主编 王 缨 陈丽萍

经济应用数学

习题册

云南大学出版社

经济应用数学习题册

王　缨　陈丽萍　主编

云南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学习题册/王缨，陈丽萍主编．—昆明
：云南大学出版社，2012
ISBN 978-7-5482-1114-3

Ⅰ．①经… Ⅱ．①王… ②陈… Ⅲ．①经济数学—高等学校—习题集 Ⅳ．①F224.0-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 143045 号

经济应用数学习题册
王 缨 陈丽萍 主编

策划编辑：徐 曼
责任编辑：徐 曼 朱光辉
封面设计：刘 雨
出版发行：云南大学出版社
印　　装：昆明研汇印刷有限责任公司
开　　本：787mm×1092mm 1/16
印　　张：4.5
字　　数：110 千
版　　次：2012 年 7 月第 1 版
印　　次：2012 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5482-1114-3
定　　价：14.00 元

社　　址：云南省昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内
邮　　编：650091
电　　话：0871-5033244 5031071
网　　址：http：//www.ynup.com
E-mail：market@ynup.com

前　　言

本习题册是《经济应用数学》的配套教材，其目的是让学生通过对本习题册的练习，加深对教材内容的理解，进一步提高学生理解问题、分析问题、解决问题的能力。

本习题册按照《经济应用数学》教材内容的章节划分，虽然是与教材配套使用，但也有独立的使用价值。书中每章由知识要点、典型例题和同步训练构成。其中，知识要点主要对每章需要重点掌握的知识点作总结；典型例题则是精选典型的例题，在讲解过程中指出容易出错的地方；同步训练这部分的设置主要是为了满足学生有更多的训练机会，弥补教材习题少的不足。全书末附有同步训练参考答案。本书的讲解尽量简练，旨在帮助学生复习总结，也可供教师上习题课或作单元测试之用。

本习题册由昆明冶金高等专科学校的王缨、陈丽萍、范国蓉、张丽萍、牛立昆以及云南轻工职业技术学院的方兵等老师进行编写，全书由王缨、陈丽萍统稿。

由于编者水平有限，书中难免有错误与不足，恳请读者批评指正，以利于今后进一步修改。

编　者

2012 年 5 月

目　　录

第一章　函　数

知识要点

<table>
<tr><td rowspan="4">函数概念</td><td>函数定义</td><td colspan="2">设变量 x，$y\in \mathbf{D}$，当 $\forall x\in \mathbf{D}$ 时变量 y 按一定法则 f 总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数．记作 $y=f(x)$，$x\in \mathbf{D}$.</td></tr>
<tr><td>分段函数</td><td colspan="2">在定义域内的不同区间由不同的解析式表示的函数称为分段函数．</td></tr>
<tr><td>反函数</td><td colspan="2">设由 $y=f(x)$ 所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 叫函数 $y=f(x)$ 的反函数．记为 $y=f^{-1}(x)$.</td></tr>
<tr><td>复合函数</td><td colspan="2">设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果由 x 所确定的 u 使 y 有意义，则称 y 为 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">函数的性质</td><td>奇偶性</td><td colspan="2">$\forall x\in \mathbf{D}$ 且 $-x\in \mathbf{D}$，若 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；
若 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数．</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td colspan="2">设 x_1，$x_2\in I\subset \mathbf{D}$ 且 $x_1<x_2$，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少．</td></tr>
<tr><td>周期性</td><td colspan="2">$\forall x\in \mathbf{D}$，若存在 $T\neq 0$，有 $x+T\in \mathbf{D}$，使得 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，T 是 $f(x)$ 的一个周期．</td></tr>
<tr><td>有界性</td><td colspan="2">若存在正数 M，对 $\forall x\in X\subset \mathbf{D}$ 有 $|f(x)|\leq M$，则称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数．若 M 不存在，就称 $f(x)$ 是 X 上的无界函数．</td></tr>
<tr><td rowspan="5">几种常见的经济函数</td><td>需求函数
$Q=Q(p)$</td><td>线性需求函数：$Q=a-bp$
二次需求函数：$Q=a-bp-cp^2$
指数需求函数：$Q=ae^{-bp}$
（其中 a，b，c 为非负常数）</td><td rowspan="2">需求函数 Q 是关于价格 p 的单调递减函数；供给函数 S 是关于价格 p 的单调递增函数．供需均衡条件：$Q=S$，此时的价格 p_0 为供需平衡价格，叫做均衡价格．</td></tr>
<tr><td>供给函数
$S=S(p)$</td><td>线性供给函数：$S=-C+dp$
（其中 $-C$，d 为非负常数）</td></tr>
<tr><td>成本函数
$C=C(q)$</td><td colspan="2">$C(q)=c_1+c_2(q)$
c_1 表示固定成本，$c_2(q)$ 表示可变成本．</td></tr>
<tr><td>收入函数
$R=R(q)$</td><td colspan="2">$R(q)=q\cdot p(q)$
q 为商品销量，$p(q)$ 为商品价格．</td></tr>
<tr><td>利润函数
$L=L(q)$</td><td colspan="2">$L(q)=R(q)-C(q)$</td></tr>
</table>

典型例题

例 1 求下列函数的定义域.

(1)$f(x)=\dfrac{3}{5x^2-2x}$;

(2)$f(x)=\lg(4x+3)$;

(3)$f(x)=\arcsin(2x-1)$;

(4)$f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

解: (1)要使分式$\dfrac{3}{5x^2-2x}$有意义，分母不能为零，所以$5x^2-2x\neq0$，解得$x\neq0$且$x\neq\dfrac{2}{5}$，即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,\dfrac{2}{5})\cup(\dfrac{2}{5},+\infty)$;

(2)要使对数式$\lg(4x+3)$有意义，真数必须大于零，所以$4x+3>0$，解得$x>-\dfrac{3}{4}$，即定义域为$(-\dfrac{3}{4},+\infty)$;

(3)要使反三角函数$f(x)=\arcsin(2x-1)$有意义，要满足其定义域要求，所以$|2x-1|\leqslant1$，解得$0\leqslant x\leqslant1$，即定义域为$[0,1]$;

(4)要使偶次根式$\sqrt{9-x^2}$有意义，被开方数要非负，所以$9-x^2\geqslant0$，解得$-3\leqslant x\leqslant3$，即定义域为$[-3,3]$.

注：函数的三要素是：(1)对应法则，(2)定义域，(3)值域.

例 2 设函数$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -4<x<0\\ 1, & 0\leqslant x<1\\ 3x-1, & 1\leqslant x\leqslant2\end{cases}$，求函数的定义域及$f(-\pi)$，$f(\dfrac{1}{2})$.

解: 根据分段函数的定义知，其定义域为每个式子的自变量取值范围的并集，所以函数$f(x)$的定义域为$(-4,2]$;

因为$-\pi\in(-4,0)$，所以$f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$;

因为$\dfrac{1}{2}\in[0,1)$，所以$f(\dfrac{1}{2})=1$.

注：(1)分段函数不论分为多少段，每一段都表示函数$f(x)$;

(2)分段函数的定义域是各部分自变量取值范围的并集.

例 3 问函数$f(x)=x-1$与$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$是否为同一函数?

解: 不是. 当$x\neq1$时$f(x)=g(x)$，但是$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，而$g(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，由于两个函数定义域不同，所以它们不是同一函数.

注：只有定义域和对应法则都相同时，两个函数才表示同一函数.

例 4 判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=3x^4+5x^2-1$;

(2)$f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$ ($a>0$且$a\neq1$);

(3)$f(x)=x+\cos 2x$.

解：(1)因为$f(-x)=3(-x)^4+5(-x)^2-1=3x^4+5x^2-1=f(x)$

所以$f(x)=3x^4+5x^2-1$是偶函数；

(2)因为$f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})=-\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)=-f(x)$

所以$f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$是奇函数；

(3)因为$f(-x)=-x+\cos(-2x)=-x+\cos 2x\neq f(x)$，同样$f(-x)\neq -f(x)$

所以$f(x)=x+\cos 2x$既非奇函数，也非偶函数.

例5　指出下列函数由哪些基本初等函数复合而成.

(1)$y=\sin(x^2+4)$；

(2)$y=e^{\tan\frac{x}{2}}$.

解：(1)设$u=x^2+4$，则$y=\sin(x^2+4)$由$y=\sin u$，$u=x^2+4$复合而成；

(2)设$u=\tan\frac{x}{2}$，$v=\frac{x}{2}$，则$y=e^{\tan\frac{x}{2}}$由$y=e^u$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}$复合而成.

例6　已知某产品的成本函数和收入函数分别是$C(q)=q^2-4q+30$和$R(q)=9q$，试求该产品的盈亏平衡点，并说明盈亏情况.

解：利用$L(q)=0$，于是得$R(q)=C(q)$，即$q^2-4q+30=9q$

整理得

$$q^2-13q+30=0$$

从而得到两个盈亏平衡点分别是$q_1=3$，$q_1=10$

利润函数$L(q)=R(q)-C(q)$

$$=9q-(q^2-4q+30)=-q^2+13q-30$$

可以看出：当$3<q<10$时是处在盈利状态，当$q>10$或$q<3$时是处在亏损状态：

注：利润函数$L(q)$出现的3种情形：

(1)$L(q)=R(q)-C(q)>0$，此时为有盈余生产，即生产处于盈利状态；

(2)$L(q)=R(q)-C(q)<0$，此时为亏损生产，即生产处于亏损状态；

(3)$L(q)=0$，此时为无亏盈生产，记产量为q_0，称为盈亏平衡点.

同步训练

一、选择题

1. 函数$f(x)=\frac{1+x}{1-x}$，则$f(\frac{1}{x})=$(　　).

A. $\frac{1+x}{1-x}$　　B. $\frac{1-x}{1+x}$　　C. $\frac{1+x}{x-1}$　　D. $\frac{x-1}{1+x}$

2. 函数$y=\sqrt{1-x}+\arccos\frac{x+1}{2}$的定义域是(　　).

A. $x<1$　　B. $\{x|x<1\}\cap\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$

C. $-3<x<1$　　D. $-3\leqslant x\leqslant 1$

3. 函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 以上都不对

4. 下列函数中不是基本初等函数的是(　　).

A. $y=e^x$　　B. $y=\lg(1-x)$　　C. $y=\sqrt[3]{x}$　　D. $y=8^{\sqrt{2}}$

5. 设$C(q)$是成本函数，$R(q)$是收入函数，$L(q)$是利润函数，则盈亏平衡点是方程(　　)的解.

A. $C(q)+R(q)=0$　　B. $L(q)-R(q)=0$

C. $R(q)-C(q)=0$　　D. $L(q)-C(q)=0$

二、计算题

1. 指出下列函数的复合过程.

(1)$y=(\arcsin\sqrt{x})^2$　　(2)$y=e^{\tan^2(x+1)}$

2. 下列各题中，函数$f(x)$和$g(x)$是否相同？为什么？

(1)$f(x)=1$，$g(x)=\dfrac{x}{x}$；

(2)$f(x)=1$，$g(x)=\sin^2x+\cos^2x$；

(3)$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，$g(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1)$y=x^4(1-x^2)$；

(2)$y=3x^2-x^3$；

(3)$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(4)$y=x(x-1)(x+1)$.

4. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<0\\ 1, & x=0\\ 1-x, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$，求：

(1)函数的定义域；

(2)$f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f(2)$；

(3)画出函数的图像.

三、应用题

1. 某手表厂生产一只手表的可变成本为15元，每天的固定成本为2 000元，如果每只手表的出厂价为20元，为了不亏本，该厂每天至少应生产多少只手表？

2. 已知需求函数为$Q=\dfrac{100}{3}-\dfrac{2}{3}p$，供给函数$S=-20+10p$，求市场均衡价格$p_0$.

3. 已知厂家生产某种产品的成本函数为$C(q)=50+3q$，收入函数为$R(q)=5q$.

求：(1)该产品的平均利润；(2)该产品的盈亏平衡点.

4. 某商品的成本函数为 $C(q)=2q^2-4q+27$，供给函数为 $q=p-8$. 求：(1)该商品的利润函数；(2)说明该商品的盈亏情况.

第二章　极限与连续

知识要点

<table>
<tr><td rowspan="4">极限概念及性质</td><td colspan="2">数列的极限</td><td>对数列$\{x_n\}$，当 n 无限增大时 x_n 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为 $n\to\infty$ 时数列$\{x_n\}$的极限，记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">函数的极限</td><td>定义</td><td>$\lim f(x)=A$(自变量 $x\to\infty$或 $x\to x_0$ 时，函数$f(x)$无限接近一个确定的常数 A，称 A 为函数$f(x)$在自变量 x 的某一变化过程中的极限.)</td></tr>
<tr><td>性质</td><td>在自变量的同一变化过程中，若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则
(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;
(2)$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;
(3)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$　$(B\neq0)$;
(4)(复合函数)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，而函数 $f(u)$ 在点 u_0 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">定理</td><td>$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$
$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">函数的连续性</td><td colspan="2">定义</td><td>若函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某领域内有定义，且满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续.</td></tr>
<tr><td colspan="2">最值定理</td><td>设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在该区间内至少取得它的最大值和最小值各一次.</td></tr>
<tr><td colspan="2">介值定理</td><td>设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，$f(a)<C<f(b)$，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得$f(\xi)=C$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">无穷小</td><td colspan="2">定义</td><td>以零为极限的变量称为无穷小.</td></tr>
<tr><td colspan="2">性质</td><td>有限个无穷小的和或积是无穷小.
常数与无穷小的积是无穷小.
无穷小与有界函数的积是无穷小.</td></tr>
<tr><td colspan="3">两个重要极限</td><td>$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$</td></tr>
</table>

典型例题

例 1　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-5x+3)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^4+x^2+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-5x+3)=\lim\limits_{x\to 2}(2x^3)-\lim\limits_{x\to 2}(5x)+3=16-10+3=9$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^4+x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^4+x^2+1)}=\dfrac{-3}{3}=-1$

(3) 因为 $x\to 1$ 时，分子、分母都以零为极限，故不能直接用四则运算法则，只有先把分子、分母趋于零的因子相约去，再进行极限运算．即

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=0.$$

(4) 对于含有根式的式子求极限，先进行有理化，再进行极限运算．即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

注：在自变量的同一变化过程中，各函数的极限要存在才能进行极限四则运算.

例 2　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+3}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}$.

解：(1) 因为 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$，$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\sin x$ 是有界函数，由无穷小的性质可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x}=2$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{2x}}{1+\dfrac{1}{2x}}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{-2x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3}=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1-2x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

$=\ln[\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{1}{2x}\cdot(-2)}]=\ln e^{-2}=-2.$

例 3 设函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & -\infty<x<0\\ \sin\dfrac{1}{x}, & 0<x<+\infty\end{cases}$，问$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在?

解： 因为$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，所以极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

例 4 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\ x\neq 0\\ x, & |x|>1\end{cases}$，讨论函数$f(x)$在点 $x=1$，$x=0$，$x=-1$ 处是否连续?

解： 因为该分段函数$f(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以函数在 $x=0$ 处无定义，故$f(x)$在点 $x=0$ 处不连续；

当 $x=1$ 时，因为$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x=1$，所以函数$f(x)$在 $x=1$ 处左右极限相等且$f(1)=1$，从而函数$f(x)$在点 $x=1$ 处连续；

当 $x=-1$ 时，因为$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}x=-1$，$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x^2}=1$，所以函数$f(x)$在 $x=-1$ 处左右极限不相等，从而函数$f(x)$在点 $x=-1$ 处不连续.

同步训练

一、选择题

1. 设$f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=(\quad)$.

A. 不存在　　B. ∞　　C. 0　　D. 1

2. 当 $x\to 0^+$时，下列变量是无穷小量的是(　　).

A. $\cos x$　　B. e^x　　C. x^2　　D. $\ln x$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}=($　　$)$.

A. 0　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. $\dfrac{5}{4}$　　D. ∞

4. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=($　　$)$.

A. 0　　B. 1　　C. ∞　　D. 没有极限

5. 函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ 在点 $x=2$ 处(　　).

A. 有定义　　B. 有极限　　C. 没有极限　　D. 连续

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=($　　$)$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 没有极限

7. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{x}\right)^x=($　　$)$.

A. 1　　B. $e^{\frac{1}{2}}$　　C. e　　D. e^2

8. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的连续区间是(　　).

A. $(-\infty,\ 2)$　　B. $(1,\ +\infty)$

C. $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$　　D. $(2,\ +\infty)$

二、计算题

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x^2+5}{(2x+1)^4}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2}$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & x<0\\ k, & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+1, & x>0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，求 k 的值.

第三章 导数与微分

知识要点

<table>
<tr><td rowspan="7">导数</td><td colspan="2">定义</td><td>设(a, b)是函数$y=f(x)$的定义域，若极限
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限为$y=f(x)$在$x_0$处的导数，记作$f'(x_0)$或$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">几何意义</td><td>$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0, y_0)$处的切线斜率．该点处的切线方程为：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$．</td></tr>
<tr><td rowspan="5">求导法则</td><td>和、差、积、商的求导法则</td><td>设$u=u(x)$，$v=v(x)$在点x处可导，则
(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$；
(2) $(uv)'=u'v\pm uv'$；
(3) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$．</td></tr>
<tr><td>复合函数的求导法则</td><td>若函数$u=\varphi(x)$在点x处可导，$y=f(u)$在对应的u也可导，则$y=f[\varphi(x)]$在x处也可导．即$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$．</td></tr>
<tr><td>隐函数的求导法则</td><td>由方程$F(x, y)=0$所确定的函数$y=f(x)$称为隐函数．求导时，对方程$F(x, y)=0$两边关于x求导，整理出y'即可．</td></tr>
<tr><td>对数求导法</td><td>对函数两边同时取自然对数，将其转化为隐函数，再求导．</td></tr>
<tr><td>由参数方程所确定的函数求导</td><td>设参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，若$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$可导，且$\varphi'(t)\neq 0$，($\varphi(t)$严格单调)，则由参数方程确定的函数$y$的导数是$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$．</td></tr>
</table>

微分	定义	如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处具有导数 $f'(x)$，称 $f'(x)\mathrm{d}x$ 为函数在 x 处的微分，记作 $\mathrm{d}y$. 即 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.
	和、差、积、商的微分法则	设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在 x 处可微，则 (1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$; (2) $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$; (3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$ $(v\neq 0)$
	近似公式	$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$
导数与微分之间的关系		函数 $y=f(x)$ 在点 x 可微 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导

典型例题

例 1　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x}$.

解： 因为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

又

$$\frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x}=\frac{f(x_0+x)-f(x_0)-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}$$

$$=\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}+\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}$$

显然 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}=f'(x_0)$（把 x 看作定义中的 Δx）

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}=f'(x_0)$（把 $-x$ 看作定义中的 Δx）

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}$

$=2f'(x_0)$.

注：导数定义中需要重点理解 Δx.

例 2　设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=1$，求 $f'(2)$.

解： 因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，所以

$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}(x-2)\cdot\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-2)\cdot\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=0\cdot 1=0$$

又　$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

所以　$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=1$.