

FOUNDATION OF
MESOMECHANICS

细观力学基础

张研 韩林 编著



科学出版社

细观力学基础

FOUNDATION OF MESOMECHANICS

张 研 韩 林 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要阐述细观力学的基本理论及方法。全书分为两篇，即固体细观力学和多孔介质细观力学。

第一篇（第一至五章）内容包括：细观力学的基本问题和研究方法；特征应变问题的求解方法，Eshelby问题的求解过程；材料有效性质的上下限的变分法，有效刚度的Voigt上限和Reuss下限，Hashin-Shtrikman变分法；复合材料的均匀化问题，基于点构形的近似方法，基于多相模型的近似方法；固体细观力学理论和方法的应用，预测纤维增强层合材料和热弹性材料的有效性质。第二篇（第六至十章）内容包括：多孔介质均匀化理论的数学基础；达西定律细观力学，将牛顿流体及非牛顿流体的状态方程均匀化得到宏观达西定律；菲克定律细观力学，基于菲克定律均匀化的离子传导问题；排水状态下的多孔介质细观力学方法；孔隙流体压力作用下的饱和多孔材料的有效特性。

本书可供高等工科大学工程力学、材料科学以及土木、交通、采矿类专业的本科生、研究生，以及有关专业的研究人员和工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

细观力学基础/张研, 韩林编著. —北京: 科学出版社, 2014
ISBN 978-7-03-040380-3

I. ①细… II. ①张… ②韩… III. ①材料力学-基本知识 IV. ①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 068388 号

责任编辑: 童安齐 王 钰 / 责任校对: 刘玉靖
责任印制: 吕春珉 / 封面设计: 耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 6 月 第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2014 年 6 月 第一次印刷 印张: 14 1/2

字数: 330 000

定价: 60.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换(双青))

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

细观力学是 20 世纪力学领域重要的科学研究成果之一，它是连续介质力学和材料科学相互结合衍生形成的新兴型学科。细观力学利用多尺度的连续介质力学理论和方法，研究材料细观结构与宏观性能之间的定量关系，预测材料的有效弹性模量、热膨胀系数和强度等宏观性能。复合材料的性能不但取决于其组分材料的性能和细观结构的几何形状、组分结合界面的性态等，还与生成过程中的压力、温度、加工历时和周围约束等因素相关，通过对细观结构观测和生成工艺参数的适当选择，可以使材料达到预期或最佳的工作状态。值得庆幸的是，近二十年来，我国的科技工作者们应用细观力学的理论和方法，成功地研究了多种合成材料（航天复合材料、纤维增强复合材料、陶瓷、岩石和混凝土等）的增强、断裂损伤和破坏问题，给出一些颇具特色和有价值的研究成果。

随着细观力学理论的成熟，世界上很多大学都开设了这类课程。在过去的十五年里，他们在各自的学校中讲授细观力学课程。但是，我们却一直没能为这门课程选到一部合适的教科书。现有的书籍大部分针对专家和研究人员的研究专题，这些优秀著作并不适合直接作为教科书。因为细观力学理论还处于发展阶段，不同的研究者使用不同的方法得到研究结果。为了让学生能够理解不同概念和方法之间的内在联系，需要用一种统一的方法（包括符号的使用）介绍细观力学理论，使教师和学生可以完全掌握细观力学的本质。本书重点叙述细观力学的基本概念，而不是对现有著作和研究成果的收集和编撰。对于那些渴望更深入学习的人来说，应该参阅本书中没有涉及的专题。

本书不是细观力学研究成果的全面收集，也不是相关出版物的研究参考书，而是提供给高年级本科生和研究生的教材。它为教师提供教学工具，也为初学者学习细观力学的基本思想、概念、原理和方法提供帮助。为此，本书首先介绍一个统一的数学框架，在此基础上，用通俗的方法介绍这些理论。除了作者自己的研究成果外，在统一的数学框架的基础上，还可以衍生出很多有用的结果。该方法可以使学生跟上细观力学的发展，也可以帮助学生理解和领会细观力学的广泛应用。

江苏省力学学会原理事长赵光恒教授主审本书，他的宝贵而富于建设性的修改意见，使得本书结构更为合理，内容更为严谨，在此表示衷心的感谢。特别感谢法国里尔科技大学邵建富（J. F. Shao）教授对此领域知识的尽

心传授与指教。

在安排本书内容时，著者从黄克智、黄永刚教授的《固体本构关系》著作中得到了很大教益；在编写中，引用了Mura教授的 *Micromechanics of Defects in Solids*，Jianmin Qu 教授等的 *Fundamentals of Micromechanics of Solids* 和 Luc Dormieux 教授等的 *Microporomechanics* 著作中的部分结果，特此对他们表示感谢。此外，本书得到国家自然科学基金（项目编号：50808066）的资助，也一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免有不足之处，恭请各位专家和读者批评指正。

张 研

2013年7月28日

于南京河海大学

目 录

前言

第一篇 固体细观力学

第一章 绪论	3
1.1 基本概念	3
1.1.1 细观力学简介	3
1.1.2 材料的非均匀性和多重尺度	4
1.1.3 代表性体积单元 (RVE)	7
1.1.4 符号的习惯用法	9
1.2 细观力学的研究方法	11
1.2.1 随机介质的数学描述	11
1.2.2 局部化	14
1.2.3 均匀化	17
第二章 特征应变理论	23
2.1 连续介质力学的基本方程	23
2.1.1 位移和变形	23
2.1.2 应力和平衡	25
2.1.3 能量、功和热力学势	26
2.1.4 本构律	27
2.1.5 小应变线弹性力学问题	35
2.1.6 弹性力学解答的积分表达式	35
2.2 特征应变	40
2.2.1 特征应变的定义	40
2.2.2 特征应变问题的解法	42
2.2.3 螺旋位错和边缘位错	43
2.3 Eshelby 问题与等效夹杂理论	46
2.3.1 Eshelby 问题	46
2.3.2 等效夹杂理论	51
2.3.3 具有均匀特征应变的夹杂问题	53
第三章 预测有效刚度和柔度的变分法	56
3.1 线弹性力学变分法	56
3.1.1 真实场和可能场	56
3.1.2 最小势能原理和最小余能原理	57
3.1.3 Voigt 上限和 Reuss 下限	60
3.2 Hashin-Shtrikman 变分法	62

3.2.1	Hashin-Shtrikman 变分原理	62
3.2.2	Hashin-Shtrikman 上下限	71
3.2.3	Hashin-Shtrikman 变分法的讨论	76
第四章	细观力学的均匀化方法	78
4.1	基于点构形的近似方法	78
4.1.1	新的理论框架	78
4.1.2	稀疏法	80
4.1.3	Mori-Tanaka 法	82
4.1.4	自洽法	84
4.1.5	微分法	89
4.1.6	不同方法的比较	91
4.2	基于多相模型的近似方法	97
4.2.1	复合球体模型	97
4.2.2	三相模型	99
4.2.3	四相模型	102
4.2.4	多涂层夹杂问题	102
第五章	固体细观力学的应用	106
5.1	纤维增强层合材料的有效性质	106
5.1.1	单向纤维增强复合材料	106
5.1.2	多层复合材料的有效性质	112
5.1.3	单层板的有效性质	117
5.1.4	层合板的有效性质	120
5.2	热弹性材料的有效性质	122
5.2.1	有效热膨胀系数	122
5.2.2	温度应力	123
5.2.3	二相复合材料的情况	123
5.2.4	混凝土的热膨胀系数和温度应力	125

第二篇 多孔介质细观力学

第六章	多孔介质均匀化的数学框架	131
6.1	工程问题的简化方法和模型	131
6.1.1	工程中的多孔材料	131
6.1.2	多孔材料的代表性体积单元 (RVE)	131
6.2	均匀化运算	133
6.2.1	表观平均与内禀平均	133
6.2.2	表观平均的空间导数	134
6.2.3	表观平均的时间导数	135
6.2.4	$\bar{\epsilon}$ 的空间和时间导数	135
6.3	守恒律的应用	136
6.3.1	质量守恒	136

6.3.2	动量守恒	137
6.4	周期性胞元	139
6.4.1	基本假设	139
6.4.2	周期条件下 \bar{e} 的空间和时间导数	141
6.4.3	周期条件下 $\langle e \rangle_0$ 的空间和时间导数	141
6.4.4	细观与宏观的相容性	142
第七章	达西定律细观力学	144
7.1	达西定律	144
7.2	基于细观力学的达西定律	145
7.2.1	圆柱体中的黏性流	145
7.2.2	斯托克斯系统的均匀化	145
7.2.3	渗透张量的下限	150
7.2.4	渗透张量的上限	154
7.3	二维微结构渗透张量的上下限	155
7.3.1	下限	155
7.3.2	上限	156
7.3.3	比较	157
7.4	基于双尺度展开的周期性均匀化	157
7.4.1	双尺度展开方法	157
7.4.2	达西定律应用于变形多孔介质	159
7.5	液相和固相的相互作用	160
7.5.1	固-液相互作用的宏观表征	160
7.5.2	固-液相互作用的细观表征	160
7.6	线性达西定律的推广	161
7.6.1	宾汉流体	161
7.6.2	幂律流体	163
第八章	菲克定律细观力学	168
8.1	菲克定律	168
8.2	稳态非对流扩散	168
8.2.1	扩散性质的周期性均匀化	168
8.2.2	迂曲度张量	169
8.2.3	周期性均匀化的变分法	170
8.2.4	迂曲度的几何意义	172
8.3	双尺度展开法	174
8.3.1	非对流稳态扩散	174
8.3.2	与对流耦合的稳态扩散	176
8.3.3	瞬态情况	179
8.4	多层孔隙介质	180
8.5	结论	181

第九章 排水弹性多孔介质细观力学	183
9.1 空心球模型	183
9.1.1 有效体积模量和压缩率	183
9.1.2 孔隙模型推广	184
9.1.3 基于能量形式的定义	185
9.1.4 位移边界条件	185
9.2 基于RVE的多孔介质均匀化	186
9.2.1 RVE的细观力学描述	186
9.2.2 均匀应力边界条件	188
9.2.3 均匀应变边界条件	190
9.2.4 有效柔度张量	191
9.2.5 有效刚度张量	193
9.3 有效弹性张量的估计	195
9.3.1 稀疏法	195
9.3.2 微分法	197
9.4 固相平均应变	198
9.5 饱和多孔介质中的分子扩散	200
9.5.1 局部边值问题定义	201
9.5.2 有效扩散系数的估计	202
第十章 饱和弹性多孔介质细观力学	204
10.1 饱和空心球模型	204
10.1.1 直接解	205
10.1.2 能量法	206
10.2 基于RVE的饱和多孔介质均匀化	207
10.2.1 RVE上荷载的定义	207
10.2.2 均匀化物理方程	209
10.2.3 均匀化物理方程的对称性	210
10.2.4 能量法	211
10.2.5 基于变量 (\mathbf{E}, m) 的均匀化物理方程	212
10.3 多孔介质弹性常数和固相平均应变	213
10.3.1 细观和宏观各向同性	213
10.3.2 细观和宏观各向异性	214
10.3.3 固相平均应变	215
10.4 线弹性多孔介质细观力学的 Levin 理论	216
10.4.1 多孔弹性介质均匀化物理方程	216
10.4.2 具有初始预应力的多孔介质	218
10.5 双尺度多孔材料	219
主要参考文献	222

第一篇

固体细观力学

第一章 绪 论

本章提出细观力学的基本问题。1.1 节介绍连续介质力学中通过试验和归纳法确定材料宏观力学性质。细观力学考虑物质不均匀构成，在很小的、通常被称为“细观”的尺寸内分析，提出“为什么”和“如何”用细观力学方法预测材料的本构关系，目的是把实际不均匀材料用等效均匀介质代替，确定宏观上的有效本构关系。因此，需要引入非均匀复合材料代表性体积单元 (representative volume element, RVE) 的概念。1.2 节将着手于“如何”解决问题。通过代表性体积单元的描述，介绍细观力学研究的基本特性和均匀化过程的一般方法。由于不可能完全精确地描述代表性体积单元中的材料组成，所以在通常情况下，对于提出的问题没有唯一解答。在定义非均匀复合材料代表性体积单元为均匀应力或均匀应变边界条件的前提下，将均匀化方法的使用限制在一定范围内，对均匀化的方法和结果进行评估。根据虚功原理，得到宏观均匀化条件，并用 Hill 引理进行解释。

1.1 基本概念

1.1.1 细观力学简介

连续介质力学采用适当的本构关系描述均匀材料对外部作用的响应。这类本构关系是在不考虑材料微结构的情况下通过宏观实验得到的。然而，不论是天然材料还是人工材料，即使在宏观尺度下表现出均匀性，实质上却都是非均质的。所以，连续介质力学的描述只是一种近似，力学性能实验只能反映出材料的“整体”性能。连续介质力学并不能揭示材料微结构与宏观性能之间的关系。

在连续介质力学中，通过试验确定材料的热弹性和弹塑性性质是最常规的研究途径。这类研究基于实验的唯象学方法和归纳法，是根据在指定荷载作用下的、在指定材料的构件和结构上的实际测量结果确定本构关系，研究结果只能在确认过的范围内有效。但是，以上的试验和归纳没有考虑结构在制造、施工和运行过程中的复杂情况，例如：

1) 力学荷载和外界因素（温度、湿度、辐射和腐蚀环境等）的变化对材料属性的影响、结构在超过正常工作年限情况下的使用，都使预先根据试验结果得到的本构关系不能反映结构的实际工作状态。某一确定的本构关系实际上缺乏对复杂情况的预测能力，除非重新对材料性质进行研究，否则很难避免风险。

2) 材料的改变（化学成分、制作方法、模具、加工方法以及聚合结晶条件）对相应材料力学性质有很大影响。只有很好地确定材料性质，归纳法才有效。此方法不能认识材料的制作过程，不能从表观属性反映其内在属性，不能从现象和力学宏观特性联系到这些问题的本质。

细观力学是 20 世纪力学领域重要的科学研究成果之一，它是连续介质力学和材料

科学相互结合衍生而形成的新兴学科。细观力学利用多尺度的连续介质力学理论和方法,研究材料细观结构与宏观性能之间的定量关系,预测材料的有效弹性模量、热膨胀系数和强度等宏观性能。复合材料的性能不但取决于其组分材料的性能和细观结构的几何形状、组分结合界面的性态等,还与生成过程中的压力、温度、加工历时和周围约束等因素相关,通过对细观结构观测和生成工艺参数的适当选择,可以使材料达到预期或最佳的工作状态。

细观力学研究宏观均匀但细观非均匀的介质,基于材料细观结构的信息,寻找宏观均匀材料的有效性能,其基本思想是“均匀化”。对于弹性问题,从细观尺度的应力、应变场出发,通过应力和应变体积平均值之间的关系确定材料的有效弹性性能,从而用均匀化后的介质代替原非均匀介质。例如,对于黏弹性材料,可以在宏观本构关系中采用通过细观力学计算出来的有效松弛模量来考虑材料微结构的影响。

近年来,细观力学已经成为许多工程(如复合材料工程,高分子材料工程等)和新技术领域(如纳米技术、生物医药技术等)基础的一部分。有趣的是,自1824年以来,在寻求基体中具有分散椭球体的非均匀介质的有效电、磁、力学性能的研究中,非均匀介质的均匀化问题,在不同学科领域,以各种不同面貌重复出现,实际上,许多不同学科的问题满足完全相同的数学微分方程。

人们对结构性能、安全性、耐久性和对材料、能源经济性的关注,以及不断上涨的试验费用,推动着确定材料宏观物理性质理论和预测材料力学性能方法的不断发展。细观力学的任务就是基于材料微结构的信息确定材料宏观性能,如材料的有效弹性模量、热膨胀性能、强度性能、热传导性能、电磁性能、压电性能、扩散性能和渗透性能等。材料科学的进步也见证了细观力学的需求和发展。现在,人们可以根据不同的使用目的,合理地组成复合材料,制造不同的构件。科学认识的过程使材料的宏观属性和它们的细观结构特性之间的关系不断明确,并促使连续介质力学的描述不断完善。

从宏观到微观的过渡,体现出材料科学的现代发展,通过微观、细观和宏观的多重尺度方法,对材料不同尺寸的现象和特性进行的研究越来越精确有效。

1.1.2 材料的非均匀性和多重尺度

一般来说,大多数工程材料都是非均匀的,即具有细观结构。但是,是否称为非均匀材料依赖于观测时采用的尺度。在给定的材料中,某一组分仅在小于某一特定尺度时才可以辨别。在某一尺度,每一组分可能是均匀的,但是在更小的尺度下观测时,该组分可能为非均匀的。例如,用肉眼看一块多晶体铜($10\mu\text{m}$)是均匀的。但是,在光学显微镜下,该多晶体铜由很多更小的具有不同方向的单晶铜颗粒组成。在该尺度下,虽然每一颗粒都可以看成均匀材料,但是作为颗粒组合的多晶体铜不能看成均匀材料,因为细观结构特征,如颗粒尺寸、方向及颗粒边界决定该尺度下的材料性质。当继续减小尺度时,可以发现每一颗粒也都有它自己的细观结构。材料在每一尺度下的力学行为和性质由该尺度上可以观测到的细观结构和性质决定。因此,一种材料是否均匀由观测时所采用的尺度决定。换言之,在研究非均匀材料的性质时,需要定义与研究的性质直接相关的尺度。在该尺度下,可以忽略不可观测的细观结构特征,只考虑该细观结构的平均效应。所以,在非均匀材料的研究中,经常用总体性质表示非均匀材料的平均性

质。为了使总体性质具有代表性，符合尺度要求的任意体积单元上平均值必须与非均匀材料试样相同。满足这种要求的非均匀材料称为宏观均匀材料。

例如，硅酸盐混凝土由集料（骨料、石子等）和硅酸盐石（水泥石）组成，其细观结构如图 1.1 所示。当然，被认为是均匀的硅酸盐石颗粒仍然是一个复杂的世界，它是由集料空隙中的石灰和集料表面溶解出的 SiO_2 生成水化硅酸钙结晶连生体以及其中的部分凝胶体组成。水泥石的细观结构是结晶凝聚结构（图 1.2）。

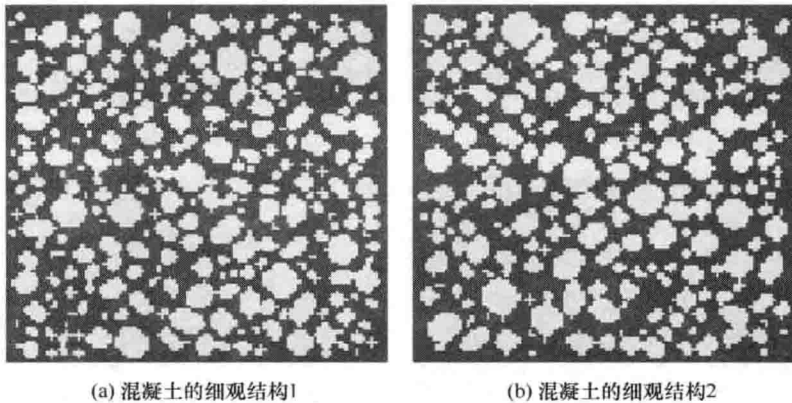


图 1.1 混凝土中的骨料和水泥石

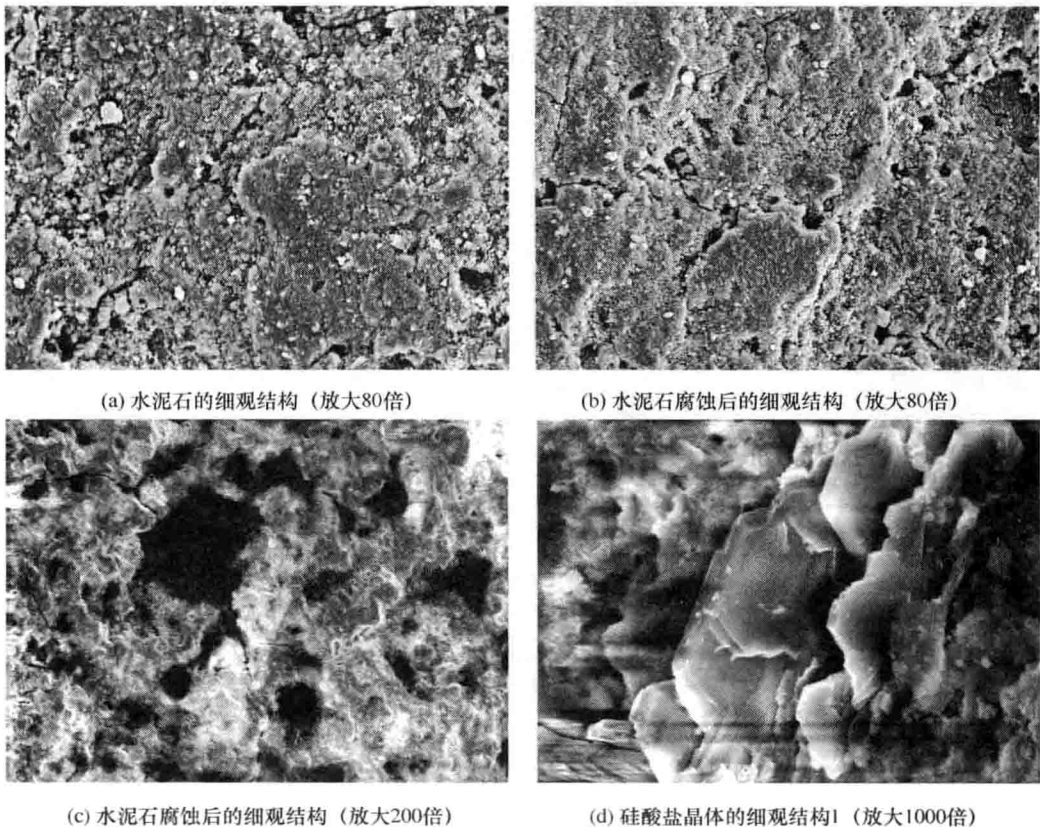


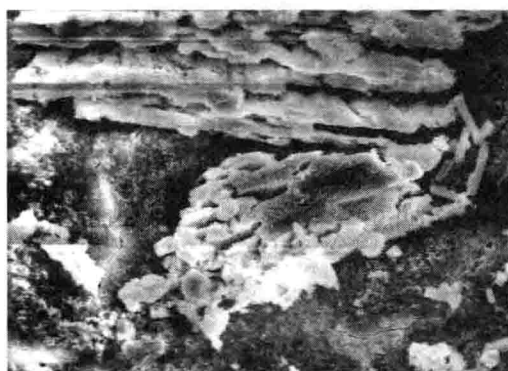
图 1.2 水泥石的细观结构



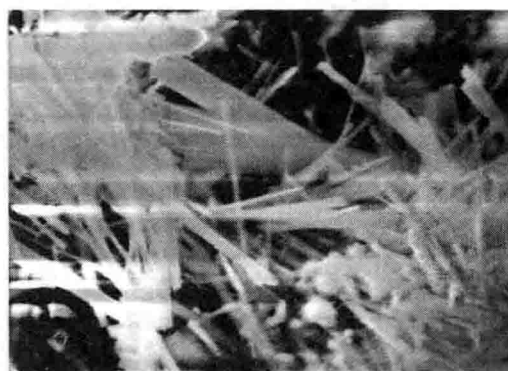
(e) 硅酸盐晶体的细观结构2 (放大1000倍)



(f) 硅酸盐晶体的细观结构3 (放大1000倍)



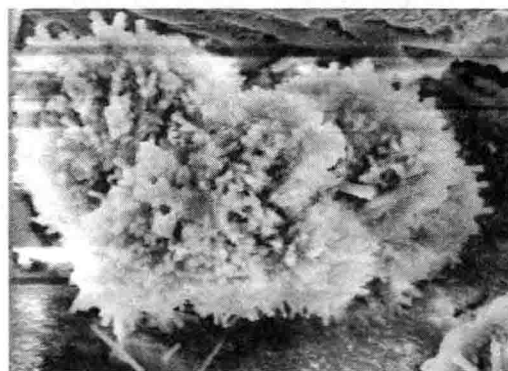
(g) 硅酸盐晶体腐蚀后的细观结构 (放大1000倍)



(h) 钙矾石晶体的细观结构 (放大1000倍)



(i) 钙矾石晶体腐蚀后的细观结构 (放大200倍)



(j) 钙矾石晶体腐蚀后的细观结构 (放大1000倍)

图 1.2 水泥石的细观结构 (续)

尺度的选择取决于研究的目的，如果要预测铁含量增加对合金弹性模量和弹性极限的影响，可以认为钢和铁是均匀的；如果要通过钢和铁结晶的方向分布及颗粒的形态，研究钢铁合金弹塑性特征的各向异性，可以认为上述两个特征在晶体内部是均匀的；如果要进一步了解颗粒间的细观裂缝在重复荷载作用下损伤产生和发展的情况并重新建立此非均质材料模型，就需要考虑各相和颗粒结合处的分离区域以及颗粒内部的塑性滑移的分布情况。

关于尺度的选择, 应该注意以下三点:

- 1) 根据所研究问题的性质, 确定非均匀材料的细观尺度。
- 2) 保证考虑的尺寸有对应可用的分析仪器。
- 3) 对于连续介质力学, 应该满足连续条件。

然而, 初始选择的尺度并不能同时满足这三个条件。在获得一个满意的结果前, 通常需要进行一系列的试验。由于连续介质力学本身的限制, 为了合理地描述非均匀材料微结构的形态和分布, 采取的尺寸往往远离想象的情况, 这时, 可采用线弹性的计算结果验证所选择尺度的合理性。

1.1.3 代表性体积单元 (RVE)

细观力学是双尺度的力学结构: 宏观尺度和细观尺度。在宏观尺度中, 连续介质由许多物质点组成, 而与该宏观点相关联的细观空间则被称为代表性体积单元 (RVE), 它是细观力学中的一个基本概念, 需要满足尺度的二重性。即一方面, 在宏观上其尺寸足够小, 可以看成是一个物质点, 因而在 RVE 中的宏观应力、应变场可视为均匀; 另一方面, 在细观上其尺寸足够大, 包含很多细观元素和足量细观结构信息, 因而它可以代表局部连续介质的统计平均性质。而细观应力应变场只通过它们的体积平均值对材料的宏观性能产生影响。RVE 是一个数学概念, 没有固定的长度尺寸, 宏观水平与细观水平的尺度是相对的, 对于不同的材料, RVE 的最小尺寸可分别取: $0.1\text{mm} \times 0.1\text{mm} \times 0.1\text{mm}$ (金属)、 $1.0\text{mm} \times 1.0\text{mm} \times 1.0\text{mm}$ (高分子和颗粒复合材料)、 $10\text{mm} \times 10\text{mm} \times 10\text{mm}$ (木材)、 $100\text{mm} \times 100\text{mm} \times 100\text{mm}$ (混凝土)。

用 L 表示结构的特征尺度; l 为代表性体积单元的尺度; d 为细观尺度, 即非均匀材料组分的特征尺度 (如夹杂、孔洞、纤维或晶体等的平均尺寸)。代表性体积单元 (RVE) 必须满足尺度的二重性, L 、 l 和 d 应该有一个合理的比例:

- 1) $l \ll L$ 。这是为了使代表性体积单元在宏观上尺寸足够小, 可以看成是一个物质点, 满足连续介质力学的基本假定。
- 2) $l \gg d$ 。这是为了使代表性体积单元在细观上尺寸足够大, 包含很多细观元素和足够多的细观结构信息, 可以代表局部连续介质的统计平均性质。

宏观表现出均匀力学性质的材料被称为宏观均匀材料。非均匀材料的宏观性质与其细观结构的不确定性紧密相关, 如果代表性体积单元 RVE 的尺寸 l 不远远大于所考虑的非均匀材料组分的特征尺度 d , 当 l/d 的值增加时, 不确定性的影响减小; 当 l/d 的值足够大时, 不确定性的影响可以忽略不计。如果 l 的值相对于 L 的值小很多, 以上两个条件同时得到满足。

非均匀材料代表性体积单元 RVE 的尺度相对于确定的力学系统的特征尺度来说足够小, 可以用等效均匀介质来代替实际的非均匀材料, 通过对等效均匀材料的结构计算获得的 (宏观) 应力场和应变场, 也是局部细观场的平均, 这样就可以预测非均匀材料实际结构的应力状态和本构关系。另外, 还可以得到非均匀材料细观结构微小尺寸下很不规则的应力场和应变场解答, 以及代表性体积单元中的平均场。图 1.3 (a) 为由混凝土建造的实体重力坝; 该结构代表性体积单元如图 1.3 (b) 所示; 代表性体积单元的等效均匀介质模型如图 1.3 (c) 所示。

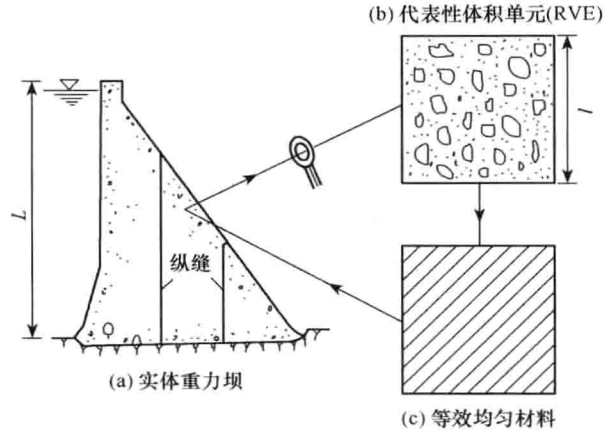


图 1.3 材料的多重尺度模型 ($d \ll l \ll L$)

对于应力和应变局部变化非常大的非均匀材料，细观力学可以揭示其物理性质的尺寸效应。例如，混凝土强度尺寸效应是指随着试件尺寸的增大，强度试验测试值有规律地下降这一现象。越来越多的试验指出，尺寸效应是准脆性材料（包括岩石、冰、多种复合材料、陶瓷、混凝土）的固有特征。对于混凝土而言，尺寸效应主要表现为断裂能随构件尺寸的增大而增大，强度则随构件尺寸的增大而减小。混凝土强度的尺寸效应是工程中特别是大体积混凝土结构工程中普遍存在的现象。采用细观力学理论研究混凝土尺寸效应问题，将对混凝土强度理论及工程实践有一定的指导意义。

另外，在波动问题中，为了用等效均匀介质来代替实际的非均匀材料，扰动荷载特征波长 λ 要远远大于代表性体积单元尺度 l ，即 $\lambda \gg l$ 。

特别指出：对于金属复合晶体合金，颗粒的尺寸 d 为几十微米，由这些颗粒构成的代表性体积单元的特征尺寸 l 应为毫米量级，结构的特征尺寸 L 至少为厘米量级；对于混凝土，骨料的尺寸 d 为若干厘米，代表性体积单元的特征尺寸 l 为几分之一米量级，当混凝土结构的尺寸在数十米时，研究才有意义。对于上述两种情况，仍然要保证扰动荷载的波长大于 l 以及产生的局部应变损伤小于 d 。

最后，为了满足连续介质力学理论的基本假定， d 的尺寸应比某一特定的临界尺寸 d_0 足够大，如果 d 小于 d_0 的话，应力和应变的定义就失去了意义。临界尺寸 d_0 的确定取决于采用材料的细部结构。 d_0 ， d ， l ， L 和 λ 的关系可以简单表示为

$$d_0 \ll d \ll l \ll L, \lambda \ll l$$

需要强调的是，代表性体积单元 (RVE) 的重要性表现在以下三个方面。

1) 长期以来，人们对代表性体积单元最小尺寸的认识是定性的 ($d \ll l \ll L$)，对于线弹性材料，在区域为 Ω 的 RVE 边界 S 上分别施加均匀应力或均匀应变边界条件，求出 Ω 上的应变场和应力场，以及 RVE 的有效刚度 L_{σ}^{ham} 和 $L_{\epsilon}^{\text{ham}}$ 。研究有效刚度与 RVE 尺寸 l 的关系发现，随着 l 的增大， L_{σ}^{ham} 下降， $L_{\epsilon}^{\text{ham}}$ 增加，并趋于同一值。对于给定的最大允许误差 δ ，当 $l > l_0$ ，都有 L_{σ}^{ham} 和 $L_{\epsilon}^{\text{ham}}$ 的相对误差小于 δ ，则称 l_0 的下限为最小代表性体积单元尺寸。通过研究片状或针状颗粒复合材料的有效刚度后发现，在 5% 的最大允许误差和颗粒刚度为基体刚度的 100 倍的情况下，代表性体积单元的最小尺寸应为颗粒尺寸的 10~20 倍。