"十二五"国家重点图书出版规划项目

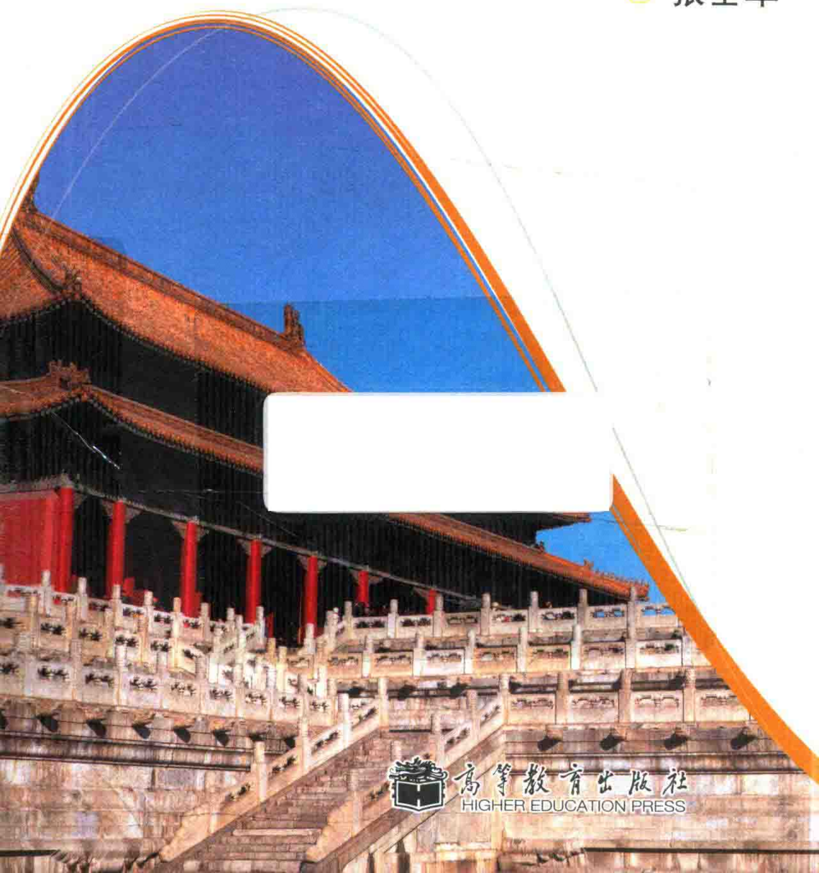
26

数学文化小丛书

李大潜 主编

漫步数学之美

张士军



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十二五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

漫步数学之美

Manbu Shuxue zhi Mei

张士军

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

漫步数学之美 / 张士军编 . -- 北京 : 高等教育出版社，2014. 3
（数学文化小丛书 / 李大潜主编 . 第 3 辑）
ISBN 978-7-04-039230-2

Ⅰ. ①漫… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学—美学—普及读物 Ⅳ. ① O1-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 318647 号

策划编辑	李　蕊	责任编辑	田　玲	封面设计	张　楠
版式设计	王艳红	插图绘制	尹文军	责任校对	胡美萍
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京信彩瑞禾印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 1092mm　1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	3.375	版　　次	2014 年 3 月第 1 版
字　　数	60 千字	印　　次	2014 年 3 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	10.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　39230-00

数学文化小丛书编委会

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对

世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野、启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005 年 12 月

目 录

看到这个题目, 您也许首先会想到两个问题: 第一, 什么是美? 第二, 数学是美的吗? 关于第一个问题, 看起来似乎很简单, 但要想说清楚, 却不是一件容易的事情. 从古到今, 有许多美学家对什么是美作过大量的论述. 在此, 我们不打算深究和探讨美的具体含义. 好在我们每个人对美都有一个直观的感性的认识, 比如: 愉悦、和谐、完美, 等等. 在生活中我们也随时可以感受到种种美的现象, 比如: "江山如此多娇", 是对自然风光之美的赞誉; 一幅悦目的图画, 这是绘画的美; 一曲美妙的乐章, 这是音乐的美; 一篇瑰丽的诗文, 这是文学的美, 等等. 对于第二个问题, 难免会有些争议. 无疑, 数学给人的直观印象往往是抽象、晦涩、深奥, 它怎么会与美联系起来呢? 其实, 任何事物都有其独特的美的一面, 只是需要你有一双慧眼去发现它而已. 孔夫子曾经说过: "知之者不如好之者, 好之者不如乐之者." 诚哉斯言! 假如你培养起了对数学的兴趣, 不仅"知之", 而且达到了"好之"乃至"乐之"的程度, 那么你就会发现, 数学和其他任何事物一样自有其独特的美. 如若不信, 不妨看看历史上的数学巨擘们是怎样看待数学的:

哪里有数, 哪里就有美

——普罗克洛斯

数学是这个世界之美的原型

——开普勒

数学实质上是艺术的一种

——维纳

数学，如果公正地看，包含的不仅是真理，也是无上的美——一种冷峭而严峻的美，恰像一尊雕刻一样

——罗素

上述说法，真可谓是对数学美的知言：数学美是无处不在的，它是美的“原型”，是一种“艺术”，是一种“无上的美”．凡此种种，都不能只被看作是溢美之词，而是透辟而精警的体察，痴迷而感性的感喟．数学无疑是美的，正是对美的追求，促进了数学的发展，也极大地推动了社会的进步．下面我们就从四个方面谈一谈数学美的问题．

一、数学美的表现

为了使大家对数学美有一个初步的感知, 我们不妨先列举一些数学中美的例子.

(一) 数字中的美

大家知道, 数论是研究数 (特别是自然数) 的规律的一个数学分支. 在整个数学中, 数论分支是可以冠以“美”这一定语的, 就如同一个长满奇花异草的大花园. 对一些特殊数的研究, 吸引着众多的专家和数学爱好者投入大量的精力而乐此不疲. 我们先看几种特殊的自然数.

1. 亲和数

若正整数 M 的全部正因子 (去掉其本身) 之和, 恰为自然数 N, 而 N 的全部正因子 (去掉其本身) 之和恰为自然数 M, 则称 M, N 为一对亲和数. 最简单的一对亲和数是 220 和 284, 把 220 的全部正因子 (不包括 220 本身) 加起来为

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$$

而把 284 的全部正因子 (不包括 284 本身) 加起来为

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

想不到枯燥的数字之间也有这种“我中有你, 你中有我”的“亲和”关系. 其实, 早在古希腊毕达哥拉斯时代就知道有这一对亲和数, 只是当时人们认为仅仅只有这一对亲和数, 这种认识一直延续了两千多年. 直到 1636 年费马发现并公布了第二对亲和数 17296 和 18416, 才破除了只有一对亲和数的误判, 也激发起了寻找其他亲和数的热情. 后来, 杰出的阿拉伯数学家本 · 科拉建立了一个有名的亲和数公式: 设 $a = 3 \cdot 2^n - 1, b = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $c = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, 其中, n 是大于 1 的正整数. 如果 a, b, c 全是素数, 那么 $2^n \cdot ab$ 与 $2^n \cdot c$ 便是一对亲和数. 例如, 当 $n = 2$ 时, $a = 11, b = 5, c = 71$, 它们都是素数, 而 $2^n \cdot ab = 220$ 和 $2^n \cdot c = 284$ 便是一对亲和数. 大数学家欧拉在 1750 年左右宣布了 60 对亲和数, 使人大吃一惊, 大家也认为对亲和数的研究至此已达到了顶峰. 然而在 1866 年, 一个年仅 16 岁的青年帕格尼尼却令人惊讶地发现了 1184 与 1210 也是一对亲和数, 它们仅比 220 和 284 稍大一些, 想不到数学家将近在身边的第二对亲和数遗漏了. 当电子计算机出现后, 人们终于可以凭借高速度大容量的计算机探索更多的亲和数. 至 2007 年, 人们已经发现近 12000000 对亲和数. 那么, 是否还有新的亲和数存在? 这一问题依然吸引着人们的注意力. 还有一个问题是, 迄今发现的亲和数要么两

个都是偶数，要么两个都是奇数，是否存在着一奇一偶的亲和数呢？这个问题是欧拉在300多年前提出来的，迄今尚未解决，人们甚至认为这或许是一个像哥德巴赫猜想那样的重量级的困难问题.

2. 完全平方数

一个整数的平方称为完全平方数，简称平方数. 如1, 4, 9, 16等都是平方数. 在正整数中除了素数以外，最引人注目的就是平方数. 平方数在正整数中比素数更加稀疏，且具有规律性：不超过正整数 n 的平方数 (不算0) 的个数是 $\sqrt{n}$ 的整数部分.

在哪些情况下可以出现完全平方数呢？

- 前 n 个奇数的和一定是平方数，例如

$$1=1^2,\ 1+3=2^2,\ 1+3+5=3^2$$

一般地，

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$$

- 前 n 个正整数的和可能是平方数，如

$$1+2+3+\cdots+8=6^2,\ 1+2+3+\cdots+49=35^2$$

- 两个相邻正整数之和有可能是平方数，如

$$4+5=3^2,\ 12+13=5^2,\ 24+25=7^2$$

一般地，当 k 为大于1的奇数时，$\dfrac{k^2-1}{2}, \dfrac{k^2+1}{2}$ 为两个相邻的正整数. 又因

$$\frac{k^2-1}{2}+\frac{k^2+1}{2}=k^2$$

故任何一个大于 1 的奇数的平方数都能表示成两个相邻正整数的和.

• 四个相邻正整数的乘积与 1 的和一定是完全平方数, 例如

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+1=5^2,\ \ 2\cdot3\cdot4\cdot5+1=11^2$$

3. 完满数

如果一个正整数等于除它自身以外的各个正因子之和, 则称这个数为完满数. 例如: 6=1+2+3, 28=1+2+4+7+14, 6 和 28 都是完满数.

多么美妙! 难怪有人把完满数直接称为“完美数”, 将其视作自然数中的“瑰宝”. 古希腊人非常重视完满数, 认为完满数代表着吉祥, 会给他们带来幸福和美好. 意大利人则把 6 看成是属于爱神维纳斯的数, 以象征美满的婚姻.

那么, 在自然数里, 到底有多少完满数呢? 有人做过统计, 1 到 40000000 只有 5 个完满数, 它们是 6, 28, 496, 8128, 33550336. 从第 4 个完满数 8128 到第 5 个完满数 33550336 的发现经过了一千多年. 第 5 个完满数要比第 4 个完满数大 4100 多倍, 这可能就是历经一千多年才艰难跨出一步的原因.

完满数还有一些鲜为人知的性质, 比如:

• 所有完满数都可以表示为 2 的一些连续整数次幂之和, 如:

$$6 = 2^1 + 2^2$$

$$28 = 2^2 + 2^3 + 2^4$$

$$496 = 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^8$$

$$8128 = 2^6 + 2^7 + 2^8 + \cdots + 2^{12}$$

$$33550336 = 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + \cdots + 2^{24}$$

- 除了 6 以外, 其他完满数可表示为连续奇数的三次方之和, 如:

$$28 = 1^3 + 3^3$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

$$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + 15^3$$

$$33550336 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + 125^3 + 127^3$$

- 完满数的全部因子的倒数和都等于 2, 如:

$$6 : \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$$

$$28 : \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

如此奇妙的特性, 难怪完满数如此迷人, 具有魅力, 是极美的数, 真无愧于“完满数”的美称!

4. 梅森数

下面将要提到的梅森数源自于对完满数的研究. 前面我们已经领略了完满数的魅力, 在惊呼完

满数是何等诱人时, 人们自然会想到一个根本问题: 怎样去求完满数呢?

古希腊的数学家欧几里得首先给出了一个定理:

若 2^p-1 是素数, 则 $2^{p-1}(2^p-1)$ 是完满数.

不难验证, 当 $p=2,3,5,7$ 时, 2^p-1 是素数, 而此时 $2^{p-1}(2^p-1)$ 恰好就是前 4 个完满数: 6, 28, 496, 8128. 而第 5 个完满数 33550336 相当于 $p=13$ 时的情形.

上述欧几里得定理表明, 形如 2^p-1 的素数与完满数有十分密切的关系.

17 世纪初, 法国神父梅森 (Marin Mersenne, 1588—1648) 对这种素数产生了兴趣, 他依靠自己的钻研和收集到的资料, 在 1644 年出版的著作 *Cogitata Physico-Mathematica* 中提出了一个猜想: 在不超过 257 的 55 个素数中, 有 11 个 p 值使 2^p-1 为素数, 这些 p 值是 2,3,5,7,13,17,19,31,67, 127 和 257, 而 $p<257$ 的其他素数对应的 2^p-1 都是合数. 当时, 人们对梅森的成果持半信半疑的态度, 因为有些 p 值对应的 2^p-1 太大了, 很难确定它们是不是素数. 不过, 梅森在这方面的工作还是赢得了人们的景仰, 后来便把形如 2^p-1 的数称为梅森数, 记作 M_p.

梅森是如何得到上述结论的呢? 无人知晓, 他本人验证了前 7 个梅森数都是素数. 1772 年, 欧拉证明了 $p=31$ 的梅森数为素数. 但是, 在梅森提出的 11 个数中还有 3 个是不是素数却长期无人论证.

一直到梅森去世 250 多年以后的 1903 年, 在纽约召开的一次学术会议上, 美国数学家科尔做了一次十分精彩的“报告”, 他走上讲坛, 一言不发, 只见他迅速写下:

$$
\begin{aligned}
2^{67}-1 &= 147573952589676412927 \\
193707721 &\times 761838257287 \\
&= 147573952589676412927
\end{aligned}
$$

之后, 他只字未吐又回到自己的座位上. 顿时, 全场响起经久不息的掌声. 科尔的“无声的报告”已经成为数学史上的佳话.

可见, 梅森的判断有误, $2^{67}-1$ 并不是素数! 计算机发明以后, 人们逐渐发现他的结论中的其他错误: M_{257} 不是素数, 而 M_{61}, M_{89}, M_{107} 是素数.

到底有多少梅森数是素数呢? 截止到 2013 年 2 月 6 日, 我们已知道 48 个梅森数是素数. 目前知道的最大梅森素数是 $M_{57885161}$, 它有 17425170 位, 是 2013 年 1 月美国中央密苏里大学教授柯蒂斯 · 库珀领导的研究小组发现的.

5. 哥德巴赫猜想

1742 年, 德国数学家哥德巴赫 (Goldbach, 1690—1764) 在和他的好朋友、大数学家欧拉的几次通信中, 提出了关于正整数和素数之间关系的两个猜测, 用现在的确切的语言来说, 就是:

(1) 每一个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和;

(2) 每一个不小于 9 的奇数都是三个奇素数之和.