



丘成桐主编
数学翻译丛书

可压缩流与欧拉方程

Compressible Flow and Euler's Equations

■ Demetrios Christodoulou 缪爽 著

高等教育出版社

丘成桐主编
数学翻译丛书

可压缩流与欧拉方程

Compressible Flow and Euler's Equations

■ Demetrios Christodoulou 缪爽 著

KE YASUO LIU YU OULA FANGCHENG

高等教育出版社·北京

International Press

图书在版编目 (C I P) 数据

可压缩流与欧拉方程 / (希) 克里斯托多罗
(Christodoulou, D.), 缪爽著. -- 北京: 高等教育出版社, 2014.8

书名原文: Compressible flow and Euler's equations
ISBN 978-7-04-040099-1

I. ①可… II. ①克… ②缪… III. ①可压缩流 - 研究
②欧勒方程 - 研究 IV. ①O351.2 ②O175.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 129570 号

策划编辑 王丽萍
责任校对 刘 莉

责任编辑 李 鹏
责任印制 田 甜

封面设计 王 洋

版式设计 马敬茹

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京宏伟双华印刷有限公司
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 42
字 数 820 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2014年8月第1版
印 次 2014年8月第1次印刷
定 价 98.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 40099-00

《丘成桐主编数学翻译丛书》序

改革开放以后,国内大学逐渐与国外的大学增加交流.无论到国外留学的学者还是到中国访问的学者数量每年都有增长,对中国的科学现代化大有帮助.但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多.基本上所有中国的教科书都是由本国教授撰写,有些已经比较陈旧,跟不上时代的发展.很多国家,例如俄罗斯、日本等,都大量翻译外文书来增加本国国民的阅读内容,对数学的研究大有裨益.高等教育出版社和海外的国际出版社有鉴及此,开始计划做有系统的翻译,由王元院士领导,北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织这项工作.参与的教授很多,有杨乐院士,刘克峰教授等.我们希望这套翻译书能够使大学生有更多的角度来看数学,丰富他们的知识.对这套丛书的出版,海外的出版公司如美国数学会等多有帮助,我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005 年 1 月

引言

描述理想流体运动的方程最早是由 Euler 在 1752 年推导的 (见 [9] 和 [10]), 部分是以 D. Bernoulli [1] 早期的工作为基础. 如果不算 D'Alembert 在 1749 年导出的在线性逼近意义下描述弦振动的一维波动方程 (见 [8]), 这些方程似乎是最早被写下来的偏微分方程. 然而与 D'Alembert 推导的方程相比, 在接下来的两个半世纪之后, 我们仍然没能很好地理解那些应该能由 Euler 方程描述的物理现象.

这些在流体内部表现出来的物理现象主要有两大类, 即声音现象 (其线性化理论是声学) 和涡量的运动. 声音的传播依赖于流体的可压缩性, 而涡量的运动则出现在不可压缩流体. 激波的形成, 即本书的主题, 是属于声音传播的范畴, 但却超出了线性声学理论的范畴, 属于非线性理论.

让我们回顾一下流体中声音传播的研究历史, 特别是非线性理论中激波形成的现象. 当这些运动方程被写下来的时候, 热力学还未进入它流行的时期, 然而在那时已经清楚的是, 由惯性系观察者所看到的流体状态是由两个热力学量所决定的, 比如压力和温度. 在这两个热力学量中, 只有压力出现在运动方程中, 而运动方程同样依赖于流体的密度. 在那时候, 大家已经知道, 对于给定的流体, 密度是压力和温度的函数. 然而在缺少另一个方程的前提下, 除去不可压缩极限的情形, Euler 导出的由连续性方程和动量方程组成的方程组是欠定的. 这个所缺少的方程是由 Laplace 在 1816 年补充的 (见 [13]), 它在后来被称为绝热方程, 这使得 Laplace 能

够第一次准确计算了声速.

第一个关于激波形成的工作是由 Riemann 在 1858 年完成的 (见 [17]). Riemann 考虑了具有平面对称性质的等熵流, 他把运动方程化为了一个具有两个自变量 (时间变量和一维空间变量) 的两个未知函数守恒律系统. 对于这样的系统他引入了所谓的 Riemann 不变量, 借助于这些不变量他证明了起始于光滑初值的解会在有限时间内产生无穷大的梯度.

1865 年, Clausius [7] 在理论物理中引入了熵的概念, 绝热性条件被理解为每个流体元的熵在其发展的过程中恒为常数.

关于三维流体奇性形成的第一个一般性的结果由 T. Sideris 在 1985 年得到 (见 [18]). Sideris 考虑了绝热常数 $\gamma > 1$ 的理想气体的可压缩 Euler 方程, 其初值在一个球面外对应于常状态. 他对初值有如下假设: 存在一个环状区域, 其球面外边界是常状态. 内边界是一个同心球面, 在这个环状区域上, 关于 $\rho - \rho_0$ 的一个积分是正的, 这里 ρ_0 表示常状态的密度; 同时在同一块区域上的关于径向动量密度 ρv^r 的某个积分要非负. 这些积分的核都是关于到原点距离的函数. 同样这里也要求环状区域上的熵 s 不比常状态的熵 s_0 小. 结论则是光滑解关于时间的存在区间是有限的. 这个定理的最大缺陷是它没告诉我们任何有关奇性形成的机制. 同样这个定理的证明方法依赖于如下事实: 即在理想气体情形下, 方程中压力是关于密度的严格凸函数, 并且这个方法不能拓展到任何更一般的情形.

2007 年 Christodoulou 得到了关于三维流体激波形成的最新、最完整的结果 (见 [5]). Christodoulou 考虑了三维空间中理想流体关于任意状态方程的相对论 Euler 方程. 他在 Minkowski 时空的一个类空超曲面 Σ_0 上考虑了光滑初值, 该初值在一个球面外对应于常状态. 他考虑了初值在 Σ_0 中一个同心球面外的限制, 并且考虑这一部分初值对应的最大发展. 如果初值与常状态之间的差足够小, 他可以证明一系列的定理, 用来完整地描述最大发展. 特别地, 这些定理可以给出最大解定义域边界详细的几何描述以及解在该边界行为的详细分析.

本书的主要目的是对经典的、非相对论的可压缩 Euler 方程关于等熵无旋的初值给出相类似的结果, 并且给出关于这些结果的一个更简单并且自成体系的证明. 事实上本书不仅给出了更简单的证明, 并且还将某些结果做得更加精细. 更进一步, 本书深入地解释了证明背后的某些想法. 最后我们还讨论了仅存在于非相对论情形的一些几何性质.

接下来我们解释一下本书证明中的基本想法 (这对于相对论情形同样适用). 这个基本的想法可以看成是将 Riemann 不变量方法和部分速端变换方法的结合体推广到高维情形. 我们首先回忆有关 Riemann 不变量的某些基本事实. 在一维情形, 等熵 Euler 方程组可以写成

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0 \\ \partial_t v + v \partial_x v &= -\frac{1}{\rho} \partial_x p\end{aligned}$$

同时该方程组也可以写成一个关于速度势 ϕ 的单个方程:

$$(g^{-1})^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0$$

或者设 $\psi_\mu = \partial_\mu \phi$,

$$(g^{-1})^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_\nu = 0$$

其中 g 是如下时空流形 $\mathcal{M}$ 中的 Lorentz 度量:

$$g = -\eta^2 dt^2 + (dx - v dt)^2$$

这里

$$v = -\psi_x$$

是流体速度,

$$h = \psi_t - \frac{1}{2} \psi_x^2$$

是焓. 压力 p 是关于 h 的函数, 并且

$$\rho = \frac{dp}{dh}$$

而声速 η 则由

$$\eta^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

给出.

Riemann 不变量是定义在余切空间 $T_p^*\mathcal{M}$ 上的函数 R_1 和 R_2 , 它们是如下程函 (eikonal function) 的两个函数独立的解:

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial R}{\partial \psi_\mu} \frac{\partial R}{\partial \psi_\nu} = 0$$

即

$$-\eta^2 \left(\frac{\partial R}{\partial \psi_t} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \psi_x} + \psi_x \frac{\partial R}{\partial \psi_t} \right)^2 = 0$$

在 $\mathcal{M}$ 上定义向量场 N_1 和 N_2 :

$$N_1 := \frac{\partial R_1}{\partial \psi_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad N_2 := \frac{\partial R_2}{\partial \psi_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

它们是关于 g 的类声向量场. 适当选取 R_1 和 R_2 可以使得 N_1 和 N_2 的积分曲线分别是内向和外向的类声曲线. 那么作为 $\mathcal{M}$ 上的函数, R_1 和 R_2 满足

$$N_1 R_2 = 0, \quad N_2 R_1 = 0 \quad (1)$$

让我们引入声学坐标 (t, u) 使得 u 沿着外向的类声曲线是常值. 那么向量场

$$L = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \underline{L} = \eta^{-1} \kappa L + 2T$$

是关于 g 的类声向量场, L 和 $\underline{L}$ 的积分曲线分别是外向和内向的类声曲线. 这里

$$T = \frac{\partial}{\partial u}, \quad \kappa = -\frac{\partial x}{\partial u} \quad (2)$$

从而 L 和 $\underline{L}$ 分别与 N_2 和 N_1 共线, 并且 (1) 式中的方程等价于

$$L R_1 = 0, \quad \underline{L} R_2 = 0 \quad (3)$$

为了写出 R_1 和 R_2 的显式表达式, 我们将使用如下 $T_p^*\mathcal{M}$ 中的坐标取代原先的坐标 (ψ_t, ψ_x) :

$$h = \psi_t - \frac{1}{2} \psi_x^2, \quad v = -\psi_x$$

则对任意定义在 $T_p^*\mathcal{M}$ 上的函数 $f = f(h, v)$, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_x} + \psi_x \frac{\partial f}{\partial \psi_t} = -\frac{\partial f}{\partial v}$$

让我们引入函数 $r = r(h)$, 使得它满足

$$\frac{dr}{dh} = \frac{1}{\eta}, \quad r(0) = 0$$

则我们有

$$R_1 = r + v, \quad R_2 = r - v$$

是程函的两个函数独立的解, 从而是两个 Riemann 不变量. 由 (3) 式中的第一个方程, 我们知道

$$R_1 = R_1(u)$$

完全由初值决定. 而为了得到 R_2 , 我们需要考虑 (3) 式中的第二个方程, 即

$$\eta^{-1} \kappa \frac{\partial R_2}{\partial t} + 2 \frac{\partial R_2}{\partial u} = 0$$

这里出现了 κ , 它的定义由 (2) 式给出. 为了得到一个关于 κ 的方程, 我们需要考虑如下方程:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = c_+, \quad c_+ = v + \eta$$

我们将导出一个关于 κ 的方程. 由 (3) 式, 我们知道

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = -\frac{\partial c_+}{\partial u} = -\frac{1}{2} \frac{\partial R_1}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial R_2}{\partial u} - \frac{d\eta}{dh} \frac{\partial h}{\partial u}$$

而

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{dh}{dr} \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial R_1}{\partial u} + \frac{\partial R_2}{\partial u} \right)$$

将上式代入, 我们得到

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(-1 - \eta \frac{d\eta}{dh} \right) \frac{\partial R_1}{\partial u} + \frac{1}{2} \left(1 - \eta \frac{d\eta}{dh} \right) \frac{\partial R_2}{\partial u}$$

由于

$$\frac{\partial R_1}{\partial u} = \frac{2}{\eta} \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\partial R_2}{\partial u}$$

从而我们有

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{1}{2\eta} \left(-2 - 2\eta \frac{d\eta}{dh} \right) \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial R_2}{\partial u}$$

让我们定义

$$H = -2h - \eta^2$$

由 (3) 的第二式

$$\frac{\partial R_2}{\partial u} = -\frac{\kappa}{2\eta} \frac{\partial R_2}{\partial t}$$

从而 κ 满足如下方程:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = m' + \kappa e'$$

其中

$$m' = \frac{1}{2\eta} \frac{dH}{dh} \frac{\partial h}{\partial u}, \quad e' = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial R_2}{\partial t}$$

一维情形时的主要想法是 R_1 和 R_2 以及直角坐标 x 是 (t, u) 的光滑函数. 部分速端变换是如下从声学坐标到直角坐标的变换:

$$(t, u) \mapsto (t, x)$$

其 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(t, x)}{\partial(t, u)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v + \eta & -\kappa \end{vmatrix} = -\kappa$$

从而当 κ 趋向于 0 时该 Jacobi 行列式也趋向于 0. 这意味着当激波形成的时候 R_1 和 R_2 并不是 (t, x) 的光滑函数.

当空间维数高于一维时, 特别地, 在三维的情形, 我们没有 Riemann 不变量. 取而代之是解的一阶变分, 它们由如下变分场定义:

$$\partial_\mu, \quad \mathring{R}_i = \epsilon_{ijk} x^j \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad x^\mu \partial_\mu - I; \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3$$

这里 I 是恒等算子. 这些场是 Galileo 群以及伸缩变换群的子群的生成子, 它们刚好是可压缩 Euler 方程组的不变群, 并且保持常状态不变. 这些一阶变分满足如下线性波动方程:

$$\square_{\hat{g}} \psi = 0 \tag{4}$$

其中 $\tilde{g}$ 是共形声学度量:

$$\tilde{g} = \Omega g, \quad \Omega = \frac{\rho}{\eta}, \quad g = -\eta^2 dt^2 + \sum_i (dx^i - v^i dt)^2$$

如同一维情形时 R_1 和 R_2 满足的方程, 方程 (4) 不依赖于时空流形的 Galileo 结构, 而仅依赖于 $(\mathcal{M}, g)$ 是一个 Lorentz 流形的事实. 实际上它主要依赖于 $(\mathcal{M}, g)$ 的共形类. 注意到这与一维情形时类声曲线只依赖于声学度量的共形类这一事实相似. 同样与一维情形时相似, 我们将使用声学坐标 (t, u, ϑ) . 这里 u 是 $\mathcal{M}$ 中的声学函数, 其水平集 C_u 是外向类声超曲面. 在每个 C_u 上 $\vartheta \in \mathbb{S}^2$ 的等值曲线是 C_u 的生成子. 如同一维情形, 我们记 L 为 C_u 生成子的切向量场并且其参数为 t , 记 $\underline{L}$ 为 $S_{t,u} := C_u \cap \Sigma_t$ 的内向法向量场, 其定义形式上与一维情形时相同. 我们同样记 T 为 Σ_t 中 $S_{t,u}$ 的内向正交曲线的切向量场, 其参数为 u . 这里 Σ_t 是函数 t 的水平集, 它与 Euclid 空间等距同胚.

为了得到线性方程在 (t, u, ϑ) 下的能量估计, 我们将运用两个乘子向量场 K_0 和 K_1 , 它们相对于 g 是非类空并且指向未来的 (这个要求实际上只依赖于 g 的共形类). 这两个向量场是 L 和 $\underline{L}$ 的线性组合, 其系数是关于 (t, u, ϑ) 的光滑函数. 乘子向量场的概念来源于关于守恒流的 Noether 定理 (见 [14]). 一个现代的、关于更一般的相容流的讨论见 [4]. 为了得到高阶能量估计, 我们需要考虑 n 阶变分, 其由 $n-1$ 个交换向量场作用在一阶变分上得到. 这些交换向量场如下:

$$T, \quad Q := (1+t)L, \quad R_i := \Pi \mathring{R}_i$$

这里 Π 是从 $T_p \Sigma_t$ 到 $T_p S_{t,u}$ 的正交投影. 从而我们得到了一个关于 n 阶变分 ψ_n 的非齐次波方程:

$$\square_{\tilde{g}} \psi_n = \rho_n \tag{5}$$

其中 ρ_n 是由交换向量场的形变张量所决定的. 实际上 ρ_n 依赖于形变张量的直到 $n-1$ 阶导数, 并且 $\rho_1 = 0$. 交换向量场的使用最早来源于 [12]. 而最早在弯曲时空中使用乘子向量场和交换向量场的工作则是 [6].

在声学坐标下求解了方程 (5) 之后, 我们需要回到原来的直角坐标. 所以我们必须考虑变换

$$(t, u, \vartheta) \longmapsto (t, x)$$

的逆变换, 其中 $\vartheta \in \mathbb{S}^2$, $x \in \mathbb{R}^3$. 这正是部分速端变换在高维情形时的推广. 这个变换的 Jacobi 行列式为

$$\kappa \sqrt{\det g} \quad (6)$$

这里 g 是声学度量在 $S_{t,u}$ 上的诱导度量. 所以我们考虑如下直角坐标在每个 C_u 上满足的方程组:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = L^i = -\eta \hat{T}^i - \psi_i$$

该方程组是关于 x^i 的完全非线性系统. 这里 $\hat{T}$ 是 $S_{t,u}$ 在 Σ_t 中的单位内法向, 它的表达式是一个关于 $\frac{\partial x^i}{\partial \vartheta^A}$ 的二阶齐次多项式与一个根号下关于 $\frac{\partial x^i}{\partial \vartheta^A}$ 的四次齐次多项式的商. 对 x^i 的导数的估计转化为对 χ 和 μ 的导数估计. 它们的定义如下:

$$2\chi = \mathcal{L}_L g, \quad \mu = \eta \kappa$$

其中 κ 是 T 的模长. 所以 χ 是 $S_{t,u}$ 关于 C_u 的第二基本形式. 而最后我们则是通过研究 $S_{t,u}$ 作为 $\mathcal{M}$ 的叶状结构的几何结构方程来估计 χ 和 μ .

总结一下, 在高维空间情形, Riemann 不变量被一阶变分 ψ 所取代, 我们将证明它是关于声学坐标 (t, u, ϑ) 的光滑函数. 而我们所运用的方法则是利用 χ 和 μ 满足的几何结构方程给出它们的估计. 其中关于 μ 的方程与一维情形时相同:

$$L\mu = m + \mu e$$

这里

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \frac{dH}{dh} Th, \quad H = -2h - \eta^2 \\ e &= \frac{1}{2\eta^2} \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)' Lh + \frac{1}{\eta} \hat{T}^i (L\psi_i) \end{aligned}$$

由以上这些结论我们将推导出: 最大经典发展的边界包含一个奇异部分 $\mathcal{H}$, 在那里 Jacobi 行列式 (6) 为 0. 由关于 χ 的估计我们知道, $\sqrt{\det g}$ 有一个正的下界, 从而 κ 和 μ 在 $\mathcal{H}$ 上为 0. 所以变换

$$(t, u, \vartheta) \mapsto (t, x)$$

的逆变换在 $\mathcal{H}$ 不可微. 所以 ψ 在 $\mathcal{H}$ 关于直角坐标不可微. 然而 $\mathcal{H}$ 作为 μ —— 一个关于 (t, u, ϑ) 的光滑函数 —— 的零水平集, 在由声学坐标诱导的微分结构下是

$\mathcal{M}$ 中的光滑超曲面. 这是因为在 $\mathcal{H}$ 上 $L\mu$ 有一个严格负的上界, 所以 $\mathcal{H}$ 是 μ 的非临界水平集.

本书的第一个主要结论可以看成是关于速度势非线性波方程

$$(g^{-1})^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0$$

的小初值存在性定理 (定理 17.1):

上述非线性波方程的解在声学坐标 (t, u, ϑ) 下可以光滑延拓到最大解定义域的边界, 在函数 μ 变成 0 以前, 解同样也是直角坐标下的光滑函数, 这是因为当 $\mu > 0$ 时, 由声学坐标和直角坐标诱导的微分结构是相互等价的.

定理 17.1 同样给出了激波形成时 (即 $\mu = 0$ 时) 的时间下界, 以及关于解的能量和声学时空 $(\mathcal{M}, g)$ 中各种几何量的估计.

以上述存在性定理为基础, 我们可以在初值上给出激波形成的充分条件 (见定理 18.1). 该条件是加在关于函数

$$(1 - u + t)\underline{L}\psi_0 - \psi_0 \tag{7}$$

在 Σ_t 的一个积分上. 这里

$$\psi_0 := \partial_t \phi$$

是一个一阶变分. (7) 式的主部, 即 $(1 - u + t)\underline{L}\psi_0$ 决定了函数 m 的性质, 从而决定了激波是否形成. 更进一步, 函数 (7) 在 $S_{t,u}$ 上的平均值满足一个以 t 为变量的常微分不等式. 我们可以运用这个常微分不等式将 m 在激波附近的性质与 m 在初始曲面 Σ_0 的性质联系起来. 从而我们就可以在初值上给出激波形成的充分条件.

同样以存在性定理为基础, 我们可以给出最大解定义域的边界在声学微分结构下的几何描述 (命题 19.1):

边界包含一个正则部分 $\underline{C}$, 它是 $(\mathcal{M}, g)$ 中的内向类声超曲面. 同时边界还包含一个奇异部分 $\mathcal{H}$, 在这上面 $\mu = 0$. $\mathcal{H}$ 是 $(\mathcal{M}, g)$ 中的类空超曲面, 它与 $\underline{C}$ 有着共同的过去边界, 我们将其记为 $\partial_- \mathcal{H}$, 它是 $(\mathcal{M}, g)$ 中的二维类空曲面. 然而奇异边界从内蕴几何的角度来看, 却是 $(\mathcal{M}, g)$ 中的类声超曲面, 因为在声学坐标下, 声学度量 g 在奇异边界上退化.

相对应的奇异边界在标准微分结构 (即由直角坐标诱导的微分结构) 下的描述由命题 19.3 给出. 更进一步, 我们建立了一个三择一定理 (定理 19.1). 它用来描述起始于奇异边界上任意一点的指向过去的类声测地线的行为:

对于奇异边界上的任意一点 q , 以 q 为终点的类声测地线与 Σ_t 的交分为三部分, 对应于以 q 为终点的内向和外向类声测地线的集合是 Σ_t 中的嵌入圆盘, 它们有着共同的边界, 该边界是 Σ_t 中的嵌入圆环, 它对应于其他以 q 为终点的类声测地线. 所有以 q 为终点的外向类声测地线在 q 有共同的切向量.

最后我们考虑从一个声学函数到另一个声学函数的变换. 我们可以看到, 不同的声学函数对应的类空超曲面的几何性质是相互等价的, 并且当激波形成的时候, 它们以相同的方式退化 (见命题 19.2).

现在我们给出本书的内容梗概. 前四章考虑基本的几何构造. 我们在第五章给出关于共形声学度量的线性波方程的能量估计. 第六章给出交换向量场形变张量的初步估计, 其精确估计在第十章和第十一章中给出. 我们在第五章和第六章中同样给出了关于变分以及 χ 和 μ 的基本的连续性假设. 第八章和第九章是全书的重点, 因为这里关于 χ 和 μ 的估计不允许损失任何导数, 这样我们才能完成连续性假设的证明. 第八章考虑 χ 的最高阶空间导数的估计, 这里实际上只有与 $S_{t,u}$ 相切的导数. 而第九章则是考虑 μ 最高阶空间导数的估计. 在第十二章中, 以关于变分的连续性假设为基础, 我们证明了关于 χ 和 μ 的连续性假设, 但 C1, C2, C3 的证明却是在第十三章中给出. 在第十四章中, 以第八章中一个关键的引理 (引理 8.11) 为基础, 我们估计了来源于 χ 和 μ 的最高阶空间导数的临界项. 在第十五章, 我们得到了最高阶变分的能量估计. 我们允许这些能量在激波开始形成的时候爆破. 然后我们便看到, 当能量的阶数逐级降低时, 所允许爆破速度会越来越慢, 直到降低到某一阶时, 能量完全不会爆破. 我们用这些有界的能量来完成整个连续性假设的证明 (见第十六章和第十七章).

关于本书中的记号, 拉丁指标取值为 1, 2, 3, 希腊指标取值为 0, 1, 2, 3. 除了特别声明之外, 指标重复表示求和.

目 录

第一章 可压缩流体与非线性波方程	1
1.1 Euler 方程	1
1.2 无旋流和非线性波方程	2
1.3 变分方程和声学度量	5
1.4 基本变分	6
第二章 基本几何构造	11
2.1 与声学度量相关的类叶状结构	11
2.1.1 Galileo 时空	11
2.1.2 类叶状结构和声学坐标	12
2.2 函数 H 的几何解释	20
第三章 声学结构方程	23
3.1 声学结构方程	23
3.2 L 和 $\hat{T}$ 的直角坐标分量的导数	38

第四章 声学曲率.	43
4.1 曲率张量的表达式.	43
4.2 声学结构方程当 $\mu \rightarrow 0$ 时的正则性.	47
4.3 一个注记.	50
第五章 基本能量估计.	51
5.1 连续性假设和定理的陈述.	51
5.2 乘子 K_0 和 K_1 及其相关的能量动量张量.	55
5.3 误差积分.	65
5.4 误差积分的估计.	69
5.5 依赖于 t 和 u 双变量不等式的处理. 证明的完成.	83
第六章 交换向量场的构造.	89
6.1 交换向量场的构造和它们的形变张量.	89
6.2 形变张量的初步估计.	95
第七章 高阶变分方程的非齐次项估计.	111
7.1 高阶变分的非齐次波方程. 非齐次项函数的递推公式.	111
7.2 $\tilde{\rho}_n$ 中的第一项.	114
7.3 $\tilde{\rho}_n$ 中第一项对误差积分贡献的估计.	120
第八章 关于 $\not{d}\mathrm{tr}\chi$ 的传输方程的正则化.	
χ 的最高阶 $S_{t,u}$ - 导数的估计.	143
8.1 初步准备.	143
8.1.1 传输方程的正则化.	143
8.1.2 高阶 $S_{t,u}$ - 导数的传输方程.	148
8.1.3 $S_{t,u}$ 上的椭圆估计.	159
8.1.4 传输方程解的初步估计.	168
8.2 和 μ 有关的关键引理.	173
8.3 传输方程解的估计.	194

第九章 关于 Δ_μ 的传输方程的正则化.

μ 的最高阶空间导数的估计	207
9.1 传输方程的正则化	207
9.2 高阶空间导数的传输方程	214
9.3 $S_{t,u}$ 上的椭圆估计	227
9.4 传输方程解的估计	240

第十章 x^i 的一阶导数的球面导数的控制.

关于 χ 的假设和估计	255
10.1 初步准备	255
10.2 y^i 的估计	268
10.2.1 $R_{i_k} \cdots R_{i_1} y^j$ 的 L^∞ 估计	269
10.2.2 $R_{i_k} \cdots R_{i_1} y^j$ 的 L^2 估计	273
10.3 Q_l 和 P_l 的界	283
10.3.1 Q_l 的估计	283
10.3.2 P_l 的估计	295

第十一章 x^i 的一阶导数的空间导数的控制.

关于 μ 的假设和估计	305
11.1 $T\hat{T}^i$ 的估计	305
11.1.1 基本引理	305
11.1.2 $T\hat{T}^i$ 的 L^∞ 估计	326
11.1.3 $T\hat{T}^i$ 的 L^2 估计	333
11.2 $Q'_{m,l}$ 和 $P'_{m,l}$ 的界	347
11.2.1 $Q'_{m,l}$ 的界	347
11.2.2 $P'_{m,l}$ 的估计	360

第十二章 声学假设的证明. 仅次于最高阶的 χ 的球面导数和

μ 的空间导数的估计	371
12.1 λ_i, y'_i, y_i 和 r 的估计. 假设 H0 的建立	371