

科學圖書大庫

向量微積分學

譯者 嚴 夢 輝

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

向量微積分學

譯者 嚴 夢 輝

江苏工业学院图书馆
藏 书 章

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人 林碧銓 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國六十六年九月二十日再版

向量微積分學

基本定價 1.80

譯者 嚴夢輝 電子學校專科部教官

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(63)局版臺業字第0116號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686號
7815250號

發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥帳戶第15795號

承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

譯 序

本書原著者林格倫 (B. W. LINDGREN) 頗取高等微積分之有關材料，鉤玄提要，不蔓不枝，故舉一可以反三，事半而能功倍。原著訛植筆誤雖多，但瑕不掩瑜，堪稱上乘之作。今由譯者就能力所及，試加訂正，以期提高其可讀性。惟譯者學殖淺薄，譯文疎漏或未達之處，恐所難免，尚祈方家有以指正，則幸莫大焉。

謬承徐氏基金會邀譯此書並予出版，迨譯時曾蒙李副教授友鎔先生提示卓見，而執教海外之好友袁雲之先生復迭作精神鼓勵，稿成後又得袁軍暨林正中兩位先生之助，熱心校讀譯稿數次。隆情高誼，譯者謹此一併致謝！

嚴 夢 輝

59年2月10日

於 若 谷 齋

原 序

這是一本三維向量分析的基本原理，爲了短期課程用作教本而編寫。書名的採用，是在強調它不是用向量方法討論力學與電磁學問題分析的專書，而是一本向量數學—代數與微積分—的通論。

以本書作爲藍本的數學課程，通常應在一般的初等微積分課程之後施教，也就是視後者爲先修課程。本書根據初等微積分，先複習極限，連續性，導數及積分等概念，再依「實際」問題的背景，引述較爲高深的題材—線積分，面積分，雅谷比式與方向導數。這種高深題材的誘導性引論，可使它們在高等微積分課程中作詳盡探討時，也許更能引人入勝。因此，編者的目的，是順便採用某些物理問題，來傳授若干有用的數學材料，並不是藉數學技術作物理問題的探討，因爲就這一階段的學生課業來說，這些物理問題尚無充分發揮的餘地。

Fulton Koehler 及 Richard Juberg 兩位教授的寶貴指示，使本書提高了正確性與效用性，編者深表感激！

林 格 倫
(B.W. Lindgren)

目 錄

譯序	I
原序	III
第一章 向量代數	1
1.1 基本定義	1
1.2 向量加法與減法	4
1.3 向量乘以純量	9
1.4 向量積	16
1.5 純量積	21
1.6 三元積	25
1.7 向量的分量表示法	28
1.8 向量在解析幾何中的應用	34
1.9 反集合	41
第二章 單變數的函數	45
2.1 單變數的純量函數	45
2.2 單變數的向量函數	48
2.3 弧長	54
2.4 空間曲線幾何	63
2.5 曲線運動	68
第三章 角速度	73
3.1 剛體的角速度	73
3.2 別論	75
3.3 運動向量的導數	80
3.4 角速度的相加	85
3.5 旋轉軸	88
第四章 位置函數	95
4.1 多變數的純量函數	96
4.2 線積分	103
4.3 曲面	108

4.4 方向導數與梯度	114
4.5 代爾運算素對向量函數的應用	121
4.6 曲面的面積與面積分	129
4.7 有向曲線與面積分	135
第五章 格林定理・斯托克斯定理及相關諸定理	141
5.1 平面中的格林預備定理	141
5.2 平面中的位函數	147
5.3 斯托克斯定理	153
5.4 發散定理	161
5.5 詮釋及應用	165
第六章 曲線坐標	171
6.1 由變換產生的定義	171
6.2 體積元素與弧長元素	177
6.3 曲線坐標中的梯度	180
6.4 曲線坐標中的發散與旋量	184
習題答案	189
索引	197

第一章 向量代數

物理科學上有很多的「量」，作用的效果，既決定於它們的大小或多寡，也要看它們的方向而定。例如在某一方向以十磅的力推動一物體，與在另一方向以十磅的力來推動它，將產生不同的結果。一物體在向北的方向作二哩的位移或運動，所到達的位置，便和向東南方向作二哩的運動不同。這種量叫做**向量**，在數學上僅僅用數來代表它們顯然是不夠的，必須「數」（代表多寡或大小）和「方向」同時並用。

上例所說的「方向」，是我們經驗「空間」中的方位，歐幾里得立體幾何，便是這種空間的模型。向量觀念雖然可以有效地推廣到並引用於高維空間，但本書要討論的為三維空間（有時是一維和二維的情形）；在應用方面，我們把向量只看成代表實際物理量的大小和方向。

1.1 基本定義

以數學的意義來說，本書所討論的**向量**，是三維幾何中的方向或方位與（非負）數量的組合。表示向量可用各種不同的記號，本書一律採用**黑體字母**，如 $\mathbf{V}$ 。其他記號，尤其書寫時所用的是在字母上方畫一小箭頭： $\vec{V}$ ，也可用下加橫線的字母： $\underline{V}$ 。向量 $\mathbf{V}$ 的長度或大小，用 $|\mathbf{V}|$ 有時或用 V 來表示。

向量及代表它的數學向量是沒有固定位置的——不必指出任何特定的作用點（如力或位移的作用點）。不過為了方便起見，不妨用有向線段來代表向量，並規定大小和方向都相同的兩有向線段，就是表示相同的向量而且是同義的。自 P 至 Q 的有向線段，寫成記號為 $\overrightarrow{PQ}$ 或 (P, Q) ， P 點叫做**始點**， Q 點叫做**終點**（見圖 1.1）；在應用時我們說 $\overrightarrow{PQ}$ 所代表的就是那個向量，但千萬要記住，只要是長度和方向等於 $\overrightarrow{PQ}$ 的任何其他有向線段，都可用來表示這一「長度、方向」的配對。尤其要注意的，當我們用有向線段的幾何表示法來下向量的定義時，必須明瞭它的效果是和向量的所在位置無關的。

還有一點要注意的，例如用有向線段 $\overrightarrow{PQ}$ 代表一個力向量 $\mathbf{F}$ ，是含有一種

2 向量微積分學

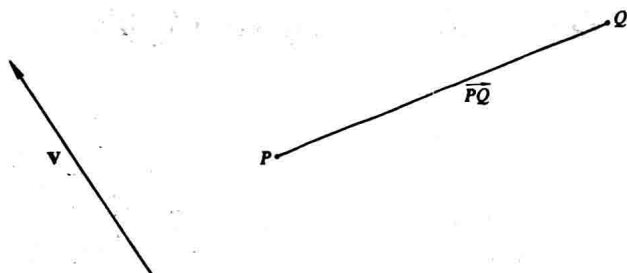


圖 1.1 向量

度量單位的選擇意義在內，所以度量比例如有改變，則向量的代表性便會發生變化。

我們將可看到，某些力或位移組合後，結果沒有淨力或淨位移了；為求向量的表示得以完全，最好下一個**零向量**的定義——長度為零方向不定的向量。雖然零向量與長度為正的向量不可混為一談，但對於某些已知的特定法則，在運算過程中自始至終是可以把零向量併入向量之列的。這些法則當然不必要求零向量作方向的選定，因為方向已無關緊要。零向量用 $\mathbf{0}$ 來表示。

以向量方法研究幾何學及空間運動時，把空間各點用一向量聯結起來是很方便的，這一向量是從任意選定的參考點或**原點**出發，到達我們所要討論

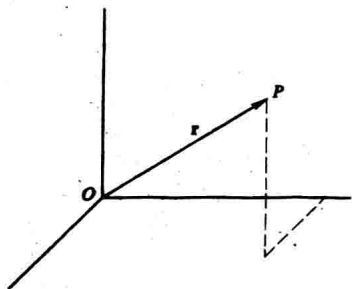


圖 1.2 位置向量

的那一點。這種配置是唯一的，所以向量對於點的確定便有幫助了。圖 1.2 表示一點 P ，原點 O 及向量 $\vec{OP}$ ，這一向量叫做 P 點的**位置向量**。向量 $\vec{OP}$ 定出 P 點的位置，而 P 點界定了這一向量。因此，空間的點集合，可用自一固定參考點出發的向量集合來表明，即使參考點本身也可這樣來表明它一用零向量。（我們可以看到上圖中已經畫出各「軸」，這些軸只不過是一種參考間架的圖示而已，並不是說和直角坐標有什麼密切關係或非要用直角坐標不可。）

以後儘可能用記號 $\mathbf{r}$ 表示 P 點的位置向量 $\vec{OP}$ 。研究一個質點的運動時，質點位置是變動點 $P(t)$ ，有充分的理由可以把它看成函數 $\mathbf{r}(t)$ ，那就是說，可把 P 點的位置向量視為時間的函數。向量函數或向量值函數的觀念，可以像普通實值函數 $f(t)$ 一樣來給它下定義，只不過向量函數的值域是向量集合，而不是實數集合。

例題 1.1 以圖 1.3 所示的平行四邊形為例，下列各關係得以成立：

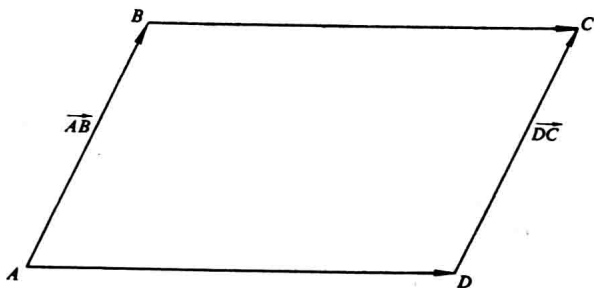


圖 1.3 (見例題 1.1)

$$\vec{AB} = \vec{DC},$$

及

$$\vec{BC} = \vec{AD}.$$

表明平行四邊形的各對邊相等且平行。

例題 1.2 球可定義為自某一點依一固定距離所得全部 P 點的集合。半徑為 a ，球心在原點 O 的球，可定義為位置向量 $\mathbf{r}$ 具有長度為 a 的所有 P 點的集合：

$$|\mathbf{r}| = a.$$

這是球方程式的向量式；凡在球上的那些 P 點都滿足這一條件，但不在球上的任何點都不能滿足。

1.2 向量加法與減法

有些「量」常常用大小和方向的組合來表達，兩個這種「量」根據「平行四邊形定律」合併後又產生同型的合成量。合成量很像普通「數」的和，所以也用**和與加法**等名詞。我們甚至把向量這一名詞，專門使用於可以如此合併的量，下面即將給合併的方法予以定義並作說明。

兩個向量 (P, Q) 與 (Q, R) 即 $\vec{PQ}$ 與 $\vec{QR}$ 之和，定義為向量 (P, R) 或 $\vec{PR}$ ：

$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}.$$

(見圖 1.4) 這個定義是假定一向量自另一向量的終點出發，如此假定是無損於普遍性的，因為任何兩個向量 $\mathbf{U}$ 及 $\mathbf{V}$ ，向量 $\mathbf{V}$ 可被 (長度 and 方向) 等於

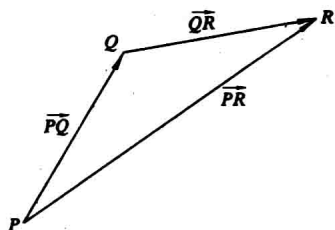


圖 1.4 向量加法

它但自 $\mathbf{U}$ 的終點出發的另一向量 $\mathbf{V}'$ 來代替。其實，向量和並不是依賴作圖時各線段的所在位置而定。圖 1.5 表示 $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ 之和的兩種算法，一種是 $\mathbf{V}'$ 自 $\mathbf{U}$ 的終點出發；另一種是用同義向量 $\mathbf{U}'$ 代替 $\mathbf{U}$ ，及自 $\mathbf{U}'$ 的終點出發的同

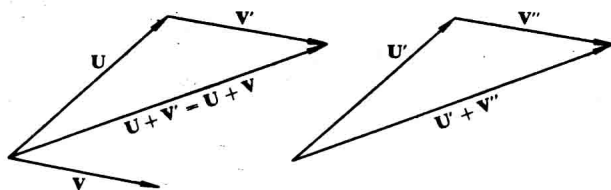


圖 1.5

義向量 $\mathbf{V}''$ 代替 $\mathbf{V}$ 。顯然， $\mathbf{U}' + \mathbf{V}'' = \mathbf{U} + \mathbf{V}' = \mathbf{U} + \mathbf{V}$ 。

加法定義包括了下面一個有用的特例：

$$\vec{PQ} + \mathbf{0} = (P, Q) + (Q, Q) = \vec{PQ}.$$

也包括被加向量爲互相平行的情形；若 $\vec{PQ}$ 平行於 $\vec{QR}$ ，則向量和 $\vec{PR}$ 必同時平行於這兩個向量。如 $\vec{PQ}$ 與 $\vec{QR}$ 方向相同，那麼「和」的長度等於各向量長度之和；如 $\vec{PQ}$ 與 $\vec{QR}$ 方向相反，那麼「和」的長度等於各向量長度之差。

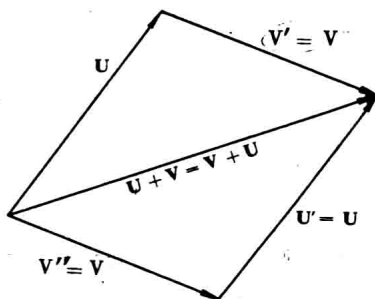


圖 1.6 加法爲可交換

圖 1.6 畫出 $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ 之和，也畫出 $\mathbf{V} + \mathbf{U}$ 之和；後者的構成，可取等於 $\mathbf{V}$ 但自 $\mathbf{U}$ 的始點出發的一個向量 $\mathbf{V}''$ ，再取等於 $\mathbf{U}$ 但自 $\mathbf{V}$ 的終點出發的一個向量 $\mathbf{U}'$ 。這兩種向量和顯然相等：

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{U}.$$

那就是說，向量加法是**可交換**的。我們也可看出，這個公有的向量和，就是以向量 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ （或等於它們的向量）作鄰邊所構成的平行四邊形的對角線。（這是上述向量相加法則命名爲「平行四邊形定律」的由來。）

向量和的大小與方向，可藉部分三角學的幫助，加向量的大小及方向用分析方法獲得。注意 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 自同一點出發時，則此點出發的 $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ 之和，必在 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 所決定的平面中。更可注意的，因向量和是以 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 作爲兩邊的一個三角形的第三邊，所以它的長度不能大於兩邊長度之和：

$$|\mathbf{U} + \mathbf{V}| \leq |\mathbf{U}| + |\mathbf{V}|.$$

這就是著名的**三角形不等式**。（注意上式左邊的加號表示向量相加，但在

6 向量微積分學

右邊的加號，則表示實數的相加。)

向量 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 相加而得 $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ 之後，這一個「和」又可加第三向量 $\mathbf{W}$ ，得 $(\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W}$ ，結果與向量 $\mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W})$ 完全相同：

$$(\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W} = \mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W}),$$

這一事實，我們用「向量加法是可結合的」這句話來說明它。為求明瞭起見，令 $\mathbf{U} = \vec{PQ}$ 及 $\mathbf{W} = \vec{RS}$ ：

$$(\vec{PQ} + \vec{QR}) + \vec{RS} = \vec{PR} + \vec{RS} = \vec{PS} = \vec{PQ} + \vec{QS} = \vec{PQ} + (\vec{QR} + \vec{RS}).$$

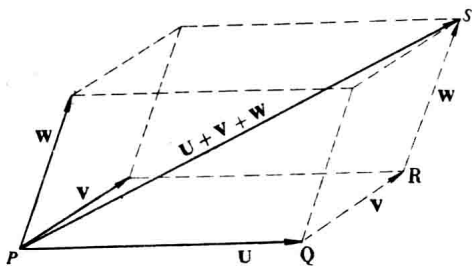


圖 1.7 三個向量之和

由於這一性質，三個向量之和，便沒有用括弧來標示的必要，而簡單地寫成 $\mathbf{U} + \mathbf{V} + \mathbf{W}$ 就可以了。圖 1.7 用平行六面體的對角線以表示此一向量和。(圖中自 P 點沿平行六面體各稜至 S 點的六條可能「路徑」，相當於被加向量的六種可能次序。)

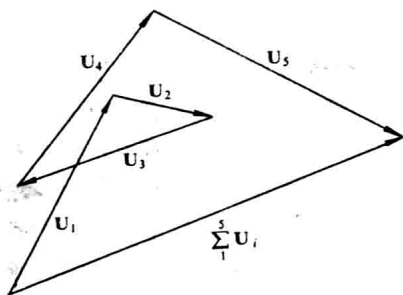


圖 1.8 五個向量之和

任何有限數目的向量之和，都可用數學歸納法來推定。如有向量 $U_1, U_2, \dots, U_n$ ，選擇 U_i 的始點接於 U_{i-1} ($i = 1, 2, \dots, n$) 的終點之後，那麼 $U_1 + U_2 + \dots + U_n$ 之和便被推定了，這一向量和就是用來封閉那個多邊形的向量。(見圖 1.8，圖中表示五個向量之和。) 結合律及三角形不等式，很容易用歸納法推廣到 n 個被加向量的情形。(見習題 1.8)

例題 1.3 如圖 1.9 所示，以構成一個四面體的任何四點 A, B, C, D 來看，由向量加法定義，得

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD},$$

及

$$\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DC} + \vec{CA} = \mathbf{0}.$$

上面兩種關係，在圖中很易看出它們的幾何意義。

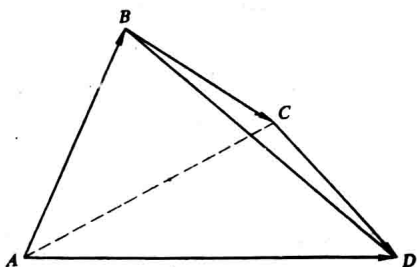


圖 1.9 (見例題 1.3)

向量減法可定義為加法之逆，即：

$$\vec{PQ} - \vec{PR} \equiv \vec{RQ}.$$

根據這一定義(見圖 1.10)，得：

$$\begin{aligned} (\vec{PQ} - \vec{PR}) + \vec{PR} &= \vec{RQ} + \vec{PR} \\ &= \vec{PR} + \vec{RQ} = \vec{PQ}. \end{aligned}$$

那就是說， $U - V$ 是加 V 時而產生 U 的一個向量。以同一頂點出發的 U 與 V 作為兩邊，所構成的三角形必須用這一向量來封閉它。

8 向量微積分學

上述減法定義，有下面一個特例：

$$\mathbf{U} - \mathbf{U} = \vec{PQ} - \vec{PQ} = \vec{QQ} = \mathbf{0}.$$

反過來說，若 $\mathbf{U} - \mathbf{V} = \mathbf{0}$ ，則 $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ ，這是由 $\mathbf{U} - \mathbf{V} = \mathbf{0}$ 的兩邊各加 $\mathbf{V}$ 而來。

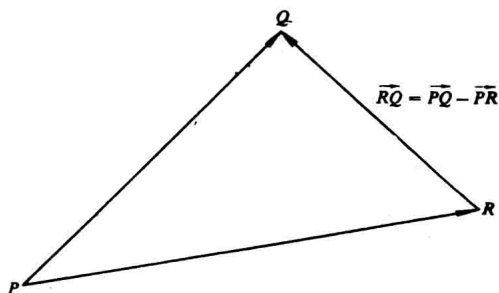


圖 1.10 向量減法

向量 $-\mathbf{U}$ ，可定義為長度等於 $\mathbf{U}$ 但完全指向相反方向的一個向量：

$$-\vec{PQ} = \vec{QP}.$$

因此，若 $\vec{PQ} = \mathbf{U}$ 及 $\vec{PR} = \mathbf{V}$ ，則

$$\begin{aligned} \mathbf{U} + (-\mathbf{V}) &= \vec{PQ} + (-\vec{PR}) \\ &= \vec{PQ} + \vec{RP} = \vec{RQ} = \mathbf{U} - \mathbf{V}. \end{aligned}$$

減 $\mathbf{V}$ 相當於加 $-\mathbf{V}$ ，所以減法可作為加法的特例來看待。

向量加法可以正表示若干位移的合併結果。因一質點自 A 點至 B 點的位移，所代表的向量為 $\vec{AB}$ ，自 B 點至 C 點的位移，所代表的向量為 $\vec{BC}$ ，那麼自 A 點至 C 點的淨總位移，以 $\vec{AC}$ 表示，顯然是 $\vec{AB}$ 與 $\vec{BC}$ 的向量和。以後我們將會看到，把向量加法引用於速度，加速度，力（由牛頓定律）等等的合併時，也都是根據平行四邊形定律。

習 題

1.1 如向量 $\mathbf{U}$ 的長度為十單位，指向東；向量 $\mathbf{V}$ 的長度為五單位，指向北東，試決定向量 $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ 及向量 $\mathbf{U} - \mathbf{V}$ 的長度與方向。

1.2 描繪向量 $\mathbf{U} + \mathbf{U} + \mathbf{U}$ 及 $\mathbf{U} + \mathbf{U} - \mathbf{U}$ 。

1.3 證明 $(\mathbf{U} - \mathbf{V}) + \mathbf{W} = (\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \mathbf{V}$ 。

1.4 於任何正整數 n 時，試以歸納法證明 $\mathbf{U}_1 + \cdots + \mathbf{U}_n$ 的推定方法。

1.5 已知空間任意四點 A, B, C 及 D ，證明 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$ 。

1.6 令 $\mathbf{r}_1$ 及 $\mathbf{r}_2$ 各為 P_1 點及 P_2 點的位置向量，試解釋 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ 的幾何意義。

1.7 用三角形不等式證明 $|\mathbf{U} - \mathbf{V}| \geq ||\mathbf{U}| - |\mathbf{V}||$ ，並作幾何意義的解釋。

1.8 用歸納法證明 $|\mathbf{U}_1 + \cdots + \mathbf{U}_n| \leq |\mathbf{U}_1| + \cdots + |\mathbf{U}_n|$ 。

1.3 向量乘以純量

一個普通的實數，我們用**純量**一詞，與向量加以區別。同樣情形，有大小而無方向的物理量（例如溫度）叫做純量，以區別既有大小又有方向的物理量。

向量 $\mathbf{U} + \mathbf{U}$ 稱為 $2\mathbf{U}$ ，及 $\mathbf{U} + \mathbf{U} + \mathbf{U} + \mathbf{U} + \mathbf{U}$ 稱為 $5\mathbf{U}$ ，那是方便而又適當的。向量 $2\mathbf{U}$ 是方向與 $\mathbf{U}$ 相同但長度為二倍於 $\mathbf{U}$ 的一個向量；向量 $5\mathbf{U}$ 也是與 $\mathbf{U}$ 的方向相同，但長度為 $\mathbf{U}$ 的五倍。依這一原則，如 k 是一個正的**純量**，那麼 $k\mathbf{U}$ 可定義為在 $\mathbf{U}$ 的方向上，長度為 k 倍於 $\mathbf{U}$ 的一個向量。於任何實數 k 時，記號 $k\mathbf{U}$ 可由下面的法則予以定義：

$$0\mathbf{U} = \mathbf{0},$$

$$(-k)\mathbf{U} = -(k\mathbf{U}).$$

在純量 k 與向量 $\mathbf{U}$ 之間產生向量 $k\mathbf{U}$ 的運算叫做**乘法**，這一運算滿足以下各性質：

$$(ab)\mathbf{U} = a(b\mathbf{U}),$$

$$|a\mathbf{U}| = |a| |\mathbf{U}|,$$

$$(a+b)\mathbf{U} = a\mathbf{U} + b\mathbf{U},$$

$$k(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = k\mathbf{U} + k\mathbf{V}.$$

最後兩個性質為分配律；其中前一性質由平行向量之和的定義而來，後一性質就是相似多邊形對應邊成比例的結果。（見圖 1.11）

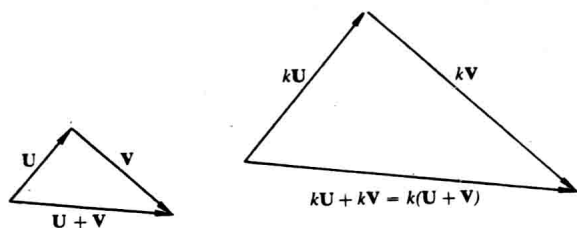


圖 1.11 分配律

依乘法定義，自然可得除以非零純量的**除法**定義。除以 k 完全是乘以 $1/k$ 而已。

例題 1.4 長度為一個單位的向量叫做**單位向量**。長度為正的任一已知向量 $\mathbf{V}$ ，在相同方向上的單位向量，可由已知向量除以它本身的長度而得： $\mathbf{V}/|\mathbf{V}|$ ，因這一向量的長度是

$$\left| \frac{1}{|\mathbf{V}|} \mathbf{V} \right| = \frac{1}{|\mathbf{V}|} |\mathbf{V}| = 1.$$

例如 $\mathbf{V}$ 的長度為五，那麼 $\frac{1}{5}\mathbf{V}$ 的長度為一。

向量 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 成 $a\mathbf{U} + b\mathbf{V}$ 形式的組合叫做**線性組合**。當 $\mathbf{U}$ ， $\mathbf{V}$ 及 $a\mathbf{U} + b\mathbf{V}$ 自同一點出發時，若 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 界定了一個平面，則不論乘數 a 及 b 的值是什麼， $a\mathbf{U} + b\mathbf{V}$ 的組合必在由 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 所界定的平面內。反之，我們可以明瞭，若 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 都不是零向量，且不平行的，則在 $\mathbf{U}$ 與 $\mathbf{V}$ 的平面內，任何向量