普通高等教育“十二五”规划教材

微积分及其应用

CALCULUS AND ITS APPLICATION

上册

李秀珍　主编

免费电子课件

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

微积分及其应用

上　册

主　编　李秀珍
副主编　王凤英　葛　倩
主　审　王继忠

机械工业出版社

本书根据教育部最新颁布的高等学校经济管理类本科生数学基础课程教学基本要求及研究生入学考试数学考试大纲编写而成．全书分为上、下两册，本书为上册，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等内容，书末还附有函数的参数表示与极坐标表示、几种常用的曲线、积分表和习题答案与提示．

本书结构严谨，叙述条理清晰，着重微积分在经济管理方面的应用，注重计算机对教学的辅助作用，并在第一至三、五章后配有“数学实验”，可供高等学校经济管理及相关专业本科教学使用．

图书在版编目（CIP）数据

微积分及其应用．上册/李秀珍主编．—北京：机械工业出版社，2014.3

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978－7－111－45388－8

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①微积分－高等学校－教材

Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 004863 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　李　乐

版式设计：霍永明　责任校对：任秀丽

封面设计：张　静　责任印制：刘　岚

北京京丰印刷厂印刷

2014 年 4 月第 1 版·第 1 次印刷

169mm×239mm·16.5 印张·338 千字

标准书号：ISBN 978－7－111－45388－8

定价：29.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http：//www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http：//www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http：//weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

本书是根据教育部最新颁布的高等学校经济管理类本科生数学基础课程教学基本要求及研究生入学考试数学考试大纲，按照经济管理类专业人才的培养目标要求，结合教学改革与发展实际，在认真分析、总结、吸收高等院校经济管理类微积分课程教学改革经验的基础上，为高等学校经济管理类本科生编写的，适合经济管理及相关专业本科教学选用．本书有以下几个特点：

1. 保持经典教材的优点，注重突出微积分的基本思想，并把多年来的教学经验、教学成果与教材相融合；优化内容结构，适当降低理论深度，减少对解题技巧的训练，使教材更符合学生的认知规律．

2. 从实际问题出发，引入微积分的一些基本概念和理论，将微积分和经济学的有关内容有机结合；应用实例的选取做到了“直观化”“生活化”“科学化”；融入了数学建模的思想，既突出了微积分的基本思想，又强化了理论知识的应用．

3. 将数学实验的内容融入教材中，通过实验模拟减少理论的抽象性，增强数值计算、理论应用的趣味性．

4. 本书配套的学生用全程学习指导内容丰富，每章包括预习导引、知识梳理、释疑解难、典型题精讲、教材习题选解和自测题六部分，实现了对教材的导读导学、答疑解惑、归纳整理及知识的拓延提升．

本书由李秀珍教授组织编写和统稿．第一、二章由李秀珍编写，第三章由隋梅真编写，第四章由侯淑轩编写，第五章由王凤英编写，各章的实验部分由葛倩编写，第一、二章习题由綦路提供．王继忠教授不辞辛劳地完成了本书的审稿工作，并提出了许多建设性的建议，在此向他表示衷心的感谢！

本书的编写参阅了许多专家、学者的教材论著及文献，并引用了部分论著中的例子，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢！

书中难免有不妥之处，恳请读者给予批评指正．

编　者

目　录

第一章　函数与极限

函数是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，是微积分的研究对象．极限是通过有限的不变量研究无限的变量的方法，是研究微积分的基本工具．本章将介绍映射、函数、极限和连续等基本概念及其性质．

第一节　映射与函数

在这一节中，我们将在中学已有知识的基础上，进一步阐述函数的概念和性质，总结中学已学过的函数，并介绍经济学中一些常用的函数．

一、集合

1. 集合的概念

在中学阶段，我们已经学习了集合的概念，所谓**集合**，就是具有某种特定性质的事物的总体．组成这个集合的事物称为该集合的**元素**．通常用大写英文字母 A，B，C，…表示集合，用小写英文字母 a，b，c，…表示集合中的元素．

若 x 是集合 A 中的元素，则称 x 属于 A，记作 $x \in A$；若 x 不是集合 A 中的元素，则称 x 不属于 A，记作 $x \notin A$．

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$；由有限个元素组成的集合称为**有限集**；由无限个元素组成的集合称为**无限集**．例如：

（1）由方程 $x^2+4=0$ 的实根组成的集合(空集)；

（2）2013 年全国参加高考的学生组成的集合(有限集)；

（3）方程 $x^2+6x+5=0$ 的根组成的集合(有限集)；

（4）自然数的集合(无限集)；

（5）到一个定点的距离等于定长的点的集合(无限集)．

从上面的例子可见，我们可以用语言描述一个集合．除此之外，集合常用以下两种方法表示：一种是列举法，把集合中的元素一一列举出来．例如，由元素 a_1，a_2，…，a_n 组成的集合 A，可表示为

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}.$$

另一种是描述法，用集合中元素所具有的共同特性来描述，可表示为

$$A=\{x \mid x\text{具有的特性}\}.$$

例如，由单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点组成的集合 B，可表示为

$$B=\{(x,\ y) \mid x^2+y^2=1\}.$$

元素是数的集合称为**数集**，常用的数集有：自然数集 $\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{N}_+$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$，以及由全体实数组成的集合记为 $\mathbf{R}$ 和由全体正实数组成的集合记为 $\mathbf{R}_+$.

如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合 A 是集合 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$. 例如：

设 $A=\{-1, 1\}$，$B=\{x \mid x^2-1=0\}$，则 $A=B$.

如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，则称集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$. 例如，设 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，则 $A\subseteq B$，但 $4\in B$，且 $4\notin A$，所以 A 是 B 的真子集.

规定空集是任何集合 A 的子集.

2. 集合的运算

集合有三种基本运算：并、交、差.

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

由属于集合 A 且不属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的**差集**，记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

在研究问题时，我们经常需要确定研究对象的范围. 如果一个集合含有我们研究问题中涉及的所有元素，则称这个集合为全集，记作 U. 称 $U\setminus A$ 为集合 A 的**余集或补集**，记作 $\complement_U A$.

例如，设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x\leqslant 1\}$，则 A 的余集是 $\complement_{\mathbf{R}} A=\{x \mid x>1\}$.

3. 区间和邻域

在以后的学习中，区间是一类常用的实数集. 设 a，b 是实数，且 $a<b$，集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 叫做**开区间**，记作 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$；集合 $[a, b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**；集合 $[a, b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$，$(a, b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 称为**半开半闭区间**. 以上区间中的数 a，b 称为它们的**端点**，两个端点之差 $b-a$ 称为区间的**长度**. 从数轴上看，这些区间长度都可以用有限的线段来表示（图 1-1a、b），因此称它们为有限区间. 除此之外还有无限区间，引进记号 $+\infty$（读作"正无穷大"）及 $-\infty$（读作"负无穷大"），则可类似地表示无限区间.

例如，$[a, +\infty)=\{x \mid a\leqslant x<+\infty\}$，$(-\infty, b)=\{x \mid -\infty<x<b\}$，

$(-\infty,\ +\infty)=\{x \mid x\in\mathbf{R}\}$等(图 1-1c、d).

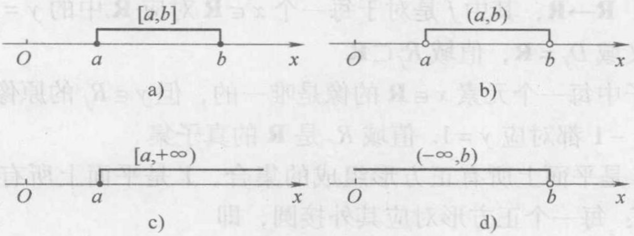

图 1-1

邻域也是常用的实数集. 集合$\{x \mid |x-a|<\delta,\ \delta>0\}$，称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\ \delta)$. 点 a 叫做**邻域的中心**，δ 叫做**邻域的半径**. 从数轴上看，它表示以 a 为中心、长度为 2δ 的开区间，如图 1-2a 所示. 如果把邻域的中心 a 去掉，集合$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作$\mathring{U}(a,\ \delta)$，如图 1-2b 所示.

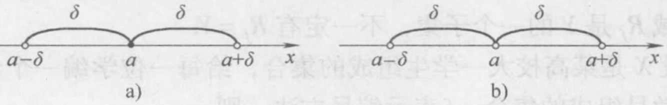

图 1-2

二、映射

1. 映射的概念

在高中阶段，学习了集合的概念后，我们对函数的概念有了进一步的认识，函数是建立在两个非空数集之间的单值对应. 其实生活中还有很多两个一般集合之间建立单值对应的例子. 例如，某校图书馆中所有书籍组成的集合 A 与所有书籍的编号组成的集合 B，对于 A 中任意元素 B 中都有唯一的元素与之对应；再如，某班学生组成的集合 A 与正实数集 B，让每一位学生与其身高对应，则一名学生有唯一正实数与之对应；等等，这种对应关系称之为映射.

定义 1 设 X，Y 是两个非空集合，如果存在一个对应法则 f，使得对于集合 X 中的任意元素 x，按照法则 f，在集合 Y 中有唯一的元素 y 与之对应，则称 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个**映射**，记作

$$f:\ X\to Y,$$

其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的**像**，记作 $f(x)$，即

$$y=f(x),$$

而 x 称为映射 f 下 y 的**原像**. 集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=X$. 而 X 中所有元素的像组成的集合

$$\{f(x) \mid x\in X\}$$

称为映射 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(X)$.

例 1　设 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，其中 f 是对于每一个 $x\in\mathbf{R}$ 对应 $\mathbf{R}$ 中的 $y=x^2$，显然 f 是一个映射，其定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f\subset\mathbf{R}$.

在这个例子中每一个元素 $x\in\mathbf{R}$ 的像是唯一的，但 $y\in R_f$ 的原像不唯一. 例如，元素 $x=1$，$x=-1$ 都对应 $y=1$. 值域 R_f 是 $\mathbf{R}$ 的真子集.

例 2　设 X 是平面上所有正方形组成的集合，Y 是平面上所有圆组成的集合，定义对应法则 f: 每一个正方形对应其外接圆，即

$$f: X\to Y,$$

显然 f 是一个映射，其定义域为 $D_f=X$，值域 $R_f=Y$.

由映射的定义及以上两个例子，需要注意以下几点：

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，限制值域的取值范围 $R_f\subseteq Y$；对应法则 f，使每一个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

(2) 映射 f 要求每一个元素 $x\in X$ 的像唯一，而对每一个 $y\in R_f$ 的原像不一定是唯一的；值域 R_f 是 Y 的一个子集，不一定有 $R_f=Y$.

例 3　设 X 是某高校大一学生组成的集合，给每一位学编一个学号，Y 是该校一年级学生学号组成的集合，f 表示编号方法，则

$$f: X\to Y$$

是一个映射，其定义域为 $D_f=X$，值域 $R_f=Y$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个映射，若 $R_f=Y$，则称 f 是一个**满射**；若对于 X 中任意两个不同的元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是**单射**；若 f 既是单射，又是满射，则称 f 为**一一映射**(或双射).

例 1 中的映射，既不是满射，也不是单射；例 2 中的映射是满射，但不是单射；例 3 中的映射，既是满射，又是单射，所以是一一映射.

2. 逆映射与复合映射

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个单射，则由单射的定义，对于任意 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$ 与 $y=f(x)$ 对应. 根据映射的定义，对应关系

$$g: R_f\to X$$

构成了 R_f 到 X 的一个映射，我们称这个映射为 f 的**逆映射**，记作 f^{-1}，其定义域为 $D_f^{-1}=R_f$，值域 $R_f^{-1}=X$.

显然，只要逆映射 f^{-1} 存在，它一定是 R_f 到 X 的一一映射.

例如，映射 f: $\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$，对于每一个 $x\in\mathbf{R}_+$，$f(x)=x^2$，显然 f 是单射，因此存在逆映射 f^{-1}，$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$，其定义域为 $D_f^{-1}=\mathbf{R}_+\subset\mathbf{R}$，值域 $R_f^{-1}=\mathbf{R}_+$，且 f^{-1} 是 $\mathbf{R}_+$ 到 $\mathbf{R}_+$ 的一一映射.

设有两个映射

$$g: X \to Y_1,\ f: Y_2 \to Z,$$

如果 $R_g \subset Y_2 = D_f$，对于每一个 $x \in X$，$g(x) \in R_g$，存在唯一的 $z \in Z$，使 $z = f(g(x))$，由定义 1，映射 g 和 f 构成一个从 X 到 Z 的新映射，这个映射称为映射 g 和 f 的**复合映射**，记作 $f \circ g$，即

$$f \circ g: X \to Z,$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),\ x \in X.$$

由上可知，映射 g 和 f 能否构成复合映射，关键是条件 $R_g \subset D_f$ 是否成立，如果这个条件不成立，就不能构成复合映射．

例 4　设集合 $Y = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$，映射 $g: [-1, 1] \to Y$，对于每一个 $x \in [-1, 1]$，$g(x) = \arcsin x$．映射 $f: \mathbf{R} \to [2, +\infty)$，对于每一个 $u \in \mathbf{R}$，$f(u) = 2 + u^2$．则映射 g 和 f 构成的复合映射 $f \circ g: [-1, 1] \to [2, +\infty)$，对于每一个 $x \in [-1, 1]$，

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 + (\arcsin x)^2.$$

但 $g \circ f$ 不能构成复合映射，因为 $R_f \not\subset D_g$．由此可见，映射 g 和 f 复合是有顺序的，$f \circ g$ 有意义，$g \circ f$ 不一定有意义，即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义，一般来说它们也是不同的．

三、函数

1. 函数的概念

定义 2　设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**函数**，简记为

$$y = f(x),\quad x \in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为函数的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f = D$．所有函数值 $f(x)$ 构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}.$$

在函数定义中记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而 $f(x)$ 表示 x 对应的函数值．通常函数是指对应法则 f，但习惯上用"$y = f(x)$，$x \in D$"表示函数，这时应理解为由它所确定的函数 f．另外，函数的自变量又称为"元"，只有一个自变量的函数称为一元函数．

从该定义可以看出，函数的值域被函数的定义域和对应法则完全确定，所以确定一个函数有两个要素：**定义域和对应法则**．函数的定义域表示使函数有意义的自变量的取值范围．在实际问题中，可根据变量的实际意义来确定．

函数的表示方法主要有三种：表格法、图形法和解析法(公式法)，其中图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$C = \{P(x, y) \mid y = f(x),\ x \in D_f\}$$

称为函数 $y = f(x)$，$x \in D_f$ 的图形(图 1-3)．图中的 R_f 表示函数 $y = f(x)$ 的值域．

下面列举几个常用函数的例子.

例 5　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=[0, +\infty)$，它的图形如图 1-4 所示.

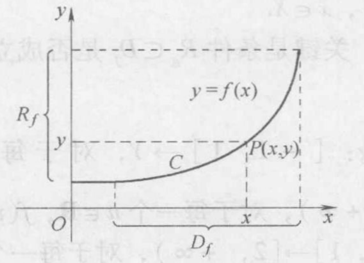

图　1-3

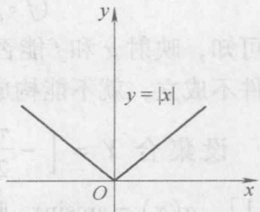

图　1-4

例 6　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=\{-1, 0, 1\}$，它的图形如图 1-5 所示.

例 7　取整函数

$$y=[x],$$

其中，$[x]$表示不超过 x 的最大整数．例如，$[-2.1]=-3$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$. 其定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$，它的图形如图 1-6 所示.

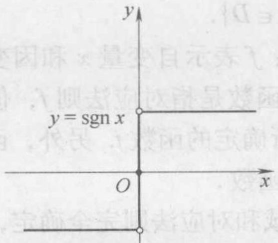

图　1-5

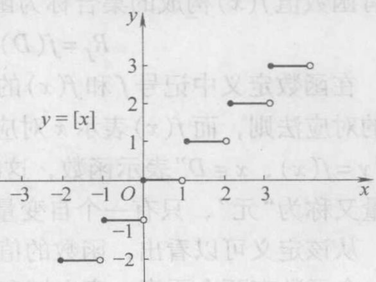

图　1-6

例 8　根据《中华人民共和国个人所得税法》(以下简称税法)规定：个体工商户的生产、经营所得和对企事业单位的承包经营、承租经营所得的税率见表 1-1：

表 1-1

级数	全月应纳税所得额(含税所得额)	税率(%)
一	不超过 15000 元的	5
二	超过 15000 元至 30000 元的部分	10
三	超过 30000 元至 60000 元的部分	20
四	超过 60000 元至 100000 元的部分	30
五	超过 100000 元的部分	35

其中，全月应纳税所得额 = 全月总收入 − 3500，试写出某个体户全月总收入 x 与应交纳税款 y 之间的函数关系，并指明定义域.

解　按税法规定当 $0\leqslant x\leqslant 3500$ 元时，不必缴税，这时税款额 $y=0$.

当 $3500<x\leqslant 18500$ 元时，纳税部分是 $x-3500$，应纳 5% 的税，税款额为

$$y=(x-3500)\frac{5}{100}=\frac{1}{20}(x-3500).$$

当 $18500<x\leqslant 33500$ 元时，其中 3500 元不纳税，15000 元应纳 5% 的税，即 $15000\times\frac{5}{100}=750$ 元，再多的部分，即 $x-18500$ 按 10% 纳税，此时税款额为

$$y=750+(x-18500)\frac{10}{100}=750+\frac{1}{10}(x-18500).$$

类似地，当 $33500<x\leqslant 63500$ 元时，税款额为

$$y=2250+\frac{1}{5}(x-33500).$$

当 $63500<x\leqslant 103500$ 元时，税款额为

$$y=8250+\frac{3}{10}(x-63500).$$

当 $x>103500$ 元时，税款额为

$$y=20250+\frac{7}{20}(x-103500).$$

于是所求函数关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 3500,\\ \dfrac{1}{20}(x-3500), & 3500<x\leqslant 18500,\\ 750+\dfrac{1}{10}(x-18500), & 18500<x\leqslant 33500,\\ 2250+\dfrac{1}{5}(x-33500), & 33500<x\leqslant 63500,\\ 8250+\dfrac{3}{10}(x-63500), & 63500<x\leqslant 103500,\\ 20250+\dfrac{7}{20}(x-103500), & x>103500.\end{cases}$$

其定义域为$[0, +\infty)$.

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

设函数$f(x)$的定义域为D，数集$X\subset D$. 如果存在正数M，使得对任一$x\in X$，不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

都成立，则称$f(x)$在X上**有界**. 如果这样的M不存在，就称$f(x)$在X上**无界**.

例如，函数$f(x)=\sin x$在$(-\infty, +\infty)$内，恒有

$$|\sin x|\leqslant 1,$$

故$f(x)=\sin x$在$(-\infty, +\infty)$内有界.

再如，函数$f(x)=|x|$在$(-\infty, +\infty)$内，对于任意的常数$M>0$，只要$|x|>M$，则有$|f(x)|>M$，所以$f(x)=|x|$在$(-\infty, +\infty)$内无界.

(2) 函数的单调性

设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$. 如果对于I上任意两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称$f(x)$在区间I上是**单调增加**的；如果对于I上任意两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称$f(x)$在区间I上是**单调减少**的.

例如，函数$y=x^3$在定义域$(-\infty, +\infty)$上单调增加(图1-7)；又如，函数$y=x^2$在区间$(-\infty, +\infty)$内不是单调函数(图1-8)，但在$(-\infty, 0]$上单调减少，在$[0, +\infty)$上单调增加.

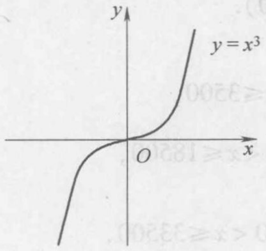

图 1-7

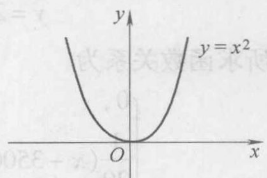

图 1-8

(3) 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称. 如果对于任一$x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称$f(x)$为**偶函数**. 如果对于任一$x\in D$，恒有