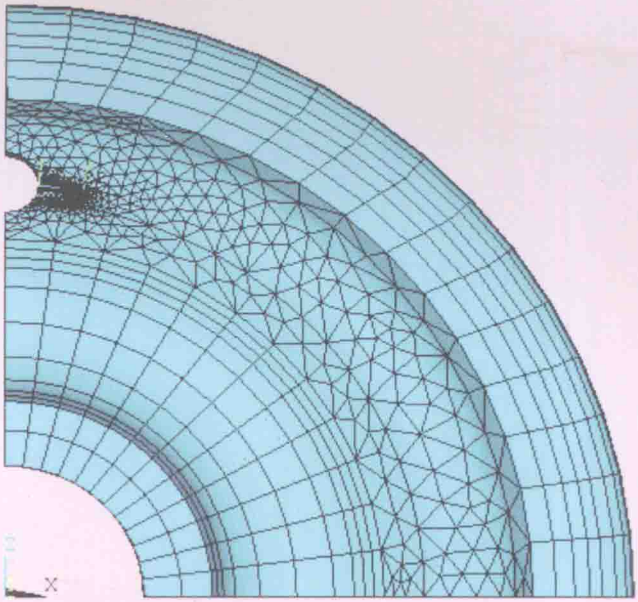
科学版研究生精品教材

计算固体力学

Computational Solid Mechanics

黄海明 郭 然 编著



科 学 出 版 社

计算固体力学

Computational Solid Mechanics

黄海明　郭　然　编著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书介绍加权余量法、有限元法、边界元法、无网格法和离散元法，特别对有限元法做了详尽的阐述，包括线性、材料非线性、几何非线性、动力学问题和热分析问题等内容。全书共11章，第1章介绍加权余量法，第2～8章介绍有限元法，第9章介绍边界元法，第10章介绍无网格法，第11章介绍离散元法。全书内容取材广泛、层次分明、概念清晰、适用性强。

本书可作为高等院校理工科专业本科生和研究生的教材，也可供从事力学及其他领域与计算相关专业的研究人员、教师和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算固体力学＝Computational Solid Mechanics/黄海明，郭然编著．—北京：科学出版社，2014

ISBN 978-7-03-041960-6

Ⅰ.①计… Ⅱ.①黄…②郭… Ⅲ.①计算固体力学 Ⅳ.①O34

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第221483号

责任编辑：牛宇锋 唐保军／责任校对：郭瑞芝

责任印制：肖 兴／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年10月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2014年10月第一次印刷 印张：12 3/4

字数：257 000

定价：80.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

计算固体力学以固体力学和应用数学为基础，以计算机为工具，用数值方法解决各种工程和科学中的复杂问题。在计算机仿真高度发展的今天，成熟的数值方法已通过大型软件成功应用于工程实际中。同时，新的数值计算方法还不断涌现。随着力学计算能力的提高，用力学理论解决设计问题成为主要途径，而试验手段成为次要途径；力学加电子计算机将成为工程设计的主要手段。

为了适应人才培养的需要，拓宽基础，扩大知识面，增强学生的适应能力，作者基于十年来的教学与科研工作，针对近代计算技术和计算方法的迅猛发展，注重于一系列基本概念、思路、数学手段和技巧，以及有关重要的力学基本原理，并参考吸收了近年来一些计算固体力学教材的优点，编写了本书。在编写过程中，尽量保证内容的系统性，又避免脱节和不必要的重复。本书介绍加权余量法、有限元法、边界元法、无网格法和离散元法，特别对有限元法做了详尽的阐述，包括线性、材料非线性、几何非线性、动力学问题和热分析问题等内容。

鉴于现代计算方法已成功推广到其他领域，本书可作为所有理工科专业本科生和研究生的教材。对从事力学及其他领域与计算相关专业的研究人员、教师和工程技术人员，本书也有一定的参考价值。

在编写本书过程中，黄国、李玮洁等 11 位研究生参与了部分录入与校对工作。

清华大学王天舒教授、张雄教授审阅了本书，提出了宝贵修改意见；作者的博士生导师杜善义院士、硕士生导师赵经文教授在科研与教学方面给予了长期的指导；国家自然科学基金项目(11272042)与北京交通大学土木建筑工程学院资助了本书的出版，谨此一并致谢。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏和不妥之处，热忱欢迎读者批评指正。

作　者

2014 年暑假

目　　录

绪　　论

固体力学主要研究在各种外界因素作用下可变形体内部各点所产生的位移、应力、应变以及破坏等的规律;假设研究对象中的位移、应变、应力等为空间或时间的连续函数,借助于数学方法将其研究问题转化成相应的偏微分方程边值问题或初边值问题。用微分方程来描述工程技术问题是科学的一大成果,其求解一直贯穿于固体力学的发展阶段。

固体力学遇到的数理模型是复杂多样的,其计算方法已经历了三个发展时期:解析方法、古典数值方法和现代数值方法。

在固体力学发展初期,科学家针对基本方程和边界条件的定解问题提出了许多解析方法,如应力函数法、试凑法(反逆和半逆法)及复变函数法等,这些方法所解决的主要是一些简单的弹性力学问题、稳定问题及后来出现得极少的塑性力学问题。除了少数简单固体力学问题外,解析方法是不可行的。随着固体力学自身的发展及实际工程问题的出现,许多复杂的问题求解开始逐渐引入近似的求解方法。

与传统解析方法对数学的完美要求相比,近似解法更注重在工程问题中的实用性。古典数值方法在数学形式上就是利用近似解代替精确解,近似解不一定严格满足基本方程或边界条件,即放松了对解的限制。历史上最早采用的数值方法是有限差分法,从微分方程出发,将连续的定解区域用有限个离散点构成的网格来代替,用泰勒展开式将原方程和定解条件中的微商用不同时间或空间点差商来近似,把原微分方程和边界条件的求解转变为求解一个线性代数方程组,从而得到原问题在离散点上的近似解,再利用插值方法便可以得到整个区域上的近似解。另一种近似方法是基于等效积分的数值方法。例如,瑞士科学家里兹于 1908 年将里兹法作为一种有效方法提出,基于变分法(积分方程)中最小势能原理或虚位移原理,选择一个满足位移边界条件的近似函数,对泛函求驻值,得到一组线性代数方程,从而获得问题的近似解。另外,苏联数学家伽辽金于 1915 年发明了伽辽金法,采用微分方程对应的等效积分弱形式,选择满足位移边界条件(与力边界条件)的近似函数,并把近似函数中基函数或形函数为权函数,得到一组线性代数方程,可得问题的近似解。这种方法属于加权余量法。里兹法和伽辽金法均用有限自由度体系近似代替了无限自由度体系,两者在某个特定的条件下是等效的。有限差分法、里兹法、伽辽金法等近似解法的出现表明固体力学从初期的单纯理论研究逐渐转入到实际工程应用之中。但是,还存在不满意之处:有限差分法局限于规则的差

分网格，如正方形、矩形或正三角形网格等；里兹法和伽辽金法选择的近似函数必须满足整个求解区域，当研究对象是一个复杂的结构或具有复杂几何形状，近似函数不易得到满足；所以古典数值方法对于模拟复杂边界的二维或三维问题有一定难度。

现代数值方法则抛弃了这种在整个求解域上选取近似函数的思想，求解模型中采用了“离散化”的思想，近似函数仅需在局部满足微分方程。基于变分法或加权余量法，提出了流行的有限单元法、边界单元法、无网格法等。

20 世纪 60 年代，计算机技术的出现和应用为标志着固体力学计算的一个飞跃，使固体力学的现代数值方法进入了前所未有的深度与广度。电子计算机应用的飞速发展，以及计算方法的不断改进和完善，促成了计算固体力学学科的诞生。

计算固体力学是采用离散化的数值方法，并以电子计算机为工具，求解固体力学中各类问题的学科。借助于计算机，有限元法与有限差分法相辅相成，已成为现代工程计算中不可缺少的强有力工具。但是，有限差分法只看到了节点的作用，没有注意到连接节点的单元所起到的作用；有限元法吸取了有限差分法中离散化处理的内核，又继承了变分计算中选择插值函数并对区域进行积分的合理方法，并且充分估计了单元对节点参数的贡献，使计算结果更为精确。因而，在工程计算中，以有限元法为核心的现代数值方法得到了广泛的应用。

计算固体力学应用到的工程问题及其求解的特点：

(1) 静力学问题。离散化后归结为求解线性代数方程组，常见于求解结构的应力和变形。

(2) 特征值问题。离散化后归结为求解矩阵的特征值和特征向量问题，常见于求解结构或系统的频率和振型、稳定极限载荷和屈曲形状 。

(3) 动态响应问题。离散化后得到一常微分方程组，可直接数值积分或利用先求得特征向量将它转换为一组互不耦合的常微分方程，再进行时间积分求解。常见于求解结构的振动和弹性波的传播。

(4) 非线性问题。例如，黏弹(塑)性等物理非线性问题、大变形和后屈曲等几何非线性问题，一般采用增量解法将它们转化为一系列线性问题求解。

(5) 含裂纹的非连续问题。可采用奇异单元模拟裂纹尖端的应力场。

(6) 复合材料和结构的非均质问题。目前，对此类问题求解还不完善，正在发展之中。

(7) 多场耦合问题。对此类问题求解也在发展之中。

计算固体力学研究和应用的领域不断扩大，随计算机技术的发展，解题能力成数量级地提高。例如，借助计算机，已能对整个“鸟巢”、整艘航空母舰，或整架飞机等工程问题进行详细分析，并得到满意结果。

计算固体力学的发展，既有其学科自身的要求，也有实际工程问题的推动。

1997 年 9 月，钱学森先生给予清华大学力学系赠言："随着力学计算能力的提高，用力学理论解决设计问题成为主要途径，而试验手段成为次要的了。由此展望 21 世纪，力学加电子计算机将成为工程设计的主要手段。"计算固体力学的发展方向是：在数值方法方面，利用多种数值方法的优点，取长补短，提高大型系统的非线性分析、随机分析、耦合分析等算法的精度和效率，改进其稳定性和收敛性；在应用方面，充分利用计算机图像、数据库、人工智能等技术，并可与优化设计、可靠性设计等相结合，发展多功能、自动化的通用或专用工程软件系统，将突破经典力学的框架，继而渗入到诸如生物力学、量子力学等领域，形成新的交叉学科。

本书将讨论线性、材料非线性、几何非线性、动力学问题和热分析问题；涉及加权余量法、有限元法、边界元法、无网格法和离散元法等，主要介绍这些方法的基本原理和概念。鉴于研究生曾学过"数值分析"、"线性代数"与"弹性理论"，为了避免重复，不再赘述有限差分法、矩阵算法和变分法。

著名的有限元法、边界元法既可以从变分原理推出，也可以用加权余量法推出。已经证明，加权余量法用于存在泛函极值的微分方程与泛函极值是等价的，遗憾的是，至今还有一部分微分方程没有找到对应的泛函。换句话说，直接针对原始微分方程推导出来的加权余量法比变分法更有优势，这是因为它也适用于不能给出泛函(需对其求极小值)的那些问题。既然加权余量法包容了变分原理中泛函极值、有限元法、边界元法等的最普遍原理，它更容易推广应用到不同微分方程的其他问题，所以本书以加权余量法开篇。有限元法是当代计算固体力学应用的核心，着墨最多。边界元法是对有限元法的补充，二者取长补短，其耦合计算方法将来也许是个发展方向，故将边界元法作为单独章节进行核心技术的介绍。目前，无网格法是计算固体力学研究领域的前沿热点，出生较晚，有待成长，甚至有些概念的"名字"还在争议之中。无网格法有许多优点，甚至有专家预测无网格法将成为继有限元法之后新一代的数值方法。所以，安排在边界元法章节之后，单独介绍无网格法，便于启迪这方面的研究。

不论有限元法、边界元法，还是无网格法，均是基于连续介质力学基础之上，在非连续介质力学领域的计算又如何呢？离散元法就是该领域数值计算方法的典型代表，主要用来模拟大量颗粒在给定条件下如何运动。在计算机的辅助下，离散元法甚至可以完成模拟"介于流体和固体之间的颗粒或者粉末"受力与运动分析。离散元法的应用已扩展到连续介质及连续介质向非连续介质转化的力学问题。例如，冲击、侵彻等动载荷作用下材料的破坏。为了知识点的全面性，在计算固体力学的篇尾，把离散元法作为其扩充部分。

思　　考

1. 有限差分法的优缺点各是什么?

2. 计算固体力学的生命力如何?

3. 回忆虚位移原理、虚功原理、最小势能原理、里兹法。

4. 什么是自然变分原理和广义变分原理?

弹性力学最小势能原理和最小余能原理都属于自然变分原理。在自然变分原理中试探函数事先应满足规定的条件。例如,最小势能原理中位移试探函数应事先满足几何方程和给定的位移边界条件;最小余能原理中应力试探函数应事先满足平衡方程和给定的外力边界条件。如果这些条件未事先满足,则需要利用一定的方法将它们引入泛函。这类变分原理称为约束变分原理,或广义变分原理。利用广义变分原理可以扩大选择试探函数的范围,从而提高利用变分原理求解数学物理问题的能力。

第 1 章　加权余量法

1.1　微分方程的等效积分

应用科学和工程问题往往可以归结为：在一定边界条件、初始条件下，求解问题的控制微分方程（组）。微分方程（组）可以是常微分方程、偏微分方程，线性的或非线性的。例如，某一应用科学问题中的控制微分方程式及边界条件分别为

$$\begin{cases} A(u)-f=0 & (V\text{ 域}) \\ B(u)-g=0 & (\Gamma\text{ 边界}) \end{cases} \tag{1-1-1}$$

式中，u 为待求的函数；A、B 为微分算子；f、g 为不含 u 的已知函数。

微分方程组(1-1-1)的等效积分形式

$$\int_V \phi_1[A(u)-f]\mathrm{d}V+\int_\Gamma \phi_2[B(u)-g]\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1-1-2}$$

式中，ϕ_1、ϕ_2 为任意函数，也称为权函数。由于 ϕ_1、ϕ_2 为任意函数，上式与微分形式(1-1-1)是完全等价的。

假设微分方程组(1-1-2)中 A 的微分算子为 n 阶，对微分方程组的等效积分形式(1-1-2)进行 m 次分部积分，得到微分方程组(1-1-1)等效积分弱形式

$$\int_V C(\phi_1)E(u)\mathrm{d}V+\int_\Gamma D(\phi_2)F(u)\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1-1-3}$$

分部积分后，微分算子 E、F 为 $n-m$ 阶，微分算子 C、D 为 m 阶。将微分方程转化为弱形式，这个弱并不是弱化对方程解的结果，而是弱化对解方程的要求，具体是弱化待求函数 u 的连续性，当然这种弱化是以提高权函数的连续性为代价的。权函数为选择的已知函数，能够满足分部积分方法对权函数连续性要求。这种弱化换来了以下好处：

(1) 降低对未知函数 u 的连续性的要求，从而可以在更广泛的范围内选择试探函数；

(2) 对连续介质问题，便于有限元构造单元和插值函数；

(3) 在物理上更符合实际问题对未知函数 u 连续性的要求。

如果在微分方程的等效积分弱形式中，对场函数和任意权函数的连续性要求是相同的，则称为微分方程的对称等效积分弱形式；如果对场函数和任意权函数的连续性要求是不相同的，则称为微分方程的非对称等效积分弱形式。

以二维稳态热传导问题的微分方程和边界条件等效的积分弱形式(1-1-4)进行说明。

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega}^{e}\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial \phi_1}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right)-\phi_1 Q\right]\mathrm{d}\Omega \\
&+\int_{\Gamma_{1+2+3}} \phi_1\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x+\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y\right)\mathrm{d}\Gamma \\
&+\int_{\Gamma_2} \phi_2\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x+\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y-q\right)\mathrm{d}\Gamma \\
&+\int_{\Gamma_3} \phi_3\left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x+\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y-h(T_{\mathrm{f}}-T_{\mathrm{s}})\right]\mathrm{d}\Gamma=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}4)
\end{aligned}
$$

式中，e 表示单元范围内积分；Ω 为体积；T 为单元边界；h 为换热系数；T_{f} 为环境温度；T_{s} 为壁面温度；λ_x、λ_y、λ_z 为导热系数；Q 为内热源密度。热传导系数 λ 以其自身出现，而场函数温度 T 则以一阶导数形式出现，因此它允许在域内热传导系数以及温度的一阶导数出现不连续，但这在微分方程中是不允许的。同时，积分弱形式对函数温度 T 的连续性要求的降低是以提高权函数的连续性要求为代价的，由于原来对权函数 ϕ 并无连续性要求，但是适当提高对其连续性要求并不困难，因为它们是可以选择的已知函数。这种降低对函数温度 T 连续性要求的做法在近似计算中，尤其是在有限单元法中是十分重要的。值得指出的是，从形式上看弱形式对函数温度 T 的连续性要求降低了，但对实际的物理问题却常常较原始的微分方程更逼近真解，因为原始微分方程往往对解提出了过分平滑的要求。

例题 1　推导固支梁弯曲问题微分方程等效的积分弱形式。

解　固支梁弯曲问题微分方程及边界条件

$$EJ\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4}-q=0,\quad x\in(0,l)$$

$$w=0,\quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0,\quad x=0,l$$

如果不考虑边界条件，引入任意函数 ϕ 作为权函数，微分方程的等效积分形式如下：

$$\int_0^l \phi\left(EJ\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4}-q\right)\mathrm{d}x=0,\quad x\in(0,l)$$

对该等效积分形式要求域内 ϕ 为三阶导数连续，很难实现。进行 2 次分部积分，得到微分方程的等效积分弱形式：

$$\int_0^l \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}EJ\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x-\int_0^l \phi q\,\mathrm{d}x+\phi EJ\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_0^l-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}EJ\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_0^l=0$$

对等效积分弱形式要求域内 w 一阶导数连续即可。

1.2　加权余量法的基本原理

基于微分方程等效的积分形式可以建立微分方程的数值求解近似方法，比较

有效的就是加权余量法，它是强迫余量在某种平均意义上为零。

用含 n 个待定系数的近似函数代替未知函数，一般情况下定解方程存在余量；引入某系列权函数 $\phi_i(i=1,2,\cdots,n)$，采用使余量的加权积分为零的等效积分形式或等效积分弱形式来求得微分方程近似解的方法称为加权余量法(method of weighted residual)，也称加权残量法、加权残值法、加权余值法。加权余量法是求解线性、非线性微分方程的一种有效方法；最早是用于流体力学、传热等科学领域，后在固体力学中得到了更大的发展。该方法非常便于操作，程序实现也很便利，通用性好。常见的有限元法、边界元法、无网格法都是加权余量法的特殊情况，由于这三种方法各有其特点，所以都各自发展为一种独立的方法。

加权余量法的基本思路如下：对微分方程(1-1-1)和边界条件所表达的物理问题，未知函数 u 可以采用近似函数 $\tilde{u}$ 表示，近似函数 $\tilde{u}$ 是一族带有待定系数的已知函数。将近似函数 $\tilde{u}$ 代入微分方程组及其边界条件，一般不能满足，便出现了余量(residual)。为了使近似函数 $\tilde{u}$ 能满足微分方程及其边界条件，应消除这些余量；为了体现出一定的域内按某种平均意义的方式将余量予以消除，在消除余量方程中引入一个权函数(weighted function)去乘余量，用使余量的加权积分为零的等效积分形式或等效积分弱形式求得待定系数，于是近似函数 $\tilde{u}$ 形式便被确定，它就是满足控制微分方程及边界条件的近似解。

1.2.1　微分方程组等效积分形式的近似方法

为了使问题简化，且有一定的精确度，构造近似解。在域内微分方程(1-1-1)及面力与几何条件给定的情况下，为了计算方便及可行性，通常选择近似函数 $\tilde{u}$ 满足强制边界条件和连续性要求。

选择满足强制边界条件的近似函数 $\tilde{u}$

$$u \approx \tilde{u}(x) = \Psi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} p_j(x) a_j \tag{1-2-1}$$

式中，$\Psi_0(x)$为设定的函数，其边界值等于边界上的已知位移，即满足强制边界条件；a_j 为待定系数；n 为基函数项的数目。$p_j(x)$为边界值等于零的设定函数，称为基函数，又称试函数、试探函数(trial function)，取自完备函数序列，线性独立。所谓完备函数序列是指任一函数都可用此序列表示。

当 n 有限时，近似函数 $\tilde{u}$ 一般只是待求函数 u 的近似解，将式(1-2-1)代入控制方程(1-1-1)将得不到满足，即定解方程存在偏差(余量)，可记为内部余量 R_I 及边界余量 R_B

$$R_I = A(\tilde{u}) - f \neq 0 \tag{1-2-2}$$

$$R_B = B(\tilde{u}) - g \neq 0 \tag{1-2-3}$$

显然，内部余量 R_I 及边界余量 R_B 反映了近似函数 $\tilde{u}$ 与真实解 u 的偏差。

引入 n 个内部权函数 ϕ_i^{I} 及 n 个边界权函数 $\phi_i^{\mathrm{B}}(i=1,2,\cdots,n)$，将它们分别与 R_{I} 及 R_{B} 相乘，通过微分方程组(1-1-1)等效积分，建立 n 个消除余量的条件，一般可表示为

$$\int_V R_{\mathrm{I}}\phi_i^{\mathrm{I}}\mathrm{d}V+\int_\Gamma R_{\mathrm{B}}\phi_i^{\mathrm{B}}\mathrm{d}\Gamma=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-2-4}$$

上式的权函数 ϕ_i^{I}、ϕ_i^{B} 分别有 n 个，即有 n 个方程，可以确定 n 个待定系数，从而近似函数形式便被确定，即得到控制微分方程及边界条件的近似解。当近似函数形式确定后，项数 n 越多，近似解精度越高；如果项数 n 趋于无穷时，近似解收敛于精确解。

1.2.2　近似函数的假设

按近似函数所假设的类型，加权余量法可分为三类。

1. 内部法

若所假设的近似函数(1-2-1)事先满足所有边界条件，即 $R_{\mathrm{B}}=0$，消除余量的条件简化为

$$\int_V R_{\mathrm{I}}\phi_i^{\mathrm{I}}\mathrm{d}V=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-2-5}$$

这种方法称为内部法。近似函数是边界型的。

2. 边界法

若所假设的近似函数(1-2-1)事先满足控制方程，即 $R_{\mathrm{I}}=0$，消除余量的条件简化为

$$\int_\Gamma R_{\mathrm{B}}\phi_i^{\mathrm{B}}\mathrm{d}\Gamma=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-2-6}$$

这种方法称为边界法。近似函数是内部型的。

3. 混合法

若近似函数(1-2-1)不满足控制方程、边界条件，消除余量的条件为

$$\int_V R_{\mathrm{I}}\phi_i^{\mathrm{I}}\mathrm{d}V+\int_\Gamma R_{\mathrm{B}}\phi_i^{\mathrm{B}}\mathrm{d}\Gamma=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-2-7}$$

这种方法称为混合法，应用范围最广。对近似函数的选取方便，但在同样精度条件下，工作量最大。对内部法和边界法必须使基函数事先满足一定的条件，这对复杂结构有困难，但近似函数一旦建立，工作量较小。

无论采取何种方法，在建立近似函数时均应注意以下几点：

(1) 近似函数应由完备函数集的子集构成。已被采用过的近似函数有幂级数、三角级数、样条函数、贝塞尔函数、切比雪夫多项式和勒让德多项式等。

(2) 近似函数应具有直到比消除余量的加权积分表达式中最高阶导数低一阶的导数连续性。

(3) 近似函数应与问题的解析解或问题的特解相关联。若计算问题具有对称性,应充分利用它。

1.2.3　权函数的选取

按权函数的形式,加权余量法可分为五类。下面以内部法为例进行说明,消除余量的统一格式为

$$\int_V \phi_i^{\mathrm{I}} R_{\mathrm{I}} \mathrm{d}V = \int_V \phi_i^{\mathrm{I}} [A(\tilde{u}) - f] \mathrm{d}V = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1-2-8}$$

为了书写方便,线性微分算子 A 用 L 表示,R_{I} 用 R 表示,ϕ_i^{I} 用 ϕ_i 表示。

1. 最小二乘法

最小二乘法(least squares method)令域 Ω 内每一点的残数(或误差)的平方和最小,或平方的积分最小。如果解某一问题 $L(u)-f(x)=0$,所有边界为零。可假定 $\tilde{u} = \sum_{j=1}^{n} a_j p_j$,在物体域 Ω 内的余量 R 平方积分式为

$$I(a_j) = \int_\Omega R^2(\tilde{u}) \mathrm{d}\Omega \tag{1-2-9}$$

为使 $I(a_j)$ 最小,应用求函数的极值条件

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1-2-10}$$

式中,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 相互独立。可得

$$\int_\Omega R^{\mathrm{T}} \frac{\partial R}{\partial a_j} \mathrm{d}\Omega = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-2-11}$$

如果算子 L 是线性算子,则

$$R = L\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i L(p_i) - f(x) \tag{1-2-12}$$

取权函数

$$\phi_j(x) = \frac{\partial R}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i L(p_i) - f(x)\right] = L(p_j) \tag{1-2-13}$$

则有

$$\int_{\Omega}\phi_j R\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\frac{\partial R^{\mathrm{T}}}{\partial a_j}R\,\mathrm{d}\Omega$$

$$=\int_{\Omega}L\,(p_j(x))^{\mathrm{T}}\Big[L\Big(\sum_{i=1}^{n}p_i(x)a_i\Big)-f(x)\Big]\mathrm{d}\Omega=0\quad(j=1,2,\cdots,n)\tag{1-2-14}$$

上式可变为

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\int_{\Omega}[L(p_j(x))]^{\mathrm{T}}[L(p_i(x))]\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}[L(p_j(x))]^{\mathrm{T}}f(x)\mathrm{d}\Omega=0\quad(j=1,2,\cdots,n)\tag{1-2-15}$$

方程组第一行展开并整理：

$$\Big\{\int_{\Omega}L\,[p_1(x)]^{\mathrm{T}}L[p_1(x)]\mathrm{d}\Omega,\int_{\Omega}L\,[p_1(x)]^{\mathrm{T}}L[p_2(x)]\mathrm{d}\Omega,\cdots,$$

$$\int_{\Omega}L\,[p_1(x)]^{\mathrm{T}}L[p_n(x)]\mathrm{d}\Omega\Big\}\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{Bmatrix}=\int_{\Omega}L\,[p_1(x)]^{\mathrm{T}}f(x)\mathrm{d}\Omega\tag{1-2-16}$$

式(1-2-15)的矩阵式(n 个方程)在此省略。总的方程组矩阵是对称的，但权函数、被积函数复杂，需要数值积分。可以求得 n 个待定系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$。

如果求解的问题是二维的，则有

$$\iint_A R(x,y)\frac{\partial R(x,y)}{\partial a_{jk}}\mathrm{d}A=0\quad(j,k=1,2,\cdots,n)\tag{1-2-17}$$

同样，三维问题的最小二乘法消除余量方程组为

$$\iiint_v R(x,y,z)\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial a_{jkl}}\mathrm{d}v=0\quad(j,k,l=1,2,\cdots,n)\tag{1-2-18}$$

例题 2 有一根两端固定作用着均布载荷的直梁(图 1-1)，梁的跨度为 l，均布载荷集度为 q，求梁的挠度。

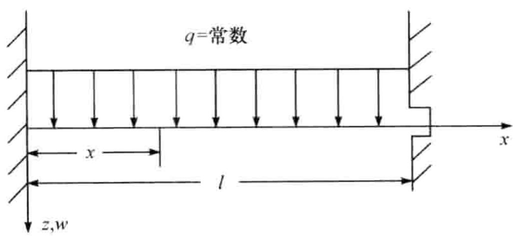


图 1-1 承受均布载荷的直梁

解 建立坐标系如图 1-1 所示，w 向下为正。梁的挠度微分方程式为