无网格方法及其在固体力学中的应用

龙述尧 编著

科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

无网格方法及其在固体力学中的应用

龙述尧　编著

科学出版社

内 容 简 介

本书内容围绕无网格方法理论及其应用展开，共10章。第1章介绍了无网格方法的类型、特点以及研究进展；第2章介绍了弹性力学问题、薄板和中厚板问题的基本方程以及建立系统方程的基本原理；第3章系统阐述了无网格方法形函数的构造，包括光滑粒子水动力学法、再生核粒子法、移动最小二乘法、点插值法以及自然邻接点插值法的原理和构造方法；第4章研究了无网格全域伽辽金方法及其在弹塑性、几何非线性问题以及连续体结构拓扑优化设计中的应用；第5章研究了无网格局部边界积分方程方法及其在弹性力学和薄板弯曲问题中的应用；第6～9章研究了无网格局部彼得罗夫-伽辽金方法及其在弹性力学、断裂力学、超弹性材料接触问题、薄板和中厚板问题中的应用；第10章研究了无网格自然邻接点局部彼得罗夫-伽辽金方法及其在弹性力学、中厚板问题以及连续体结构拓扑优化设计中的应用。

本书可作为机械工程、土木工程、航空航天、交通运输、水电水利、材料科学与工程、力学等专业工程技术人员和教师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

无网格方法及其在固体力学中的应用/龙述尧编著. —北京：科学出版社，2014.6

ISBN 978-7-03-040740-5

Ⅰ.①无… Ⅱ.①龙… Ⅲ.①计算固体力学-研究 Ⅳ.①O34

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第110028号

责任编辑：陈 婕 / 责任校对：钟 洋
责任印制：肖 兴 / 封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年6月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2014年6月第一次印刷 印张：34 3/4
字数：700 000

定价：150.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

无网格方法是针对基于网格单元等传统数值方法存在的缺陷和不足而提出的一类新的数值方法。无网格方法不需要在求解的区域内和边界上划分单元，而只需在求解的区域内和边界上配置适当数量的节点，简言之，就是只要节点信息而不要单元信息，这样就大大减少了划分单元或重新划分单元的数据准备时间。自1992年Nayroles等提出散射元以来，无网格方法得到了世界各国计算力学界的高度重视，一系列相关的深入系统的研究工作被开展，解决了一些用传统数值方法，如有限元法不易或不能求解的工程技术问题。应用无网格方法在解决爆炸与冲击、穿透与侵彻、裂纹扩展、材料破坏与失效、材料相变、腐蚀与渗透、多尺度与多场耦合以及超大变形等工程技术问题中已取得了一系列突破性成果，这显示了无网格方法在解决这些领域里的工程技术问题的优越性。

作者自1998年在美国加州大学洛杉矶分校做高级访问学者开始研究无网格方法，并将Atluri教授提出的无网格局部边界积分方程方法和无网格局部彼得罗夫-伽辽金方法应用于求解弹性力学问题和薄板弯曲问题；1998年回国后，带领课题组的成员和研究生对无网格方法的理论和应用进行了深入系统的研究，取得了一系列创新性成果。

本书是作者自1997年以来对无网格方法的理论及其应用进行研究的成果总结。书中全面介绍了无网格方法的类型、特点以及研究进展；介绍了无网格方法的数学和力学基础知识；系统阐述了各种无网格方法的形函数构造的基本原理和步骤；重点研究了无网格全域伽辽金方法、无网格局部边界积分方程方法和无网格局部彼得罗夫-伽辽金方法的基本原理以及这些方法在弹性力学、断裂力学、非线性力学、薄板和中厚板问题以及连续体结构拓扑优化设计中的应用。

本书得益于不断有博士生参加对无网格方法的理论及其应用的研究，他们的研究成果构成了本书的主要部分，在此对博士生熊渊博、胡德安、刘凯远、夏平、李顺利和郑娟表示衷心的感谢，同时还要感谢郑娟对全书的图形进行绘制、修改和校对。

本书相关的研究工作得到国家自然科学基金项目、高等学校博士点专项基金项目和湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室基金项目的资助，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请读者提出宝贵意见。

作　者

2013年12月于湖南大学

目　　录

第1章 绪　论

1.1 引　言

科学研究和工程实际中的物理过程常常可以归结为数学上的微分方程边值、初值问题。用解析或半解析方法求解这类问题，往往仅对几何边界规则及方程性质简单的少数问题有效。而对于大多数问题，由于其边界和问题的某些性质复杂，并呈现非线性性质，这时往往要用各种数值方法并借助于计算机技术来寻求数值解。有限差分法(finite difference method，FDM)[1]、有限元法(finite element method，FEM)[2,3]、边界元法(boundary element method，BEM)[4,5]是目前理论和应用都比较成熟的三种典型数值计算方法。特别是有限元法，产生的影响最为深远，得到的应用最为广泛。

有限元法求解问题的基本思想是：先将问题的求解区域离散为有限数目并按一定方式联结在一起的单元的组合体，利用每个单元内的近似函数(由未知场函数及其导数在单元节点的数值和其插值函数来表达)来分片地表示整个求解区域上待求未知场函数，使未知场函数及其导数在各个节点上的数值成为未知量(即自由度)，使一个连续的无限自由度问题变为离散的有限自由度问题；然后应用加权残值法或各种变分原理建立各节点量之间的关系式，并将各个单元方程组合在一起而形成总体代数方程组，再计入边界和初始条件；最后通过一定的算法求解此方程组便得到原问题的解。虽然有限元法通用、灵活，并被作为一种工业标准广泛遵循，但是随着计算对象复杂程度的增加和应用工作的深入，也逐渐暴露了其本身难以克服的一些不足，如自锁问题、所求解函数的导数精度低等，而且在有限元法中，单元和网格既是分析解决问题的载体，同时也是对其应用的制约，主要表现在：①单元网格剖分等前处理数据准备工作量大，尤其是对复杂三维问题，其工作量往往比有限元分析本身还大；②在分析大变形问题时必须防止网格畸变或缠结(mesh entanglement)，包括单元形状不能太“狭长”、局部内凹等；③在求解裂纹扩展、液体晃动、材料相变和成形等不定边界或可动边界问题时，需要随时找出新的边界位置，并在新的解域内重分网格(remeshing)；④对时间相关问题，更要按时段反复重分网格，工作量惊人，甚至使分析失败。有限差分法、边界元法等方法也是基于单元网格的数值方法，所以也会存在类似网格制约等问题。因此，人们一直寻求一种不需要单元或网格的数值方法，即无网格法。

无网格法(meshless or meshfree method，MM)或称无单元法(element free method,EFM),是一类在有限元法等传统数值方法基础上并针对其网格单元存在的问题而提出的一类新的数值方法,其本质思想是:对所考虑问题域内采用一系列(随机分布)无网格节点排列和一种与权函数(或核函数)有关的近似,使某个域上的节点可以影响研究对象上任何一点的力学特性。这样一种在离散模型中仅基于节点点阵而不需要划分单元或网格的数值方法,使分析问题的前处理过程变得简单,在涉及网格畸变、网格移动和不定边界等问题中显示出明显的优势。所以,无网格方法被认为是一种很有发展前途的数值分析方法,并成为目前国内外计算力学界的热点研究领域之一[6]。

1.2 无网格方法的类型

20 世纪 90 年代,无网格方法开始引起许多学者和研究人员的兴趣,并从此迅猛发展起来。在无网格法研究领域里,美国西北大学 Belytschko 和 Liu、美国加州大学 Atluri 和 Zhu 等、Onate 所领导的西班牙数值分析中心、Liu 博士所领导的新加坡国立大学 ACES 中心和国内清华大学陆明万、张雄等的研究工作尤其引人注目,也带动了无网格法的快速发展,使各种形式的无网格方法如雨后春笋般地涌现出来。至今发展起来的无网格方法已有二十多种[7~9],它们是:

(1) 光滑粒子流体动力学(smoothed particle hydrodynamics, SPH)方法[10,11],由 Lucy 和 Gingold 分别提出。

(2) 多象限法(multiquadrics method,MQM)[12],由 Kansa 提出。

(3) 弥散或散射单元法(diffuse element,DEM)[13],由 Nayroles 等提出。

(4) 无单元伽辽金(element-free Galerkin, EFG)法[14,15],由 Belytschko 等提出。

(5) 小波伽辽金法(wavelet Galerkin method, WGM)[16],由 Amaratunga 和 Williams 提出。

(6) 重构或再生核粒子法(reproducing kernel particle method,RKPM)[17,18],由 Liu 等提出。

(7) Hp 无网格云团法(Hp meshless clouds method, Hp MCM)[19],由 Duarte 和 Oden 提出。

(8) 单位分解法(partition of unity method, PUM)[20,21],由 Melenk 和 Babuska提出。

(9) 有限点法(finite point method, FPM)[22~24],由 Onate 等提出。

(10) 移动最小二乘再生核法(moving least-square reproducing kernel method,MLSRKM)[25],由 Li 和 Liu 提出。

(11) 无单元流形法(manifold method,MM)[26],由美国加州大学伯克利分校

的石根华博士提出。

(12) 边界点法(boundary node method,BNM)[27,28],由 Mukherjee 等提出。

(13) 自然单元法(natural element method,NEM),先后由 Sukumar 等[29]和 Braun 等[30]提出。

(14) 局部边界积分方程(local boundary integral equation,LBIE)法[31~34],由 Zhu 等提出。

(15) 无网格局部彼得罗夫-伽辽金(meshless local Petrov-Galerkin,MLPG)方法[35,36],由 Atluri 和 Zhu 提出。

(16) 局部点插值法(local point interpolation method,LPIM)[37],由 Liu 提出。

(17) 有限覆盖无单元法(finite-cover element-free method,FCEFM)[38],由田荣提出。

(18) 有限球法(method of spheres)[39,40],由 De 和 Bathe 提出。

(19) 最小二乘配点无网格法(least-square collocation meshless method,LSCM)[41],由清华大学张雄和陆明万提出。

(20) 杂交边界点法(hybrid boundary node method,HBNM)[42],由清华大学张见明和姚振汉提出。

(21) 加权最小二乘配点无网格法(weighted least-square collocation meshless method,WLSCM)[43],由清华大学张雄等提出。

在这些无网格方法中,SPH 法、RKPM、EFG 法、MLPG 法、LPIM 等是目前理论和应用研究比较深入的几种无网格方法,其发展也相对成熟一些,并已成功应用于工程实际中;WLCSM、LSCM、HBNM、LBIE、NEM 等还处在理论和应用研究阶段,成功应用于工程实际问题还不多。

1.3　无网格方法研究进展

对无网格法的研究最早可以追溯到 1975 年 Perrone 和 Kao 对非正交网格有限差分法的研究[44],但通常把 1977 年 Lucy[10]、Gingold 和 Moraghan[11]分别提出的 SPH 方法作为第一种无网格方法。它是一种纯拉格朗日(Lagrange)型的无网格粒子法,其基本原理是:将描述问题的场函数用“核函数”逼近,并用一系列粒子将这个场离散化。近十年来,Swegle 等[45]、Dyka[46]和 Chen 等[47]分析了 SPH 法不稳定的起因并提出各种稳定化方案;Jonhson 等[48]提出了归一化光滑函数算法;Vignjevic 等[49]、Mosqueira 等[50]提出了克服 SPH 法零能模态的方案,使 SPH 法不断完善和成功应用于天体物理领域和复杂流体动力学等问题上。与此同时,国内学者也对 SPH 法进行了研究,如中国科学院应用数学研究所张锁春[51]对

SPH 法进行了综述，国防科技大学贝新源和岳宗五[52]将其应用于高速碰撞问题，湖南大学韩旭等改进 SPH 方法并将其应用于两相流动问题[53]、近水面爆炸[54]、水下爆炸冲击[55]、穿透与侵彻[56]等军工问题中。目前，SPH 法在模拟流体力学、爆炸冲击、高速碰撞、穿透与侵彻等工程问题时具有明显的优势。

1981 年，Lancaster 和 Salkauskas[57]为了从散乱数据点中拟合曲线和重构曲面，提出了移动最小二乘(moving least squares，MLS)法。MLS 法是无网格方法中构造近似函数的主要方法，为无网格法的发展奠定了重要基础。1992 年，Nayroles 等[13]在研究有限元法的过程中，将 MLS 法用于伽辽金(Galerkin)方法中，并使用了一种称为散射元(diffuse element)的新单元，他们称该方法为散射单元法(DEM)。在这种方法中，位移函数的形成和区域积分的实现都已经做到了脱离单元。

1994 年，美国西北大学著名学者 Belytschko 等对 DEM 进行了改进[14,15]，即在计算形函数导数时保留被 Nayroles 忽略掉的项，利用拉格朗日乘子法施加本质边界条件和采用高阶高斯积分完成区域积分等，提出 EFG 法，并成功地解决了一系列有限元法不能很好解决的问题[58,59]，引起了人们对无网格方法研究的重视和兴趣。十多年来，EFG 方法经过不断完善，已在结构动力分析[60]、裂纹扩展与断裂[61]、弹塑性问题[62,63]、几何非线性问题[64,65]、功能梯度材料断裂和压电材料行为[66,67]、复杂流体和渗流问题[68,69]以及岩土工程[70~72]、材料加工和表面处理[73~75]、连续结构的拓扑优化[76]等问题中都得到很好的应用。同时，湖南大学龙述尧等人将 EFG 方法中的试函数利用局部径向点插值函数近似，将 EFG 方法应用于分析弹性地基厚板弯曲和连续体结构拓扑优化设计等问题[77~79]中，得到了稳定而精度高的结果。所以，EFG 方法是无网格方法中发展比较成熟、应用比较广泛的一种方法。研究表明，EFG 方法的精度和收敛速度都高于有限元法，而且没有体积锁死现象。

1995 年，美国西北大学计算力学学者 Liu 等[17]在 SPH 法基础上并基于伽辽金法和积分变换思想提出了 RKPM，接着又结合小波分析的概念，提出多尺度再生核粒子法[18](multiple-scale reproducing kernel particle method，MRKPM)。目前，RKPM 已能对大量的科学与工程问题进行数值模拟分析，如结构力学分析[80]、应力集中问题[81]、流体动力学问题[82,83]、动态断裂问题和局部化分析[84,85]、大变形分析[86]、金属加工成形问题[87]、中厚梁和板[88]以及微电子机械系统中的应用[89]等。最近，Ohs 等又采用再生核函数近似和配点法离散，提出无网格配点法(meshless point collocation method，PCM)[67,90]。西安交通大学周进雄等[91]对 RKPM 做了很好的综述。因此，可以说 RKPM 是一种发展比较成熟且应用广泛的无网格方法。

1995 年，Braun 和 Sambridge 基于自然邻接点插值构造试函数与权函数，提出了一种求解偏微分方程的自然单元方法(NEM)[30]。Sukumar 等[29]将 NEM 用于

弹性力学应力高梯度和平面裂纹问题分析。自然邻接点插值又称为 Sibson 插值[92]。Sukumar 等[93]基于非 Sibson 插值[94]提出了自然邻接点伽辽金(natural neighbor Galerkin,NNG)法,并应用于求解线弹性力学中的椭圆型偏微分方程。国内北京大学朱怀球[95]基于 Voronoi 网格与 C^{∞} 插值基函数提出了一种流体力学有限元法——自然元方法。

1995 年,美国 Texas 大学的著名学者 Oden 和他的学生 Duarte 等[19]利用移动最小二乘法建立单位分解函数,并构造近似函数和试函数,再通过伽辽金法建立离散模型,提出了 Hp 无网格云团法,并对这种方法进行了严格的数学论证。Mendoncca 等将该方法应用于求解铁摩辛柯梁问题、厚板的弯曲问题[96,97]等,清华大学刘欣等[98]将其用于平面裂纹问题的自适应分析。后来,Oden 等[99]又将有限元形函数作为单位分解函数,提出了基于云团法的新型 Hp 有限元法。该方法需要借助于有限元网格,破坏了"无网格"的部分特性,但很容易进行 h、p 和 hp 自适应分析。波兰学者 Liszka 等[100]改用配点格式,避免了伽辽金格式中用于积分计算的背景网格,也提出了 Hp 无网格云团法,它是一种纯无网格方法。

1996 年,美国计算数学著名学者 Babuska 与他的学生 Melenk 等[20,21]将单位分解法与有限元法相结合,提出了 PUM,又于 2000 年进一步提出广义有限元法(generalized finite element method,GFEM)[101]。GFEM 的基本思想是应用具有单位分解的形函数将局部定义的近似解相互连接,构造出总体场函数的近似解。该方法在标准有限元空间中加入一系列能够反映待求边值问题特性的函数(如由角点附近精确解的局部渐进展开而得到的奇异函数),并将这些特殊函数与单位分解函数相乘后和原有的有限元函数一起构成新的增广协调有限元空间。用该方法求解动态裂纹扩展问题[102]时,可以处理任意裂纹形状,并且不需要重新划分网格。清华大学 Liu 等[103]将 PUM 应用于求解具有奇异性的问题中。

1996 年,西班牙著名计算力学家 Onate 和有限元大师 Zienkiewicz 等合作[22~24],利用基于高斯权函数的带权正交 MLS 来构造近似函数,并采用配点型加权残值格式把控制方程离散成非积分的形式,再结合广义有限差分法,提出了有限点法(finite point method,FPM),并应用于计算流体动力学问题。1999 年,Mitchell和 Aluru[104]将其应用于电渗透模拟。近年,Onate 等[105]又对其提出一种稳定化技术,并进一步应用于弹性力学问题。有限点法采用配点格式对求解域进行离散,不需要背景网格和高斯积分,计算效率高,但精度低,稳定性差。

1997 年,Mukherjee 等把 MLS 函数引入到边界积分方程中,提出了一种只需在边界上进行布点的方法,称之为边界点法(boundary node method,BNM)[27,28]。之后,Mukherjee 与 Kothnur 和 Chati 合作将 BNM 分别应用于弹性力学问题[106]和位势问题[28]等。边界点法虽然可将求解问题降低一维,但仍要在边界上划分网格用于数值积分,不是真正的无网格法。清华大学张见明、姚振汉将修正变分原理

与移动最小二乘结合起来，提出了 HBNM，并用于弹性力学问题分析[42]。HBNM 是仅需在边界上布点的纯无网格方法，不仅计算精度高，而且收敛性好，是有待进一步发展的无网格方法。

1998 年，美国 California 大学 Zhu 和 Atluri 等基于移动最小二乘近似，通过对控制积分方程分部积分两次，提出了 LBIE 法[31~34]，该方法既不需要插值网格，也不需要积分网格，是一种"真正的无网格法"。后来，Zhu 对局部边界积分方程法又进行了改进，提出了既不用基本解、也没有奇异积分的无网格规则局部边界积分方程法(meshless regular local boundary integral equation，MRLBIE)[107]。MRLBIE 较 LBIE 具有更高的计算效率和精度。与此同时，湖南大学龙述尧等也研究了 LBIE 法，提出弹性力学问题[34]和薄板问题[108]的局部边界积分方程方法，并对其"友解(companion solution)"和权函数等问题[109,110]进行了系统研究。

1998 年，美国 California 大学的著名学者 Atluri 和 Zhu 等基于移动最小二乘近似和局部彼得罗夫-伽辽金法离散，提出了 MLPG 法[35,36]，并用于求解带调和算子的拉普拉斯方程和泊松方程；2001 年他们又将该方法用于求解稳态不可压流的 Navier-Stokes 方程[111]和具有应变梯度的材料分析[112]。新加坡华裔学者 Liu 和 Gu[113]提出了将 MLPG 法和有限元及边界元相耦合，以充分发挥它们各自的优势。湖南大学龙述尧等对 MLPG 方法进行了系统地研究，2001 年以来分别提出弹性力学问题[114]、地基上梁问题[115,116]、层合板和各向异性板问题、弹塑性和几何非线性问题、断裂力学等问题的 MLPG 分析[117~124]。MLPG 法的实质是采用移动最小二乘近似函数作为试函数，并且采用移动最小二乘近似函数的权函数作为加权残值法的加权函数，这种方法只包含中心在所考虑点处的规则局部区域及其边界上的积分，所得系统矩阵是一个带状稀疏矩阵。所以该方法是一种"真正的无网格法"，具有收敛快、精度高、稳定性好等优点。当然，MLPG 法也可以采用其他近似函数作为试函数，如最近 Raju 和 Phillips[125]提出的基于径向基函数[126](radial basis functions method，RBF)梁问题的 MLPG 分析；龙述尧等将称之为局部径向点插值法(local radial point interpolation method，LRPIM)，即把径向基函数加上多项式基函数作为点插值的基函数，利用局部支持域内的点进行插值近似试函数并将加权函数取为 Heaviside 阶跃函数的 MLPG 方法，利用这种方法分析了弹性力学静力和动力问题、断裂力学问题、功能梯度材料和超大变形问题、中厚板的静力和动力等问题[127~138]；同济大学蔡永昌等[139]提出基于 Voronoi 结构和采用自然邻接点插值近似试函数的 MLPG 方法，分析了弹性力学平面问题，可以有效地减少计算时间和提高求解精度。湖南大学龙述尧等将自然邻接点的 MLPG 方法应用于求解分析裂纹问题、中厚板的静力、动力和拓扑优化等问题中，获得了稳定性好、收敛快、效率和精度高的结果[140~143]。Atluri 和 Shen 根据采用不同的试函数和权函数，提出 MLPG 法的六种形式，为利用 MLPG 法进行理论和应用研究提供

了一个统一的框架[144,145]。

1999 年，清华大学陆明万和张雄[146]采用径向基函数来逼近场函数和用配点型加权残值格式对求解域进行离散，提出径向基函数无网格法，并用这种方法求解了椭圆型边值问题；河海大学钱向东[147]用它求解二维泊松方程；张雄等将它用于求解二维弹性力学问题[148]。径向基函数具有形式简单、各向同性等优点，可用于构造近似场函数，因为它具有 MLS 法所不具备的一些优点，如其构造的形函数可由影响区域内的离散点的分布唯一地确定、形函数具有克罗内克 δ 函数特性等，所以用其来构造近似函数的无网格法可直接施加本质边界条件，计算效率及精度都比较高。2001 年，新加坡华裔学者 Liu[37] 基于伽辽金法和局部彼得罗夫法，用点插值法(point interpolation method，PIM)取代移动最小二乘法来构造近似函数，并提出了一系列无网格点插值法。这些点插值法的主要特点在于：①点插值法构造的近似试函数具有克罗内克 δ 函数特性，易于施加本质边界条件；②点插值法构造近似函数的实施过程简单明了；③用点插值法构造的函数近似试函数时，计算刚度矩阵的工作量显著减少，大大提高了计算效率。

2001 年，清华大学张雄、陆明万等提出了 LSCM[41] 和 WLSCM[43]，同时还在子域插值和配点法的基础上提出分阶拟合直接配点无网格法[149]。这三种配点型无网格法较好地解决了配点法的缺陷，提高了配点法的稳定性和精度。

2001 年，刘欣等参照无单元伽辽金法的理论提出了流形无网格法的数值方法[150]，这也是一种很有发展前途的无网格方法。2004 年，上海大学李树忱、程玉民在数值流形元法和单位分解法的基础上提出了无网格数值流形方法[151]，这种方法采用一系列节点的影响域来建立数学覆盖和单位分解函数，摆脱了传统数值流形方法中网格所带来的困难，具有无网格方法的特性；同时又采用有限覆盖技术，使试函数的构造不受域内不连续的影响，可克服一般无网格法在处理不连续问题时的困难，更好地求解域内不连续和裂纹尖端场问题。

2004 年，上海大学程玉民和陈美娟[152]提出以带权的正交函数作为基函数来改进移动最小二乘逼近法，并将其与弹性力学的边界积分方程方法结合，提出弹性力学的一种边界无单元法(boundary element-free method，BEFM)，这种方法不同于边界点法和局部边界积分方程方法，可以直接采用节点变量的真实解为基本未知量，是一种边界积分方程的无网格直接解法。而且这种方法更容易施加边界条件，具有较高的效率和精度。

2004 年以后，研究人员并没有提出更多新的无网格方法，而把注意力集中于上述各种无网格方法理论的完善和应用的研究，尤其是几种主要的无网格方法，如 SPH 法、EFG 法、RKPM、MLPG 法、LPIM 等的应用研究，拓宽这些无网格方法的应用领域，将它们应用于有限元法、边界元法等基于网格的数值方法不能很好解决或不能解决的领域。