物理类
高等数学

下册

张国玳

南京航空学院数学教研室
1985.9.

目　　录

第九章　多元函数微分学

第七节　高阶偏导数

和一元函数的高阶导数一样，也可类似定义多元函数的高阶偏导数。

二元函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，一般仍为 x, y 的函数，如果它们对 x 或 y 的偏导数存在，就称为是函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数，依照对变量求导的次序不同，有下列四个二阶偏导数。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = f''_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$$

其中第二、三两个偏导数称为混合偏导数，同样可定义二阶以上的偏导数及更多元函数的高阶偏导数。

例 1：　$z = e^x \cos y$　则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y \quad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y \quad , \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -e^x \sin y$$

这里 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 不是偶然的，有下列定理。

定理　若函数 $z = f(x, y)$ 在域D内有连续的二阶偏导数 $f''_{xy}(x, y)$，$f''_{yx}(x, y)$ 则在D内任何一点这两个二阶偏导数必定相等。

证明　$\forall (x, y) \in D$

记　$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \varnothing(x, y)$

$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \psi(x, y)$

则　$\Delta_y \Delta_x z = \varnothing(x, y + \Delta y) - \varnothing(x, y)$

$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x, y)$

$\Delta_x \Delta_y z = \psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y)$

$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y)$

于是　$\Delta_x \Delta_y z = \Delta_y \Delta_x z$

由一元函数的微分中值定理知

$$\Delta_y \Delta_x z = \varnothing(x, y+\Delta y) - \varnothing(x, y) = \varnothing'_y(x, y+\theta_1 \Delta y)\Delta y$$

$$= [f'_y(x+\Delta x, y+\theta_1 \Delta y) - f'_y(x, y+\theta_1 \Delta y)]\Delta y$$

$$= f_{yx}(x+\theta_2 \Delta x, y+\theta_1 \Delta y)\Delta y \Delta x \qquad 0 < \begin{matrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{matrix} < 1$$

同理　$\Delta_x \Delta_y z = f''_{xy}(x+\theta_3 \Delta x, y+\theta_4 \Delta y)\Delta y \Delta x \qquad 0 < \begin{matrix}\theta_3 \\ \theta_4\end{matrix} < 1$

故 $\quad f''_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta y)=f''_{yx}(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta y)$

令 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$ 由 f''_{xy} 及 f''_{yx} 的连继性得

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$$

这个定理告知：二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关。若任意阶偏导数均连续，这一结论对任意阶偏导数均成立，否则，就可能是不成立的（视习题十七的题3）。

复合函数的高阶偏导数可逐次应用复合函数一阶偏导数的公式求得。

例2：求证 $u=\dfrac{1}{r}$，$(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

满足方程 $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

证明：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\dfrac{x}{r^3}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=-\frac{r^3-x\,3r^2\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^6}=\frac{-r^3+3rx^2}{r^6}$$

$$=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

由于函数u对自变量具有对称性因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\ ,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

因此 $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\dfrac{3}{r^3}+\dfrac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0$

这个方程叫做拉普拉斯方程，满足这个方程的函数称为调和函数，里 $u=\frac{1}{r}$ 就是一个调和函数。容易验证：

函数 $u=\varnothing(x-at)+\psi(x+at)$ 满足波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

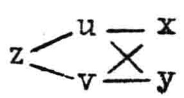
函数 $u=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ （$t>0$）满足热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

以上三个方程构成数字物理方程中的主要研究对象。

例3：$u=xy$，$v=\frac{x}{y}$ 以 u，v 为自变数改写方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

解：$z=f(u,v)$　$u=xy$，$v=\frac{x}{y}$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}y+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}y+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{y}\right)y+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}y+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y}$$

$$=(f''_{uu}y+f''_{vu}\frac{1}{y})y+(f''_{uv}y+f''_{vv}\frac{1}{y})\frac{1}{y}$$

$$=y^2f''_{uu}+2f''_{uv}+\frac{1}{y^2}f''_{vv}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_u x-f'_v\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial u}(f'_u x-f'_v\frac{x}{y^2})x+\frac{\partial}{\partial v}(f'_u x-f_v'\frac{x}{y^2})\frac{-x}{y^2}+f_v'\frac{2x}{y^3}$$

$$=f''_{uu}x^2-2f''_{uv}\frac{x^2}{y^2}+f''_{vv}\frac{x^2}{y^4}+f_v'\frac{2x}{y^3}$$

$$\therefore\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^2 f''_{uv}-\frac{2x}{y}f_v'=0$$

即 $2xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}=0$

令 $\frac{\partial z}{\partial v}=w$ 有 $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{1}{2u}w$

$\therefore\quad \ln w=\frac{1}{2}\ln u+\ln \varnothing_1(v)$

即 $w=\sqrt{u}\;\varnothing_1(v)$

由 $\frac{\partial z}{\partial v}=\varnothing_1(v)\sqrt{u}$ 积分得

$$z=\sqrt{u}\int\varnothing_1(v)dv+\psi(u)=\sqrt{u}\;\varnothing(v)+\psi(u)=\sqrt{xy}\;\varnothing(\frac{x}{y})+\psi(xy)$$

其中ψ $\varnothing$是二次可微的任意函数。

由方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

求解$z(x,y)$是不容易的，而由方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

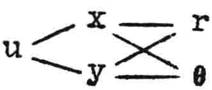
经过两次积分便得到解 $z=\sqrt{xy}\,\varnothing\left(\frac{x}{y}\right)+\psi(xy)$，作变换的目的就在于此．一般求解偏微分方程时，如果作适当的自变数变换，往往可使方程简化，从而便于求解，有时也使方程由直角坐标系变到其它坐标系中，使其便于讨论。

例4，写出极坐标系中的平面拉普拉斯方程

解：拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$



则 $$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \triangleq G$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial G}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial G}{\partial y}\sin\theta$$

$$=(u''_{xx}\cos\theta+u''_{yx}\sin\theta)\cos\theta+(u''_{xy}\cos\theta+u''_{yy}\sin\theta)\sin\theta$$

$$=u''_{xx}\cos^2\theta+2u''_{xy}\sin\theta\cos\theta+u''_{yy}\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta)\triangleq F$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{\partial F}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial F}{\partial y}(r\cos\theta)+\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

$$=[u''_{xx}(-r\sin\theta)+u''_{xy}(r\cos\theta)](-r\sin\theta)$$

$$+[u''_{xy}(-r\sin\theta)+u''_{yy}(r\cos\theta)](r\cos\theta)$$

$$+\left(-r u_x' \cos\theta - r u_y' \sin\theta\right)$$

$$= u_{xx}'' r^2 \sin^2\theta - 2u_{xy}'' r^2 \sin\theta\cos\theta + u_{yy}'' r^2\cos^2\theta$$

$$- r(u_x'\cos\theta + u_y'\sin\theta)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}'' + u_{rr}'' + \frac{1}{r}u_r' = u_{xx}'' + u_{yy}'' = 0$$

∴ 极坐标系中的平面拉普拉斯方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

不难得到极坐标系中三维拉普拉斯方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

下面我们推导球坐标系中的三维拉普拉斯方程的表达式

令
$$\begin{cases} x = r\sin\varnothing\cos\theta \\ y = r\sin\varnothing\sin\theta \\ z = r\cos\varnothing \end{cases}$$

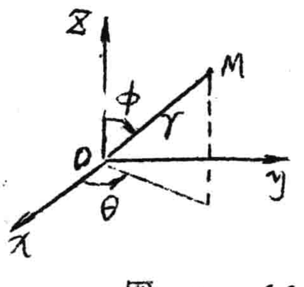


图 9—11

将其视为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad (\mathrm{I}) \quad 及 \begin{cases} z = r\cos\varnothing \\ \rho = r\sin\varnothing \quad (\mathrm{II}) \\ \theta = \theta \end{cases}$$

的复合。则由上面的讨论知，拉普拉斯方程经变换(I)化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

再由交换 （Ⅱ）知：

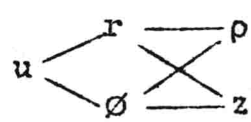
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varnothing^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial \varnothing}\frac{\partial \varnothing}{\partial \rho}$$

$$r=\sqrt{\rho^2+z^2}$$

$$\varnothing=\operatorname{arc\,tg}\frac{\rho}{z}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}+\frac{\partial u}{\partial \varnothing}\frac{1}{1+\left(\frac{\rho}{z}\right)^2}\frac{1}{z}$$



$$=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varnothing+\frac{\partial u}{\partial \varnothing}\frac{\cos\varnothing}{r}$$

综上得球坐标系中的三维拉普拉斯方程为

$$u''_{rr}+\frac{2}{r}u'_{r}+\frac{1}{r^2}u''_{\varnothing\varnothing}+\frac{\cos\varnothing}{r^2\sin\varnothing}u'_{\varnothing}+\frac{1}{r^2\sin^2\varnothing}u''_{\theta\theta}$$

$$=0$$

第八节　二元函数的台劳公式

我们希望用多项式去逼近一个已给的函数，这是因为用简单函数去表示复函数便于从理论上研究复杂函数的性质，同时也易于计算出函数的近似值。微分的意义就是在一点附近用一次多项式去逼近一个给定的函数，这在实际上往往是不够用的，这里我们把一次逼近加以推广，讨论用高次多项式去逼近函数，在一元函数台劳公式的基础上介绍二元函数的台劳公式。所论结果可推广到n元函数。

定理： 设函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某区域D上有直到

$n+1$ 阶连续偏导数，$P(x_0+h,\ y_0+k)$ 为D内任一点。则

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$$

$$(0<\theta<1) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

其中

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)=\sum_{r=0}^{m} C_m^r h^{m-r} k^r \frac{\partial^m f(x_0,y_0)}{\partial x^{m-r}\partial y^r}$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots\ n+1)$$

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m$ 在形式上是二项展开式

公式(1)称为二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的n阶带拉格朗日型余项的台劳公式。

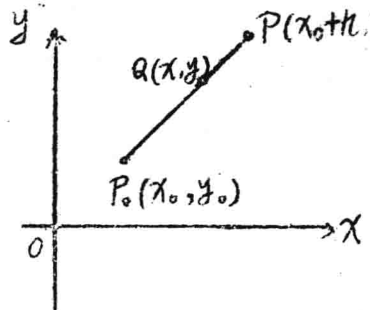


图9－12

证明。固定 $r(x_0+h,\ y_0+k)$ 作直线 $\overline{P_0P}$。

$$\begin{cases} x=x_0+th \\ y=y_0+tk \end{cases} \qquad (0\leq t\leq 1)$$

当仅限于于 $\overline{PP_0}$ 上来考虑二元函数时，二元函数便成为关于t的一元函数：

$$f(x,y)=f(x_0+th,\ y_0+tk)\triangleq F(t)\qquad(0\leq t\leq 1)$$

显然 $F(0)=f(x_0,\ y_0)$, $F(1)=f(x_0+h,\ y_0+k)$

由条件知一元函数 $F(t)$ 在 $[0,\ 1]$ 上有直到 $n+1$ 阶连续导数。因此利用一元函数马克劳林公式得。

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}t^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)\quad\cdots\cdots\quad(2)$$

由于 $\dfrac{dF(t)}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial x}h+\dfrac{\partial f}{\partial y}k\triangleq\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+th,y_0+tk)$

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)'_x h+\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)'_y k$$

$$=f''_{xx}h^2+2f''_{xy}kh+f''_{yy}k^2$$

$$\triangleq\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+th,\ y_0+tk)$$

用数字归纳法可证

$$\frac{d^nF(t)}{dt^n}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0+th,\ y_0+tk)$$

$$\therefore\quad F^{(m)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,\ y_0)\qquad(m=1,2,\cdots,n)$$

于是 $$F^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$$

将这些结果代入(2)式就得到二元函数的台劳公式(1)。

以(1)式右边 h 及 k 的 n 次多项式去表示函数 $f(x_0+h,\ y_0+k)$ 时

其误差为：

$$|R_n|=\left|\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)\right|$$

由于函数在D上有直到n+1阶连续偏导数。因此若在区域D内函数的n+1阶偏导数有界。设界为M。记$\rho=\sqrt{h^2+k^2}$ 于是有下面的误差估计式：

$\cos\alpha=\frac{h}{\rho}$
$\sin\alpha=\frac{k}{\rho}$

$$|R_n|\leq\frac{M}{(n+1)!}(|h|+|k|)^{n+1}$$

$(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1+\sin 2\alpha\leq 2$
即 $|\cos\alpha|+|\sin\alpha|\leq\sqrt{2}$

$$=\frac{M}{(n+1)!}\rho^{n+1}(|\cos\alpha|+|\sin\alpha|)^{n+1}$$

$$\leq\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(n+1)!}M\rho^{n+1}\tag{3}$$

于是有： $R_n=o(\rho^n)\quad(\rho\to 0)$ (4)

这就是二元函数台劳公式的皮阿诺余项。当h, k 都很小时。我们可以用h与k的n 次多项式去近似代替一般函数。由此产生的误差是当$\rho\to 0$时比ρ^n高阶的无穷小。

当$n=0$时。公式(1)成为

$$f(x_0+h,\ y_0+k)$$

二元拉格朗日中值公式

$$=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$$

$$(0<\theta<1)\tag{5}$$

这就是二元函数的拉格朗日中值公式。由此可推得下述结论：

若在D上 $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$ 则函数$f(x,y)$。在D上为一常数

当$n=1$时，带皮阿诺余项的台劳公式为

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+o(\rho^2)$$

$$(\rho\to 0) \qquad (6)$$

实际应用时常用展开到二次的台劳公式。

例 1，当 $|x|$ $|y|$ $|z|$ 都很小时，写出

$$f(x,y,z)=\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$$

的二次近似表达式。

解： $$f(x,y,z)\approx f(0,0,0)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0,0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(0,0,0)$$

这里： $f(0,0,0)=0$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(0,0,0)}=\left[-\sin(x+y+z)+\cos x\cos y\sin z\right]_{(0,0,0)}=0$$

由对称性知 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0,0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}=0$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{(0,0,0)}=\left[-\cos(x+y+z)+\cos x\cos y\cos z\right]_{(0,0,0)}=0$$

由对称性知 $f''_{xx}(0,0,0)=f''_{yy}(0,0,0)=0$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right|_{(0,0,0)}=\left[-\cos(x+y+z)+\sin x\cos y\sin z\right]_{(0,0,0)}=-1$$

由对称性知 $f''_{xy}(0,0,0)=f''_{yz}(0,0,0)=-1$

于是 $\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z\approx-(xy+yz+zx)$

例2，用二元函数的二阶台劳公式求 $0.97^{1.05}$ 的近似值

解：在公式

$$f(x_0+h,\ y_0+k)$$

$$\approx f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$$

中取 $f(x\ y)=x^y$，$x_0=1$，$y_0=1$，$h=-0.03$，$k=0.05$

则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\left.yx^{y-1}\right|_{(1,1)}=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.x^y\ln x\right|_{(1,1)}=0$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=\left.y(y-1)x^{y-2}\right|_{(1,1)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,1)}=\left.x^y(\ln x)^2\right|_{(1,1)}=0$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x)\right|_{(1,1)}=1$$

于是

$$(0.97)^{1.05}\approx 1+(-0.0\cancel{0}3)\times1+\frac{1}{2!}\times2\times(-0.0\cancel{0}3)\times(0.0\cancel{0}5)\times1$$

$$=0.9685$$

第九节 隐函数存在定理与隐函数微分法

§9·1 一个方程的情形

我们知道方程 $F(x,y)=0$ 并不总能定义 y 是 x 的函数，那么函数 $F(x,y)$ 满足什么条件，方程 $F(x,y)=0$ 才能唯一地确定 y 是 x 的函数呢？

定理 1：（隐函数存在定理） 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域 D 上有连续的偏导数且

$$F(x_0,y_0)=0; \quad F_y'(x_0,y_0)\neq 0$$

则 $\delta>0$，在邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 内方程 $F(x,y)=0$ 能确定唯一的具有连续导数的隐函数 $y=f(x)$ 满足：

$$y_0=f(x_0); \quad F(x,f(x))=0 \quad x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

证略，但读者不难从 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的一阶台劳展式中看出定理的条件都是很自然的。对于多个自变量的隐函数也有类似的定理如

定理 1'：设函数 $F(x\ y\ z)$ 在点 $P_0(x_0\ y_0\ z_0)$ 的邻域 D 上有连续偏导数且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则 $\exists\delta>0$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域 $B(P_0,\delta)$ 内方程 $F(x,y,z)=0$ 能确定唯一的具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$ 满足：

$$z_0=f(x_0,y_0) \quad F(x,y,f(x,y))\equiv 0 \quad (x,y)\in B(P_0,\delta)$$

有了上述定理，就可利用复合函数微分法在不解出隐函数的显式时求出其导数或偏导数，方法如下：

设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$

则 $F(x,y,z(x,y))\equiv 0$

上述恒等式两边对 x，y 求偏导，有：