普通高等院校机械工程学科“十二五”规划教材

振动力学

Vibration Mechanics

■ 主编　赵子龙

国防工業出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校机械工程学科“十二五”规划教材

振动力学

主编　赵子龙
参编　韩晋民　李新锁

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本教材根据普通高等学校工程力学专业振动力学教学大纲基本要求而编写。全书共分6章，内容包括振动的基本理论，单自由度系统的振动，多自由度系统的振动，多自由度系统振动的近似解法，弹性体的一维振动，弹性体的复杂振动等。书内各章均配有适量的习题，书后附有参考答案，便于读者练习查阅。

本书可作为高等院校工程力学专业本科生的振动力学课程教材和教学参考书，也可作为机械工程、土木工程等专业的本科生和研究生以及从事与振动相关工作的工程技术人员的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

振动力学/赵子龙主编. —北京：国防工业出版社,2014.6

普通高等院校机械工程学科“十二五”规划教材

ISBN 978-7-118-09454-1

Ⅰ.①振... Ⅱ.①赵... Ⅲ.①工程力学-振动理论-高等学校-教材 Ⅳ.①TB123

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第114794号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 14¼ **字数** 323千字

2014年6月第1版第1次印刷 **印数** 1—4000册 **定价** 32.00元

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

普通高等院校机械工程学科“十二五”规划教材
编委会名单

序

国防工业出版社组织编写的“普通高等院校机械工程学科‘十二五’规划教材”即将出版，欣然为之作“序”。

随着国民经济和社会的发展，我国高等教育已形成大众化教育的大好形势，为适应建设创新型国家的重大需求，迫切要求培养高素质专门人才和创新人才，学校必须在教育观念、教学思想等方面做出迅速的反应，进行深入的教学改革，而教学改革的主要内容之一是课程的改革与建设，其中包括教材的改革与建设，课程的改革与建设应体现、固化在教材之中。

教材是教学不可缺少的重要组成部分，教材的水平将直接影响教学质量，特别是对学生创新能力的培养。作为机械工程学科的教材，不能只是传授基本理论知识，更应该是既强调理论，又重在实践，突出理论与实践结合，培养学生解决实际问题的能力和创新能力。在深入教学改革、新课程体系的建立及课程内容的发展过程中，建设这样一套新型教材的任务已经迫切地摆在我们面前。

国防工业出版社组织有关院校主持编写的这套“普通高等院校机械工程学科‘十二五’规划教材”，可谓正得其时。此套教材的特点是以编写“有利于提高学生创新能力和知识水平”为宗旨，选题论证严谨、科学，以体现先进性、创新性、实用性，注重学生能力培养为原则，以编出特色教材、精品教材为指导思想，注意教材的立体化建设，在教材的体系上下功夫。编写过程中，每部教材都经过主编和参编辛勤认真的编写和主审专家的严格把关，使本套教材既继承老教材的特点，又适应新形势下教改的要求，保证了教材的系统性和精品化，体现了创新教育、能力教育、素质教育教学理念，有效激发学生自主学习能力，提高学生的综合素质和创新能力，为培养出符合社会需要的优秀人才服务。丛书的出版对高校的教材建设、特别是精品课程及其教材的建设起到了推动作用。

衷心祝贺国防工业出版社和所有参编人员为我国高等教育提供了这样一套有水平、有特色、高质量的机械工程学科规划教材，并希望编写者和出版者在与使用者的沟通过程中，认真听取他们的宝贵意见，不断提高该套规划教材的水平！

中国工程院院士 艾兴

2010 年 6 月

前　言

振动力学是高等院校工程力学专业的一门重要专业课程，也是机械、航空航天、土建等工程专业本科生和研究生的一门重要的专业基础课。作者在长期的教学实践中积累了一些有益的教学经验，同时也对振动力学教材进行了深入的学习和研究，编写了这本适合普通高校工科学生使用的振动力学教材。

在编写中，本书编者根据普通高校工程力学专业振动力学教学大纲要求，结合以往的教学经验，力求做到由浅入深、循序渐进、条理清楚、通俗易懂。书中给出了大量的例题，既便于教学又可帮助自学，同时各章配有习题，便于学生掌握振动力学的基本概念和基本理论。全书共分6章，第1章介绍了振动的基本理论和相关的数学知识；第2章阐述了单自由度系统的自由振动和强迫振动；第3章阐述了多自由度系统的自由振动和强迫振动；第4章阐述了求解多自由度振动系统固有频率、主振型和响应的近似解法；第5章阐述了杆的纵向振动和梁的横向振动；第6章阐述了梁的复杂振动和板的横向振动。

本书由赵子龙任主编。参加编写的有赵子龙（绪论、第1章～第3章、第5章）、韩晋民（第4章）、李新锁（第6章），全书由赵子龙统稿。

本书在内容选材与编写方面有以下特点：

（1）在篇幅限制范围内重点突出，重视基本概念、基本理论和基本方法等基础内容阐述。因此本书既没有包括非线性振动和随机振动，也没有重复计算力学和有限元等课程中的动力学有限元等内容。

（2）本书注重内容的完整性，既包括单自由度系统和多自由度系统振动等基本内容，也包括杆、梁和板振动等工程应用背景很强的内容。在多自由度振动系统的近似解法中不仅阐述了求解固有频率和主振型的几种典型方法，还介绍了求解系统响应的振型截断法。

（3）将机械类专业机械振动课程和土建类专业结构动力学课程的基本内容有机结合起来，并适度介绍在工程中的应用，使本书的覆盖面更广。

（4）本书力求做到由浅入深、循序渐进，注重各章节间的衔接和呼应，逻辑关系严密清晰。

（5）本书注重与高等数学、工程数学、理论力学、材料力学以及弹性力学等相关课程配合和衔接，并对涉及到的重要概念、基本假设和基本理论做了必要的叙述。

（6）书中给出了大量的例题，既便于教学又可帮助自学。各章均配有适量的习题，书后附有参考答案，便于读者练习查阅。

限于编者水平，书中难免存在不足之处，请读者批评指正。

编者

2014年1月

目　录

绪　论

机械振动是物体在其稳定的平衡位置附近所作的往复运动。这是物体的一种特殊形式的运动。运动物体的位移、速度、加速度以及应力、应变等物理量都是随时间往复变化的。

振动力学是研究机械振动的运动学和动力学的一门课程。

机械振动是一种常见的物理现象,如桥梁、机床的振动,单摆的摆动,飞机机翼的颤振,汽车运行时发动机和车体的振动等。一方面,机械振动对于大多数的机械设备和结构是有害的,它常常是造成机械设备和结构恶性破坏和失效的直接原因。例如,1949 年美国的 Tacoma Narrows 吊桥在中速风载下因卡门漩涡引起桥身扭转振动和上下振动而坍塌。1972 日本海南电厂的一台 66 万 kW 汽轮机组,在试车中因发生异常振动而全机毁坏,长达 51m 的主轴断裂飞散,联轴节及汽轮机叶片竟穿透厂房飞落至百米以外。我国因运输车辆振动使包装不妥的产品损失、失效和破坏造成的经济损失,一年达数十亿元。超出标准范围的振动,缩短机器设备的使用寿命,影响机械加工质量,降低机械和电子产品的使用性能,甚至造成环境污染和公共危害。另一方面,人们利用机械振动设计和制造了众多的机械设备和仪器仪表。例如振动筛、振动研磨机、振动输送机、振动打桩机、混凝土搅拌机以及测试传感器、钟表计时仪器、振子示波器等。随着机器设备向着大型、高速、高效和自动化等方面的发展,需要分析处理的振动问题越来越重要。因此掌握振动的基本理论,并正确地运用它,对于设计制造安全可靠和性能良好的机器、仪器仪表、建筑结构以及各种交通运输工具,并有效地抑制、防止振动带来的危害是十分必要的。

通常,研究对象被称为**系统**,它可以是一个零部件、一台机器或一个工程结构等。外界激励力等因素称为**激励**(或**输入**)。在激励作用下系统产生的振动称为**响应**(或**输出**)。这三者之间的关系可以用图 1 来表示:

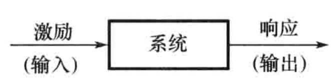


图 1

根据上面框图,振动问题可以归纳为三类。

(1) 已知激励和系统,求响应。这类问题称为**系统动力响应分析**。这是工程中最常见和最基本的问题,其主要任务是验算结构、产品等在工作时的动力响应(变形、位移、应力)是否满足预定的安全要求和其他要求。在产品设计阶段,对具体设计方案进行动力响应验算,若不满足要求再作修改,直到满足要求最终确定设计方案。这一过程称为**振动设计**。动力响应问题是振动的正问题,也是振动力学最主要的内容。

(2) 已知激励和响应,求系统。这类问题称为**系统识别**。所谓求系统,主要是指获得系统的物理参数(如质量、刚度和阻尼系数等)和系统关于振动的固有特性(固有频率和

主振型等)的确定。实际上处理这类问题时,待求的系统是现实存在的,由于种种原因,难以用分析的方法完善地建立其力学模型和确定其振动固有特性。这时就把实际存在的系统作为未被认识的“黑箱”或未被完全认识的“灰箱”,通过对它进行振动实验,记录输入输出数据并作数据处理,反过来求系统的相关参数和特性,以确定物理参数为任务测试的系统识别称为**物理参数识别**;以确定系统振动固有特性的系统识别称为**模态参数识别**或**实验模态分析**。系统识别是振动的第一种逆问题,振动力学是它的理论基础和依据。

(3) 已知系统和响应,求激励。这类问题称为**环境预测**。例如为了避免产品在公路运输中损坏,需要通过实地记录汽车振动或产品振动,以估算运输过程是怎样的一种激励,这样才能有根据地为产品设计可靠而有效的减振包装。由于这类物理环境大都是因时因地而异的,各次试验结果在表观上各不相同,所以环境预测问题除了以振动力学为理论基础外,一般还要利用随机过程和数理统计方面的知识。环境预测是振动的第二种逆问题。

为了便于研究振动现象的基本特征,需要将研究对象进行适当地简化和抽象,得到一种便于分析振动现象的力学模型。由此振动系统分为两大类:**连续系统**和**离散系统**。实际工程结构的物理参数,例如梁、轴、板壳等的质量及弹性,一般都是连续分布的,保持这种特点抽象出来的模型称为连续系统或**分布参数系统**。连续系统振动规律需要用时间和空间坐标来描述,建立的运动方程为偏微分方程。在许多情况下,为了便于振动分析,用适当的准则将分布参数“凝聚”成有限个离散的参数,便得到离散系统或**集中参数系统**。离散系统建立的运动方程是常微分方程。

由于所具有的自由度数目上的区别,连续系统又称为**无限自由度系统**,离散系统又称为**多自由度系统**,其中最简单的是**单自由度系统**。**自由度数**是指完全描述该系统所需要的独立坐标的数目。

典型的离散系统是由有限个惯性元件、弹性元件和阻尼元件组成,这类系统又称为**集中参数系统**。**惯性元件**是对系统惯性的抽象,可以是计及质量的质点,也可以是计及质量和转动惯量的刚体。**弹性元件**是对系统弹性的抽象,可以是不计质量的弹簧和扭转弹簧,也可以是不计质量但具有某种刚度(抗拉压刚度、抗弯刚度、抗扭刚度等)的杆、梁、轴、刚架等构件。**阻尼元件**是对系统阻尼因素或施加的阻尼器件的抽象,它既不具有惯性也不具有弹性,通常用阻尼器表示。阻尼元件是一种耗能元件,主要以热能形式消耗振动过程中的机械能。

机械振动按振动微分方程的形式可分为:

线性振动——描述其运动的方程是线性微分方程,相应的系统称为线性系统。线性系统的一个重要特性是线性叠加原理成立。

非线性系统——描述其运动的方程是非线性微分方程,相应的系统称为非线性系统。对于非线性系统,线性叠加原理不再成立。

振动按激励的有无和性质还可以分为:

固有振动——无激励时系统有可能的运动,固有振动不是现实的振动,它仅反映系统关于振动的固有属性。

自由振动——激励消失后系统所具有的振动。

强迫振动——系统在外界激励下所作的振动。

随机振动——系统在非确定性的随机激励下所作的振动。

自激振动——系统受到由其自身运动诱发出来的激励作用而产生和维持的振动。一般来说,这时系统包含有补充能量的能源。例如演奏提琴所发出的乐声,就是琴弦作自激振动所致。

参数振动——激励因素以系统本身的参数随时间变化的形式出现的振动。秋千在初始小摆角下越荡越高就是参数振动的一例。

本书主要介绍单自由度系统、多自由度系统和弹性体的自由振动和受迫振动的基本理论和分析方法,以及求解这类问题的近似数值方法及其在过程中的应用。

第 1 章　振动的基本理论

能够以函数关系表示的振动,按其运动的表现形式可以分为周期振动和非周期振动。本章首先介绍形式最简单也是最基本的一种周期振动——**简谐振动**的特点、表示方法以及简谐振动的合成,然后阐述周期振动和非周期振动的谐波分析,最后对 δ 函数与阶跃函数作简单介绍。

1.1 简谐振动

1.1.1 简谐振动及其表示

1. 用正弦函数表示简谐振动

简谐振动是周期振动中最简单的一种,它可以用时间 t 的正弦函数表示为

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1.1}$$

式中:A 为**振幅**;ω 为**圆频率**;φ 为**初相位**。

圆频率 ω 又称角频率,它与频率 f、周期 T 的关系为

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{1.2}$$

ω、f 及 T 的单位分别是弧度/秒(rad/s)、赫兹(Hz)及秒(s)。为了方便,以后也将 ω 称为频率。

由振幅、频率及初相位就可确定一个简谐振动。通常把振幅、频率和初相位称为简谐振动的三要素。式(1.1)的简谐振动的时间历程曲线如图 1.1 所示。

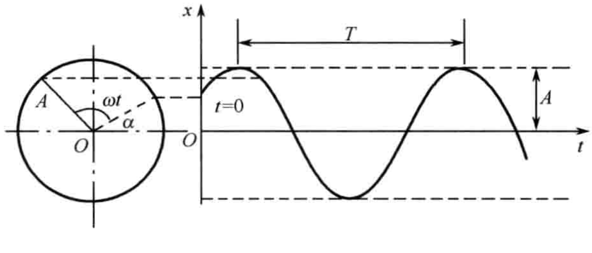


图 1.1

如果 x 为位移,式(1.1)对时间求导便得到速度及加速度为

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = A\omega\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.3}$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2\sin(\omega t + \varphi + \pi) \tag{1.4}$$

式(1.3)和式(1.4)表明,简谐运动的速度、加速度仍为简谐振动,且与位移具有相同的频率,而速度和加速度的相位分别超前位移$\frac{\pi}{2}$和 π。比较式(1.4)与式(1.1) 得知,加速度与位移有如下关系:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{1.5}$$

即加速度大小与位移成正比,但方向总与位移相反,始终指向平衡位置。这是简谐振动的重要特征。式(1.5)也可写成下列微分方程

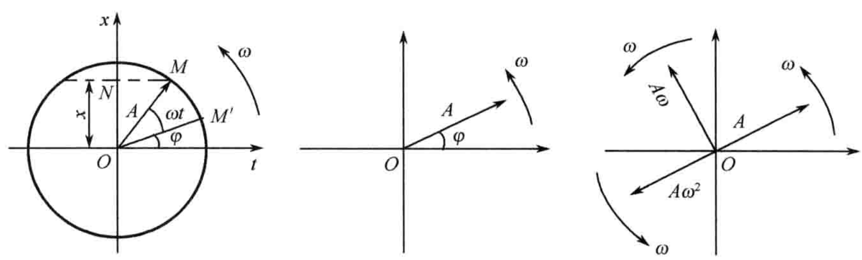
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1.6}$$

这个微分方程的解是圆频率为 ω 的正弦函数或余弦函数。

2. 用旋转矢量表示简谐振动

简谐振动可以用平面上的旋转矢量表示。图 1.2(a)中 OM 是一个长度为 A、从 φ 角开始以等角速度 ω 逆时针绕原点 O 旋转的矢量,任一瞬时 OM 在纵轴上的投影 ON 即式(1.1)中的简谐振动 $x = A\sin(\omega t+\varphi)$。由此可以看出,旋转矢量的模、旋转的角速度以及初始角度分别取为简谐振动的振幅、圆频率以及初相位,旋转矢量在纵轴上的投影即表示此简谐振动。

通过将简谐振动表示成旋转矢量(图 1.2(b)、(c)),便于同频率简谐振动的合成,同时可以直观形象地描述简谐振动的位移、速度及加速度之间的相位关系。



(a) (b) (c)

图 1.2

3. 用复数表示简谐振动

简谐振动也可以用复数表示,记 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$,复数

$$z = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t+\varphi) + \mathrm{j}A\sin(\omega t+\varphi) \tag{1.7}$$

表示了复平面上模为 A,从 φ 角开始以等角速度 ω 逆时针绕原点旋转的一个矢量,它在虚轴上的投影即虚部表示了式(1.1)的简谐振动。因此,位移与它的复数表示的关系可写为

$$x = \mathrm{Im}(z) \tag{1.8}$$

式中:$\mathrm{Im}(z)$为 z 的虚部。

复数表示的速度及加速度为

$$\dot{z} = \mathrm{j}\omega A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \omega A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)} = A\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{j}A\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{1.9}$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 A e^{j(\omega t+\varphi)} = \omega^2 A e^{j(\omega t+\varphi+\pi)} = A\cos(\omega t+\varphi+\pi) + jA\sin(\omega t+\varphi+\pi) \tag{1.10}$$

比较上面两式与式(1.3)、式(1.4),得到

$$\dot{x} = \mathrm{Im}(\dot{z}) \tag{1.11}$$

$$\ddot{x} = \mathrm{Im}(\ddot{z}) \tag{1.12}$$

式(1.7)也可以写成

$$z = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega t} = \bar{A}e^{j\omega t} \tag{1.13}$$

式中:$\bar{A} = Ae^{j\varphi}$为复振幅,包括振幅和初相位两个信息。简谐振动的复数表示方法将给振动微分方程的求解带来很多方便。

1.1.2 简谐振动的合成

1. 同频率简谐振动的合成

设两个同频率的简谐振动分别为

$$x_1 = A_1\sin(\omega t+\varphi_1), \quad x_2 = A_2\sin(\omega t+\varphi_2)$$

这两个简谐振动对应的旋转矢量分别为 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$。由于 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 的角速度相同,旋转时它们之间的夹角保持不变,它们的合成矢量也以相同的角速度做匀速转动,如图 1.3 所示。

由矢量投影定理可知,合成矢量在纵轴上的投影等于其分量在同一轴投影的代数和,即

$$\begin{aligned} x &= A_1\sin(\omega t+\varphi_1) + A_2\sin(\omega t+\varphi_2) \\ &= A\sin(\omega t+\varphi) \end{aligned} \tag{1.14}$$

其中

$$A = \sqrt{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)^2 + (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)^2}$$

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \tag{1.15}$$

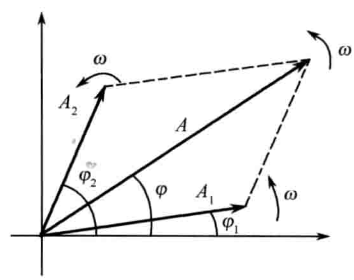


图 1.3

式(1.14)表明,两个同频率的简谐振动的合成振动为与原振动频率相同的简谐振动。

2. 不同频率简谐振动的合成

设两个不同频率的简谐振动分别为

$$x_1 = A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1), \quad x_2 = A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

若 ω_1 和 ω_2 之比为有理数,即

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

其中,m、n 是互质整数。上式可写为

$$m\frac{2\pi}{\omega_1} = n\frac{2\pi}{\omega_2}$$

其中$\frac{2\pi}{\omega_1}$和$\frac{2\pi}{\omega_2}$分别是两个简谐振动的周期 T_1 和 T_2，取

$$T = mT_1 = nT_2$$

并且记 $x = x_1 + x_2$，则

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x_1(t+T) + x_2(t+T) = x_1(t+mT_1) + x_2(t+nT_2) \\ &= x_1(t) + x_2(t) = x(t) \end{aligned}$$

可见 T 就是 x_1 和 x_2 合成振动 x 的周期。上式表明，当频率比为有理数时，合成振动不再是简谐振动，而是以两个简谐振动周期的最小公倍数为周期的周期振动。

若 ω_1 和 ω_2 之比是无理数时，则找不到这样一个周期。因此其合成振动是非周期的。

若 $\omega_1 \approx \omega_2$，设两个频率接近的简谐振动分别为

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

合成振动为

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ &= \frac{A_1 + A_2}{2}[\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] + \frac{A_1 - A_2}{2}[\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] \end{aligned}$$

为简单起见，考虑振幅 A_1 和 A_2 相近的情况，则有$\frac{A_1 + A_2}{2} = A$，$\frac{A_1 - A_2}{2} \to 0$。

上式可以写为

$$\begin{aligned} x &= A[\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] \\ &= 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

令
$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1), \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$$

上式可表示为

$$x = 2A\cos\left(\varepsilon t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \tag{1.16}$$

式(1.16)中的正弦函数完成了几个循环以后，余弦函数才能完成一个循环。这是一个频率为 ω 的变幅振动，振幅在 $2A$ 与零之间缓慢地周期性变化。它的包络线由下式确定。

$$A(t) = 2A\cos\left(\varepsilon t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \tag{1.17}$$

这种特殊的振动现象称为“拍”，或者说“拍”是一个具有慢变振幅的振动，运动波形如图 1.4 所示。“拍”的现象在实验测量频率中是很有用的。