普通高等教育农业部“十二五”规划教材

全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学 上册

第二版

经济类

吕 雄◎主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材

全国高等农林院校“十二五”规划教材

第二版

上 册

高等数学

经济类

吕雄 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册／吕雄主编．—2版．—北京：
中国农业出版社，2013.8
普通高等教育农业部“十二五”规划教材 全国高等
农林院校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-109-17996-7

Ⅰ．①高… Ⅱ．①吕… Ⅲ．①高等数学-高等学校-
教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 150861 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100125）
策划编辑 朱 雷 魏明龙
文字编辑 朱 雷

北京中新伟业印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行
2009 年 7 月第 1 版 2013 年 8 月第 2 版
2013 年 8 月第 2 版北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16 印张：15
字数：260 千字
定价：29.00 元

内容提要

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材，是在第一版的基础上修订而成。分上、下两册出版，上册内容为：函数、极限与连续性、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用。每节后均配有适量习题，每章后配有总习题，以巩固所学内容。书末还附有积分表、习题答案与提示。

本教材体系完整、结构严谨、由浅入深、循序渐进、通俗易懂、紧密联系实际应用，特别是经济应用，可作为高等学校经济类专业、管理类专业和其他一些专业高等数学课程的适用教材或教学参考书，也可作为科技人员参考书。

编写人员名单

主　编　吕　雄

副主编　姚贵平　吴国荣

编　者（按姓名笔画排序）

白树叶　吕　雄　朱艳霞　杨丽英

吴国荣　姚贵平　高　莲　戴云仙

第二版前言

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材暨全国高等农林院校“十二五”规划教材。

本教材第一版是全国高等农林院校“十一五”规划教材，并于2011年11月获全国高等农业院校优秀教材奖。

随着高等农林院校人才培养方案的修订，经济类《高等数学》课程的教学大纲与教学计划有较大变化，课程性质从公共基础课(必修)调整为公共基础课(必修)+拓展课(选修)，公共基础课的教学时数减少幅度较大，教学内容及教学要求需作出相应的调整，同时也要兼顾课程的科学性、系统性，还要考虑学生考研的需求。本教材是在第一版的基础上，结合新教学大纲与教学计划进行适当删减或加“*”号修订而成，未加“*”号部分主要放在基础课讲授，加“*”号部分主要放在拓展课讲授。

参加本教材修订工作的仍为第一版编写团队。

由于编者水平有限，不足、疏漏、错谬之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编　者

2013年5月

第一版前言

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材。

本教材按照高等学校经济类专业高等数学课程的教学大纲（并参考考研大纲）编写而成。根据该课程的教学分上、下两个学期进行以及每个学期教学进度的安排情况，本教材分为上、下两册，上册包括函数与极限、一元微分学、一元积分学；下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、微分方程等知识。本教材各章节选编了较为丰富的习题，书末附有习题答案。为了更好地帮助学生学习，与本教材配套编写了学习指导书。

本教材可作为高等学校经济类专业、管理类专业和其他一些专业高等数学课程的适用教材或教学参考书。

编写过程中，在内容的安排上我们主要基于下述几点：

一、着力保持体系的完整性 编排结构严谨；内容由浅入深，循序渐进，通俗易懂；突出微积分的基本思想和方法。使学生能够较好地理解各章节的内在联系，从总体上把握数学的思想方法的同时，培养学生严密的逻辑思维能力。

二、力求简明实用 由于高等数学逻辑性强、内容抽象、概念与结论较多，因此在给出概念时尽量以简单实例或提出问题的方法引入，力求深入浅出、简单通俗；略去一些十分繁琐的理论证明，直接从现实世界的原理中加以解释说明，使表达简明扼要；引导学生理解概念的内涵及背景，培养学生用数学的思想和方法分析问题、解决问题的能力。

三、结合经济应用 紧密联系实际，尽可能运用各章节的理论与方法处理一些经济管理中的问题，为学生后继学习经济管理等方面的专业知识提供“契合点”。

参加本教材编写工作的是具有丰富教学经验的一线教师，其中第一章由杨丽英编写，第二章由吴国荣编写，第三章由戴云仙编写，第四章和第八章由朱艳霞编写，第五章由吕雄编写，第六章由白树叶编写，第七章由姚贵平编写，第九章和第十章由高莲编写。全书编写大纲及统稿由吕雄完成。

由于编者水平有限，不足、疏漏、错谬之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编 者

2009年3月

目 录

第 一 章

函数、极限与连续性

函数是高等数学研究的基本对象，极限是研究函数的一种重要工具．为了准确而深刻地理解函数的概念，本章首先简要地介绍函数的概念，在此基础上重点讨论极限的概念、运算、性质及函数的连续性．

§1.1 函　　数

一、邻域

邻域是常用的一类数集．以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这**邻域的中心**，δ 称为这**邻域的半径**(图 1－1).

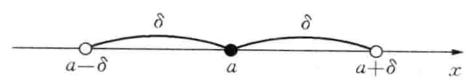

图 1－1

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a, \delta)$ 表示：与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体．

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x \neq a$.

为了方便，把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为 **a 的左 δ 邻域**，把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为 **a 的右 δ 邻域**．当不需要指出邻域的半径时，分别用 $U(a)$、$\mathring{U}(a)$ 表示 a 的某邻域和 a 的某去心邻域．

二、函数的概念

函数是客观世界中变量之间的一种依赖关系．

定义 1　设 D 是一个数集，若存在一个法则 f，使得对 D 中每个元素 x，按照法则 f，都有唯一确定的数值 y 与之对应，则称 y 是定义在数集 D 上 x 的函数，通常简记为

$$y=f(x),\ x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

函数定义中，对每个 $x\in D$，按对应法则 f，总有唯一确定的 y 值与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的**函数值**，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，通常称为**函数关系**．函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

通常函数是指对应法则 f，但习惯上用"$y=f(x)$，$x\in D$"表示函数，此时应理解为"由对应关系 $y=f(x)$ 所确定的函数 f"．

由映射的概念知，构成函数的两个要素是：定义域和对应法则．如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的．

关于函数的定义域，如果讨论的是有实际背景的函数，应根据实际背景中变量的实际意义确定．如果讨论的是用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域．

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为**单值函数**．如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，我们称这种法则确定了一个**多值函数**．

表示函数的主要方法有三种：**表格法、图形法、解析法(公式法)**. 在理论研究中，所遇到的函数多数由公式法给出．例如，初等数学中所学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数都是用公式法表示的函数．

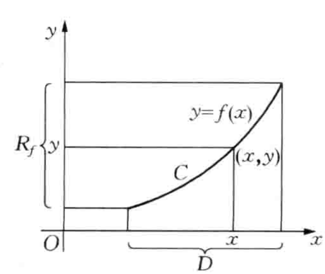

图 1－2

在平面直角坐标系中，点集

$$\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的**图形**(图 1－2). 图

中的 R_f 表示函数 $y=f(x)$ 的值域．

下面举几个函数的例子．

例 1　函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为**绝对值函数**，它的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=[0, +\infty)$，它的图形如图 1-3 所示．

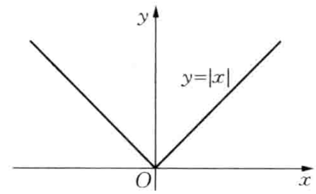

图 1-3

例 2　函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，它的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=\{-1, 0, 1\}$，它的图形如图 1-4 所示．

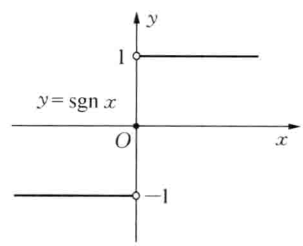

图 1-4

例 3　函数 $y=[x]$ 称为**取整函数**，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．它的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$，它的图形如图 1-5 所示．例如，$[-2.5]=-3$，$[\pi]=3$，$[\sqrt{2}]=1$，$[-1]=-1$.

从例 1 和例 2 中看到，有时一个函数要用几个式子表示．这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为**分段函数**．

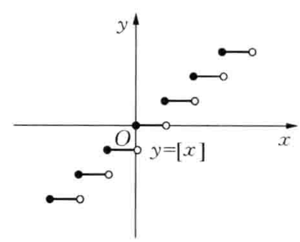

图 1-5

例 4　设函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x^2+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$，并作出函数 $y=f(x)$ 的图形．

解　这是一个分段函数，它的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，当 $x\in(-\infty, 0)$ 时，对应的函数值 $f(x)=x-1$；当 $x\in[0, +\infty)$ 时，对应的函数值 $f(x)=x^2+1$，于是

$$f(-1)=(-1)-1=-2,$$

$$f(0)=0^2+1=1,\ f(2)=2^2+1=5.$$

这个函数的图形如图 1 - 6 所示.

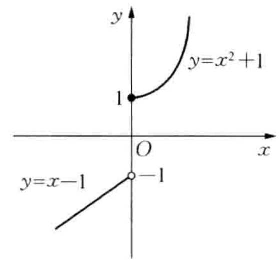

图 1 - 6

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$. 如果存在数 A，使得

$$f(x) \geqslant A$$

对任一 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有下界**，而 A 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**.

如果存在数 B，使得

$$f(x) \leqslant B$$

对任一 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有上界**，而 B 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**.

如果存在正数 M，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对任一 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**；如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

显然，有界函数必有上界和下界；反之，既有上界又有下界的函数必是有界函数. 即函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

有界函数的几何意义：设 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界，即存在 $M>0$，使得对任意 $x \in (a, b)$，有 $|f(x)| \leqslant M$，即 $-M \leqslant f(x) \leqslant M$. 注意到 $f(x)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的图形上点 $(x, f(x))$ 的纵坐标，因此，$y=f(x)$ 在 (a, b) 内有界，在几何上表示 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内的图形夹在两条平行于 x 轴的直线 $y=\pm M$ 之间，反之亦然.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

由定义易知，单调增加函数的图形沿 x 轴正向是逐渐上升的(图 1 - 7)，

单调减少函数的图形沿 x 轴正向是逐渐下降的(图 1－8).

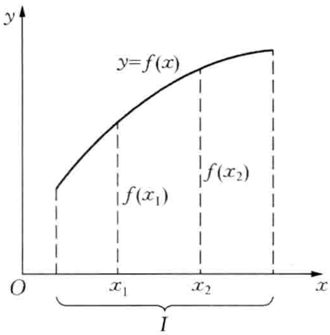

图 1－7

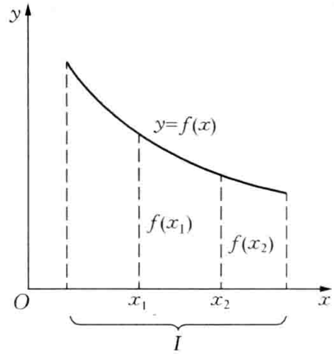

图 1－8

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的；在区间$(-\infty,+\infty)$内函数$f(x)=x^2$ 不是单调的(图 1－9). 而函数$f(x)=x^3$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的(图 1－10).

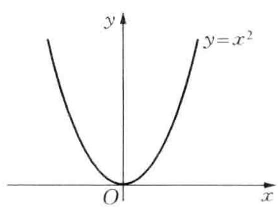

图 1－9

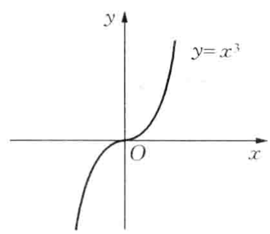

图 1－10

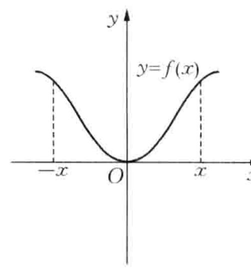

图 1－11

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x\in D$,

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$为**偶函数**. 如果对于任一 $x\in D$,

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的(图 1－11). 奇函数的图形关于原点是对称的(图 1－12).

例如，$f(x)=x^2$，$f(x)=\cos x$ 都是偶函数，$f(x)=x^3$，$f(x)=\sin x$ 都是奇函数. 而 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数. $y=C$(C 为非