GAODENGSHUXUE

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学 下册

主　编　唐晓文
副主编　李　林　唐燕贞　兰友发
主　审　韩　明

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

下册

主　编　唐晓文

副主编　李　林　唐燕贞　兰友发

主　审　韩　明

同濟大學出版社

内 容 提 要

本书是在认真贯彻落实教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的精神，并按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，根据本科院校学生的基础和特点以及一些高等院校向应用技术大学转型的新趋势而编写的.

全书分上、下两册，此为下册. 内容包括：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程，附录包括数学建模与数学实验. 每章分若干节，每节都配有习题，同时每章还配有综合习题，书末附有习题的参考答案.

本书体系结构严谨、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题习题丰富. 适合作为普通高等院校（非数学专业）高等数学课程的教材使用，可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 唐晓文主编. -- 上海：同济大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5608-5558-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①唐… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第143696号

普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学（下册）

主　编　唐晓文

副主编　李　林　唐燕贞　兰友发

主　审　韩　明

责任编辑　张　莉　　**责任校对**　徐春莲　　**封面设计**　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

（上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021-65985622）

经　销　全国各地新华书店

印　刷　江苏句容排印厂

开　本　787 mm×960 mm　1/16

印　张　19.75

字　数　395 000

印　数　1—4 100

版　次　2014年7月第1版　2014年7月第1次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-5558-5

定　价　36.00元

前　言

“高等数学”是普通高等院校本科各专业普遍开设的一门公共基础课程，在培养具有良好数学素质及其应用型人才方面起着特别重要的作用. 为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求，适应我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变，结合一些高等院校向应用技术大学转型的新要求，并按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，在多次研讨和反复实践的基础上，编写了这套教材.

全书以通俗易懂的语言，深入浅出地介绍了高等数学的知识. 全书分上下两册，上册共5章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用. 附录包括二阶行列式和三阶行列式简介，常用曲线方程与图像，积分表，数学建模与数学实验. 下册也有5章，内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程. 附录包括数学建模与数学实验. 全书每章分若干节，每节都配有习题，同时，每章还配有综合习题，书末附有比较详细的习题参考答案.

带 * 号的内容可根据教学需要和学时安排酌情增删，附录是学习高等数学的辅助内容，可供教学时参考.

本书具有以下几方面的特点：

(1) 淡化理论推导过程，加强训练强化应用

在有些章节中淡化了定理证明的推导过程. 既简明易懂，又解决了课时少、内容多的矛盾. 同时，本书经过精心设计与编选，配备了相当丰富的习题，包括填空题、选择题、计算题、应用题. 目的是使学生理解基本概念和基本定理的实质，掌握重要的解题方法和应用技巧.

(2) 内容结构设计合理，突出重点消除难点

平面极坐标是积分中经常用的重要内容，因此，在第5章中比较详细地介绍了平面极坐标与直角坐标的关系，给出了一些常用曲线的极坐标方程，为后面的学习奠定了一定的理论基础；第二类线面积分是高等数学的难点，一般的书都是通过物理意义抽象出第二类线面积分的概念，本书是把第二类线面积分以一种特殊的第一类线面积分引入，不但消除了难点问题，而且直接得到了两类积分之间的关系，同时也突出了第一类线面积分在线面积分的重要作用.

(3) 引入专业案例教学,提高学生学习兴趣

根据应用技术大学的新要求,为专业学习打下扎实的基础,在重要的章节附有实际应用例题,例如在讲曲面面积时,研究了通讯卫星的信号覆盖率问题,附录中还给出了数学模型举例.以此培养学生学习数学的兴趣,调动学生学习数学的积极性,提高学生分析问题和解决问题的能力.

(4) 渗透数学建模思想,注重理论联系实际

将数学实验和数学建模的思想渗透到高等数学的教学中一直是高等数学教育改革的努力方向.本书将与高等数学课程各章节紧密呼应的"数学建模"和"数学实验"内容,作为附录放在教材的后面.它既可以供学生自学,也可以供教师参考,特别是还可以作为一门独立的和高等数学配套的同时进行的实验课程.该课程既可以由老师上课,也可以供师生讨论,还可以直接在老师的指导下以学生为主体进行课程实践.这是一种新的值得期待的尝试.

本书体系结构严谨、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题习题丰富.适合作为普通高等院校各专业高等数学课程的教材使用,可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用,也可供相关专业人员和广大教师参考.

本书的编写大纲由唐晓文提出,并经过编者充分讨论而确定.具体分工如下:

第 1 章至第 5 章由唐燕贞编写,第 7 章、第 8 章及附录由李林编写,第 6 章、第 9 章及第 10 章由唐晓文编写,本书的习题以及参考答案由兰友发编写,王峰、王明锋、薛蓉华、连广鑫也参加了编写工作.全书由唐晓文统稿定稿.

本书的主审韩明教授对本书作了认真的审查,提出了许多宝贵的修改意见和建议,在此表示诚挚的谢意.

在编写过程中,参考了书后所列的参考文献,对参考文献的作者表示衷心的感谢.本书的出版还得到同济大学出版社和编者单位领导及同事的大力支持,在此一并表示感谢.

虽然编者力求本书通俗易懂,简明流畅,便于教学,但由于水平有限,肯定还有一些不尽如人意之处,诚挚欢迎专家和读者提出宝贵意见、本书将不断改进与完善,突出自已的特色,更好地为教学服务.

唐晓文

2014 年 6 月

目　　录

第 6 章 向量代数与空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何问题，平面解析几何的知识对学习一元函数微积分十分重要. 同样，空间解析几何对学习多元函数微积分也是必不可少的. 本章先介绍向量的概念及运算，然后用向量讨论空间的直线与平面，最后介绍空间的曲面与曲线.

6.1 向量代数与空间直角坐标系

6.1.1 向量及其线性运算

1. 向量的概念

在日常生活和生产实践中，经常遇到两类量：一类如温度、距离、质量等，这种只有大小没有方向的量称为数量(标量)；另一类如力、速度、位移、力矩等，它们既有大小又有方向，把这一类量叫向量(或矢量).

在几何上，通常用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 如图 6.1 所示.

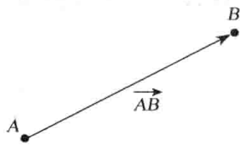

图 6.1

以 A 为起点、B 为终点的向量记为 $\overrightarrow{AB}$，有时也用一个黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 或 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 等表示向量. 印刷用黑体 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$，书写用 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

向量的大小称为向量的模，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为单位向量，模等于零的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$，零向量的方向是任意的.

一般情况下，向量只与它的大小、方向有关，与起点无关，这种与起点无关的向量称为自由向量，本章所研究的向量主要就是这种自由向量(以后简称向量). 根据需要可以把一些向量的起点放在同一点.

若两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 所在的线段平行，这两个向量平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，两个向量只要大小相等且方向相同，称这两个向量是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

设有两个向量平行，经过平行移动可以共线，因此也称两个向量共线.

设有 $k(k \geqslant 3)$ 个向量，把它们起点放在同一点，如果 k 个终点与公共起点在同一个平面上，则称这 k 个向量共面.

2. 向量的线性运算

1）向量的加减法

定义 6.1.1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 6.2 所示. 这种求向量和的方法称为三角形法则.

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时可以以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 6.3 所示. 这种求向量和的方法称为平行四边形法则.

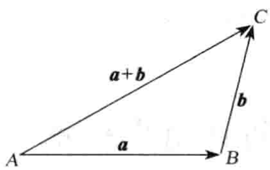

图 6.2

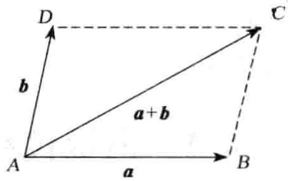

图 6.3

向量的加法满足以下运算律：

交换律　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　（图 6.3）；

结合律　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　（图 6.4）.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反且模相等的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$，即把 $-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相加，便得到 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 这种求向量差的方法也称为三角形法则(图 6.5).

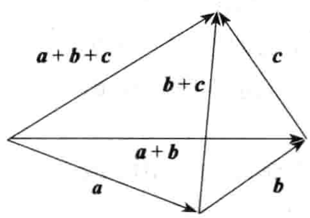

图 6.4

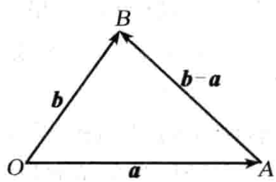

图 6.5

由三角形两边之和大于第三边的原理，可以得到常用的三角不等式.

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$　（$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时等号成立）；

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$　（$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时等号成立）.

2）数与向量的乘法

数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反. 特别地，在 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即为零向量.

$\lambda=1$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；$\lambda=-1$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$. 向量与数的乘法满足以下运算律（图 6.6）：

结合律　$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

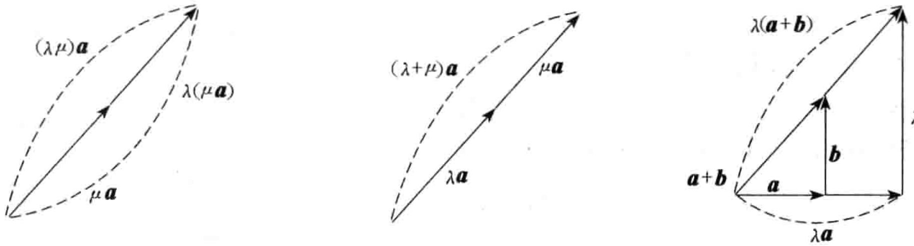

图 6.6

单位向量是非常重要的向量，与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，由以上讨论，有 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 或 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$.

式 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 表明非零向量除以它的模是一个与原向量同向的单位向量，此过程又称将向量单位化（图 6.7）.

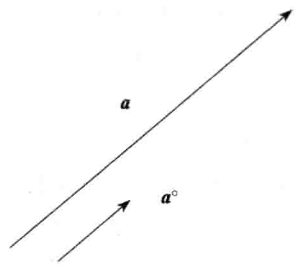

图 6.7

显然，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系，即有：

定理 6.1.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是，存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明　必要性. 若 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$，取 $\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$（$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时取 $+$ 号，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时取 $-$ 号），则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证唯一性. 若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则

$$\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\quad |\lambda-\mu|\,|\boldsymbol{a}|=0.$$

因为 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，所以 $\lambda=\mu$.

充分性显然.

事实上，一个点和一个单位向量就能确定一个数轴，设点 O 和单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定一个数轴 Ox，如图 6.8 所示. 则对于数轴上任意一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，必存在唯一的实数 x 使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，即点 P 与 x 一一对应. 称 x 为点 P 的坐标.

设两点 P_1，P_2 在数轴 Ox 上的坐标分别为 x_1，x_2，$\boldsymbol{i}$ 是与 Ox 轴正向同向的单位向量，如图 6.9 所示，则有 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$，称 x_2-x_1 为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在

Ox 上的坐标.

图 6.8

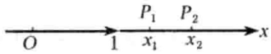

图 6.9

例 6.1.1 在平行四边形 $ABCD$ 中,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, M 为对角线交点,试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$.

解 如图 6.10 所示. 因为平行四边形对角线互相平分,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, 即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$, 得 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. 又因为 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=2\overrightarrow{BM}$, 即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{MB}$, 得 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

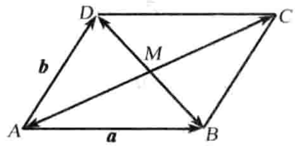

图 6.10

6.1.2 空间直角坐标系、向量的坐标

1. 空间直角坐标系

为了把空间的点与有序的数组对应起来,给出代数方法与几何直观的联系,建立了空间直角坐标系.

定义 6.1.2 过空间一个定点 O 作 3 条互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, 就确定了 3 条以 O 为原点且互相垂直的数轴,这 3 条轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为坐标轴,它们所构成的坐标系称为空间直角坐标系 $Oxyz$, 如图 6.11所示. $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 称为基本单位向量.

习惯上,把 x 轴与 y 轴放在水平面上、z 轴放在铅垂线上,它们的正向符合右手法则,即当右手的 4 个手指从 x 轴正向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向,如图 6.12 所示.

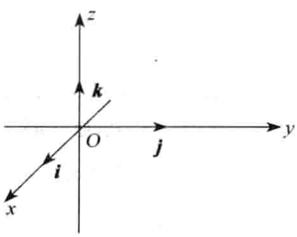

图 6.11

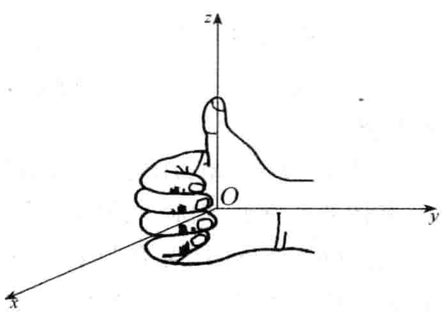

图 6.12

3 个坐标轴两两确定一个平面，称为坐标面. 3 个坐标面把整个空间划分为 8 个部分，每个部分称为卦限，共有 8 个卦限，按照象限的顺序(逆时针)；xOy 平面上方的 4 个卦限依次记为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 卦限，xOy 平面下方的 4 个卦限依次记为 Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 卦限，如图 6.13 所示.

在空间建立了直角坐标系后，空间中任意一点就可以用它的 3 个坐标来表示，设 M 为空间任一点，过点 M 作 3 个分别与 x 轴 y 轴 z 轴垂直的平面，分别交 x，y，z 轴于 P，Q，R 三点，如图 6.14 所示.

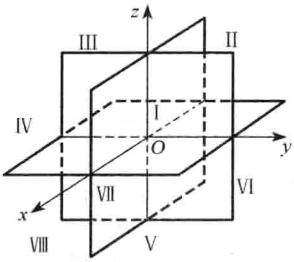

图 6.13

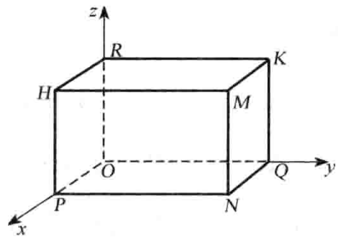

图 6.14

若 P，Q，R 三点在三坐标轴上的坐标分别是 x，y，z，则空间的一点 M 就唯一确定了一个有序数组 x，y，z. 反之，任给一有序数组 x，y，z，可以在 x 轴、y 轴、z 轴上取坐标为 x，y，z 的点 P，Q，R，并过 P，Q，R，分别作与坐标轴垂直的平面，则它们相交于唯一的点 M. 这样就建立了空间的点 M 与有序数组 x，y，z 之间的一一对应关系，这组数 x，y，z 称为点 M 的坐标，记为 $M(x, y, z)$. x，y，z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 特殊点的坐标表示：原点的坐标为 $(0, 0, 0)$，x 轴上点的坐标为 $(x, 0, 0)$，yOz 面上点的坐标为 $(0, y, z)$，点 (x, y, z) 关于 x 轴对称点的坐标为 $(x, -y, -z)$，关于 xOy 面对称点的坐标为 $(x, y, -z)$，关于原点对称点的坐标为 $(-x, -y, -z)$.

2. 空间两点间的距离公式

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，为了求它们之间的距离 d，过 M_1，M_2 各作 3 个分别垂直于 3 条坐标轴的平面，则这 6 个平面围成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，如图 6.15 所示.

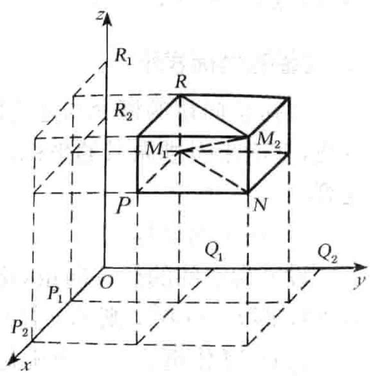

图 6.15

由勾股定理，得 $d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2$，由于 $|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$，$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$，

$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$，所以

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地，空间任一点 $M(x, y, z)$ 到坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 6.1.2 证明以三点 $A(4, 1, 9)$，$B(10, -1, 6)$，$C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

解 因为

$$|AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|BC| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98},$$

故 $|AB| = |AC|$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，又因为 $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$，所以，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

例 6.1.3 在 y 轴上求与两点 $A(1, 0, -3)$ 和 $B(0, 1, -1)$ 距离相等的点 M.

解 因为点 M 在 y 轴上，故可设 M 点坐标为 $(0, y, 0)$，由于

$$|AM| = \sqrt{(-1)^2 + y^2 + 3^2} = \sqrt{y^2 + 10},$$

$$|BM| = \sqrt{(y-1)^2 + 1^2} = \sqrt{y^2 - 2y + 2},$$

故 $|AM| = |BM|$，即 $\sqrt{y^2 + 10} = \sqrt{y^2 - 2y + 2}$，得 $y = -4$.

所以，点 M 为 $(0, -4, 0)$.

3. 向量的坐标表示

在讨论向量的概念与运算时是用几何方法引进的，这个方法比较直观，但计算不方便，下面来引进向量的坐标，把向量用数组表示出来，使向量的运算可以化为数的运算.

1) 向量的坐标

设 $\boldsymbol{r}$ 为空间的任一向量，把向量 $\boldsymbol{r}$ 平移，使它的起点与原点重合，终点为 $M(x, y, z)$，即 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$，则称 $\boldsymbol{r}$ 是点 M 关于原点的向径.

过点 M 作垂直于 3 个坐标轴的平面，它们分别与 x 轴、y 轴、z 轴相交于 P，Q，R 点，如图 6.16 所示. 于是有，$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$，由向量加法有，$\overrightarrow{OM} =$

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$，所以，向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，此式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的单位向量分解式，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别称为 $\boldsymbol{r}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分向量，x，y，z 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$，此式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标式.

又设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为起点、以 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为终点的向量，如图 6.17 所示.

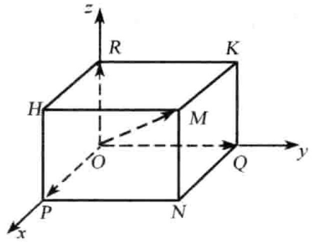

图 6.16

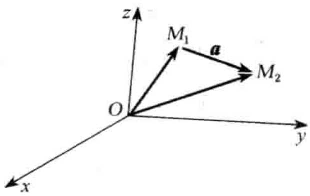

图 6.17

则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$

$$=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

$$=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

其中，$a_x=x_2-x_1$，$a_y=y_2-y_1$，$a_z=z_2-z_1$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$. 即以 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为起点、以 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为终点的向量可表示为 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$（用终点坐标减去起点坐标）.

2）向量运算的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z\}$，

减法：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z\}$，

数乘：$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.

例 6.1.4 设 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的坐标及在 y 轴上的分向量.

解 因为 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}=3(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})+4(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})+(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=14\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，所以，$\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标为 14，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

例 6.1.5 设两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda(\lambda\neq-1)$，在有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 上求一点 $M(x, y, z)$，使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 如图 6.18 所示. 因为 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$，所以，$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$，得 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$，于是，所求点为 $M\Big(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$

$\left.\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$，$M$ 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点.特殊情况，当 $\lambda=1$ 时，得线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

3）向量的模与方向余弦的坐标表示

定义 6.1.3 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ 与 3 个坐标轴正向的夹角分别为 α，β，γ（$0\leqslant\alpha,\ \beta,\ \gamma\leqslant\pi$），则称 α，β，γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，如图 6.19 所示.方向角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为方向余弦.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 为起点、$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 为终点的向量，则由空间两点间距离 $\overrightarrow{M_1M_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ 得向量 $\boldsymbol{a}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

由图 6.19 得方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

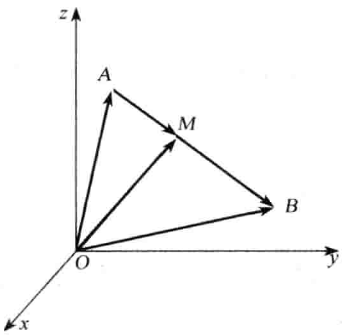

图 6.18

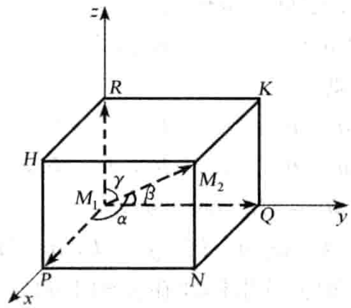

图 6.19

任意向量的方向余弦有性质：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为：$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,\ a_y,\ a_z\}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$，由此可知，一个向量的方向完全由方向角（或方向余弦）确定.

例 6.1.6 已知两点 $M_1(4,\ \sqrt{2},\ 1)$，$M_2(3,\ 0,\ 2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦