的基本思路。

在力法中,一般将原超静定结构撤除多余联系后得到的静定结构称为力法基本结构。力法的基本特点是:以多余联系中的未知力(多余未知力)作为基本未知量,称为力法基本未知量,根据基本结构在外荷载和多余未知力共同作用下,在解除多余联系处的位移必须符合于原结构相应位移的条件列出方程,这种方程反映了变形协调条件,称为力法方程。由力

也是一个组合结点,但是,由于 CD 为伸臂部分,可以看作悬臂梁,是静定的部分,其内力可以由静力平衡条件来确定。若将 CD 部分简化掉,则杆件 BC 就变成 B 端固定、 C 端铰支的单跨超静定梁, C 结点处的角位移也就可以不作为位移法的基本未知量考虑。因此,在确定位移法的基本未知量时,为了减少基本未知量的数目,可将结构中的静定部分简化掉,然后再去判定其基本未知量的数目。

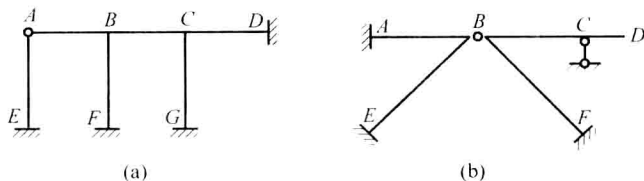


图 6-3 结点角位移数目的确定

2. 结点线位移数目的确定

由前所知,一个点在平面内有两个自由度,所以,结构中每个结点处若不受约束,则必有两个线位移。为了简化计算,通常都假定结构的变形是微小的,对于受弯直杆则可以忽略剪切变形与轴向变形对结构变形的影响,即认为受弯直杆两端之间的距离在变形前后的长度保持不变。这样就可以将每根受弯直杆当作一根刚性链杆的约束。因此,在确定结构的结点线位移数目时,便可以采用完全铰化法来确定。即先把所有的受弯直杆看成是刚性链杆,同时把所有的刚性连接(刚结点和固定支座)全部变成铰连接,从而使得结构变成完全铰结体系。然后再分析完全铰化后的铰结体系的几何组成。若体系为几何不变,则结构没有结点线位移;若结构为几何可变体系,须将凡是可动的结点,用增设附加链杆的方法使其不动,从而使整个体系变成几何不变体系,最后计算出所需增设附加链杆的最少个数,即为结构的独立结点线位移个数。例如,图 6-4(a)所示刚架,变成铰结体系后(图 6-4(b)),只需增设 2 根附加链杆的约束就能变成几何不变体系,则该刚架只有 2 个独立结点线位移;又如图 6-5(a)所示刚架,变成铰结体系后(图 6-5(b)),只需增设 1 个附加链杆,结构就变成几何不变体系,则只有一个独立结点线位移。注意:在刚结点 B 上的伸臂部分 BC ,由于它属于静定的部分,其内力可由静力平衡条件来确定,因此在计算结点线位移时可以将其简化掉。

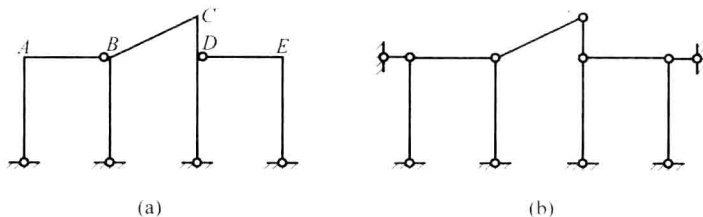


图 6-4 结点线位移数目的确定

(a) 原结构; (b) 铰结体系

由以上的分析可知,对于一般的超静定梁和刚架来说,未知量结点角位移的数目就等于刚结点的数目,而未知量线位移的数目等于结点可能发生的独立线位移的数目。值得注意的是,结构中存在无限大刚性体对位移法未知量数目的影响,它除了可能限制某些位移的发

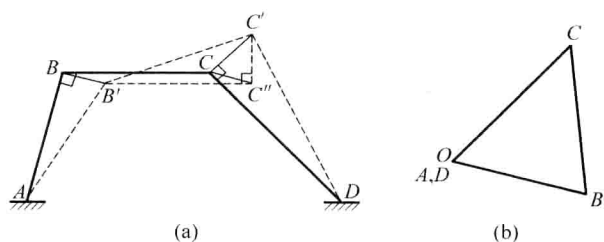


图 6-25 有侧移的斜柱刚架的结点位移

CD 两端的相对线位移。图 6-25(b) 即称为结点位移图。在上面的三个相对线位移中, 只有一个独立的, 给出了其中任何一个, 其余的便可借助结点位移图确定出来。

例 6-6 试用位移法计算图 6-26(a) 所示刚架。 $E=$ 常数。

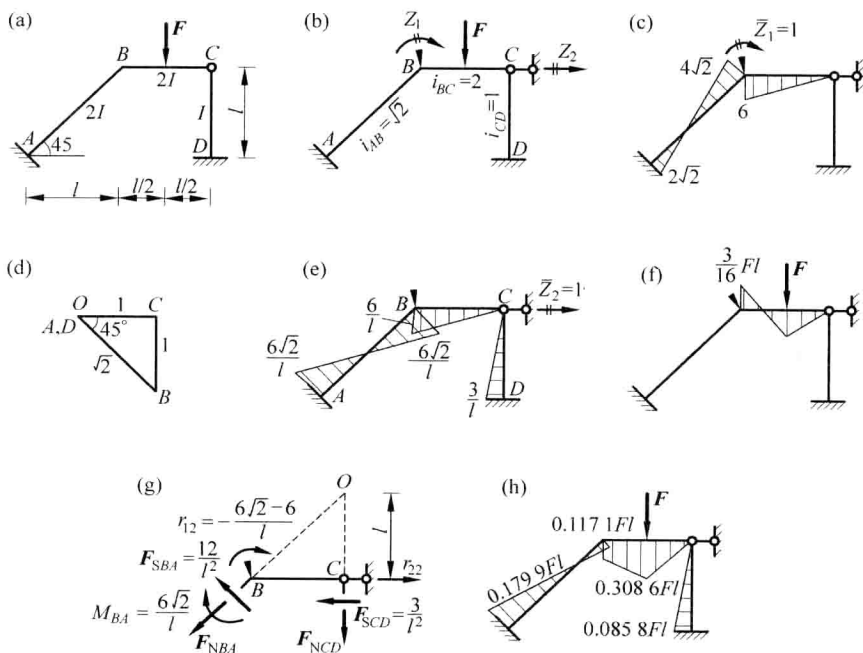


图 6-26 例 6-6 图

(a) 原结构; (b) 基本体系; (c) $\bar{M}_1$ 图; (d) 结点位移图; (e) $\bar{M}_2$ 图;

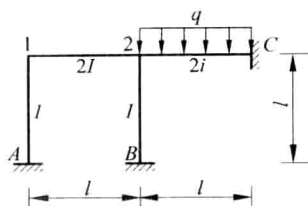
(f) $\bar{M}_P$ 图; (g) r_{12} 、 r_{22} 的计算; (h) 最后弯矩图

解: 取图 6-26(b) 所示基本体系, 典型方程为

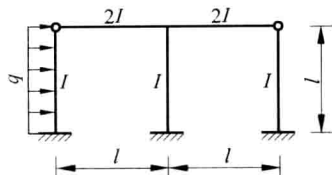
$$\left. \begin{aligned} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + R_{1P} &= 0 \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

令 CD 杆的线刚度 $i_{CD} = \frac{EI}{l} = 1$, 其余二杆的线刚度可相应折算如图 6-26(b) 中所示。

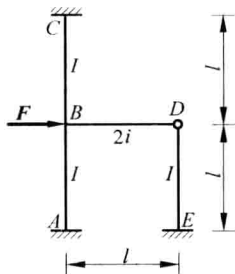
分别绘出 $\bar{M}_1$ 、 $\bar{M}_2$ 和 $\bar{M}_P$ 图 (图 6-26(c)、(e) 和 (f))。其中, $\bar{M}_1$ 和 $\bar{M}_P$ 图的作法与前相同。 $\bar{M}_2$ 图的作法如下: 当 $\bar{Z}_2 = 1$ 时, 可由上述方法作出结点位移图 (图 6-26(d))。已知



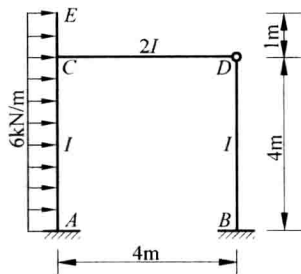
题 6-2 图



题 6-3 图



题 6-4 图

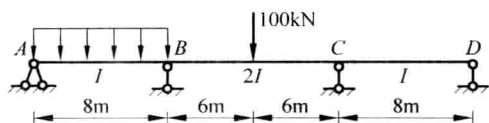


题 6-5 图

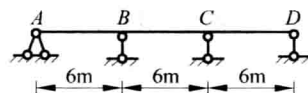
6-6 试用位移法计算图示连续梁,作出弯矩图。 E =常数。

6-7 图示等截面连续梁支座 B 下沉 20mm, 支座 C 下沉 12mm, $E=210\text{GPa}$, $I=2\times 10^{-4}\text{m}^4$ 。试作其弯矩图。

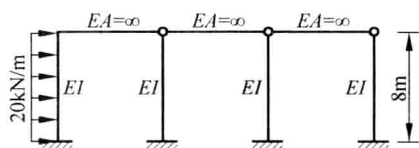
6-8~6-13 试用位移法计算图示结构,绘制弯矩图。 E =常数。



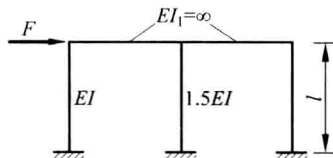
题 6-6 图



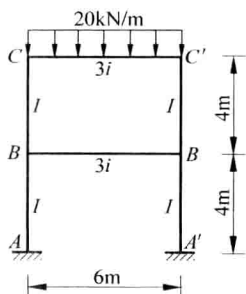
题 6-7 图



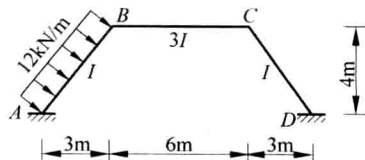
题 6-8 图



题 6-9 图



题 6-10 图



题 6-11 图

结点 B 的不平衡力矩暂时由刚臂承受。注意此时柱 AB 的剪力仍然是静定的,其两端剪力为

$$F_{SBA} = 0, \quad F_{SAB} = ql \quad (7-7)$$

即全部水平荷载由柱的下端剪力所平衡。

(2) 放松结点。为了消除刚臂上的不平衡力矩,现在来放松结点,进行力矩的分配和传递。此时,结点 B 不仅转动 Z_1 角,同时也发生水平位移,如图 7-9(d) 所示。由于柱 AB 为下端固定上端滑动,当上端转动时柱的剪力为零而处于纯弯曲受力状态(图 7-9(e)),这实际上与上端固定下端滑动而上端转动同样角度时的受力和变形状态(图 7-9(f))完全相同,故可推知其劲度系数应为 i ,而传递系数为 -1 。于是,结点 B 的分配系数为

$$\mu_{BA} = \frac{i}{i + 3 \times 2i} = \frac{1}{7}, \quad \mu_{AB} = \frac{3 \times 2i}{i + 3 \times 2i} = \frac{6}{7} \quad (7-8)$$

其余计算如图 7-10 所示,无须详述。 M 图如图 7-9(g) 所示。

由上可知,在固定结点时柱 AB 的剪力是静定的;在放松结点时,柱 B 端得到的分配弯矩将乘以 -1 的传递系数传到 A 端,因此弯矩沿 AB 杆全长均为常数而剪力为零。这样,在力矩的分配和传递过程中,柱中原有剪力将保持不变而不增加新的剪力,故这种方法称为无剪力力矩分配法,简称为无剪力分配法。

以上方法可以推广到多层的情况。如图 7-11(a) 所示刚架,各横梁均为无侧移杆,各竖柱均为剪力静定杆。固定结点时我们仍只加刚臂阻止各结点的转动,而不阻止其线位移,如图 7-11(b) 所示。此时,各层柱子两端均无转角,但有侧移。考察其中任一层柱子例如 BC 两端的相对侧移时,可将其下端看作是不动的,上端是滑动的,但由平衡条件可知,其上端的剪力值为 $F_{SCB} = 2ql$ (图 7-11(c))。由此可推知,不论刚架有多少层,每一层柱子均可

视为上端滑动下端固定的梁,而除了柱身承受本层荷载外,柱顶处还承受剪力,其值等于柱顶以上各层所有水平荷载的代数和。这样,便可根据表 6-1 算出各层竖柱的固端弯矩。然后,将各结点轮流地放松,进行力矩的分配和传递。图 7-11(d) 所示为放松某一结点 C 时的情形,这相当于将该结点上的不平衡力矩反号作为力偶荷载施加于该结点上。此时,结点 C 不仅转动某一角度 θ_c ,同时 BC 、 CD 两柱还将产生相对侧移,但由平衡条件知两柱剪力均为零,处于纯弯曲受力状态(与图 7-9(f) 相同),因而计算时各柱的劲度系数应取各自的线刚度 i ,而传递系数为 -1 (指等截面杆)。值得指出,此时只有汇交于结点 C 的各杆才产生变形而受力; B 以下各层无任何位移故不受力; D 以上各层则随着 D 点一起发生水平位移,但其各杆两端并无相对侧移,故仍不受力。因此,放松结点 C 时,力矩的分配、传递将只在 CB 、 CF 、 CD 三杆范围内进行。放松其他结点时情况亦相似。对于力矩分配、传递的具体计算步骤则与一般力矩分配法相同,无须赘述。

用无剪力分配法计算有侧移刚架,由于采取了只控制结点转动而任其侧移的特殊措施,使得其计算过程和普通力矩分配法一样简便。但须注意,无剪力分配法只适用于一些特殊的有侧移刚架,这就是:刚架的一部分杆件是无侧移杆,其余杆件都是剪力静定杆。

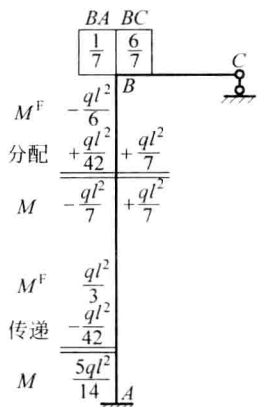


图 7-10 力矩的分配与传递

大体变化规律是：底层柱的反弯点位置逐渐升高；顶部少数层柱的反弯点位置逐渐降低（尤以最顶层较为显著）；其余中间各层则变化不大，柱的反弯点仍在中点附近。了解这一规律，对于判断多层刚架弯矩图的形状以及校核计算机的输出有无重大错误，都是很有用处的。

* 7.7 力法、位移法和渐近法的总结与比较

前面介绍了超静定结构的几种计算方法，本节对力法、位移法、渐近法予以总结和比较，以加深理解。

在结构的静力分析中，包括内力和位移计算两个方面。在荷载作用下，结构的内力和位移要满足下述三方面的条件。

平衡条件——取结构整体及其各部分为隔离体，各隔离体所受力系都应满足静力学的平衡条件。

物理条件——应力与应变之间，或内力与变形之间应满足材料的物理方程。对弹性材料而言，则要满足胡克定律。

几何条件——应变与位移之间要满足相应的几何关系，结构的位移应与内部连接情况和外部的支承情况相符合。

上述三方面条件对于任何一个静力问题都必须满足，是确定实际内力和位移状态的依据。对静定结构来说，它的内力和位移是可以分开计算的，即：先用平衡条件计算内力，然后考虑结构的物理和几何方面的关系计算位移。而超静定结构具有多余联系，必须综合运用以上三方面条件，才能确定出某些内力或位移，然后再进一步求其他内力及位移。

计算超静定结构的基本方法有力法和位移法两种。在力法中，通过综合考虑平衡条件、物理条件及几何条件先求出多余联系的内力，再求位移。而位移法则是先求结点位移，再计算内力。在力法或位移法中都要建立求解基本未知量的典型方程。在电子计算机等现代化的计算工具未得到广泛应用以前，为了避免解多元联立方程，渐近法得到广泛的应用，力矩分配法便是以位移法为基础的一种渐近解法。

下面对超静定结构的几种解法进行比较。

(1) 计算途径的比较

在解超静定结构时，选择哪些量作为基本未知量是形成不同计算途径的分界线，力法以多余未知力为基本未知量，位移法以结点位移为基本未知量，力矩分配法是以位移法为基础的，实质上也是以结点位移为基本未知量，不过形式上改用杆端弯矩进行计算。

从典型方程建立的过程看，在力法中，通常是以去掉多余联系后的静定结构为基本结构，根据基本结构在外因和多余未知力共同作用下的位移和原结构相同的条件建立力法方程，所以力法的基本方程是位移协调方程。在位移法中，通常是将原结构转化为由单跨超静定梁组成的组合体作为基本结构。然后以每个附加约束的总反力为零的条件，建立位移法的基本方程。所以在位移法中，基本方程实质上是与附加约束相连的原结构的某一结点或一部分的平衡方程。

在每种计算方法中，平衡条件和位移协调条件都得到考虑和满足，只是先后次序上有所不同。力法中，在荷载及多余未知力作用下，基本结构总是能保持平衡的，故平衡条件首先