



舰船半解析式惯性导航 原理及应用

杨晓东 施闻明 夏卫星 程建华 编著
赵琳 主审



国防工业出版社
National Defense Industry Press

舰船半解析式惯性 导航原理及应用

杨晓东 施闻明 夏卫星 程建华 编著
赵琳 主审

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书较全面地介绍了舰船半解析式惯性导航系统的基本原理和关键系统技术,给出了作者在舰船惯性导航领域的最新研究成果。全书共6章,内容主要包括:惯性导航基础,半解析式惯性导航系统及其误差分析,惯性导航系统的初始对准与测漂,惯性导航系统的综合校正,水下运载器定深旋回状态的惯导位置误差分析,惯性导航信息处理中的数学方法。

本书条理清晰,理论描述严密,有较强的系统性、科学性,并具有较好的可读性。本书可作为高等院校舰船导航专业师生的教学参考书,也可供有关工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

舰船半解析式惯性导航原理及应用 / 杨晓东等编著.

—北京:国防工业出版社,2014.5

ISBN 978-7-118-09694-1

I. ①舰… II. ①杨… III. ①军用船-惯性导航系统 IV. ①U674.7

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第216070号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

开本787×1092 1/16 印张18½ 字数424千字

2014年5月第1版第1次印刷 印数1—2500册 定价58.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

能够适用于舰船的惯性导航系统不仅应具有很高的导航精度，而且还应具有在各种运动条件下长时间导航精度保持的能力。这样的性能不仅对材料和制造技术提出了特殊要求，而且对控制理论和惯性导航理论提出了有别于其他应用领域的特殊要求。由于舰船运动特征的独特性，形成了应用于舰船上的惯性导航技术特殊的研究领域或方向。

作为舰船导航系统的核心装备，舰船惯性导航系统充分体现了系统性、综合性、特殊性、复杂性和适装性，对于其导航参数的全面性和精度长期稳定性的探索一直是舰船惯性导航理论的重要研究内容之一。在舰船惯性导航理论和技术的著作中，当数 1983 年国防工业出版社出版的《惯性导航系统》最为经典。随着现代舰船对惯性导航技术要求的不断提升，其所要求的导航信息不论是内容还是精度较之以往都有很大的不同。现代材料和制造技术的进步，一定程度上提高了现代惯性导航系统的硬件水平，同时许多学者对舰船惯性导航理论、舰船运动特性进行了广泛研究，这些都为新的舰船惯性导航理论的发展提供依据，并促进舰船惯性导航技术的发展。

本书分为 6 章和 2 个附录，第 1 章简要介绍了舰船半解析式惯性导航的基础知识，包括地球及其重力场、惯性导航基本理论和半解析式惯性导航系统构成原理及其控制方程；第 2 章就半解析式惯性导航系统及其误差分析进行了较详尽的阐述，包括无阻尼惯性导航系统的基本方程与误差方程、惯性导航系统的阻尼方法设计与分析、惯性导航系统的统一方程描述和重力异常对惯性导航系统误差的影响；第 3 章论述了惯性导航系统的初始对准与测漂，包括惯性导航系统初始对准、陀螺仪的测漂和加速度计标定；第 4 章较为深入地分析了惯性导航系统的综合校正，主要包括惯性导航系统的综合校正、基于卡尔曼滤波的综合校正、采用组合导航方法的综合校正和弱航态约束的水下惯性导航系统综合校正；第 5 章对惯导位置误差分析理论在运载器水下定深旋回时的应用进行了分析和阐述，主要包括水下运载器定深旋回时的性能分析、水下运载器定深旋回时位置误差估计和评估；第 6 章就惯性导航信息处理中常用数学方法和评估进行了介绍，主要包括自回归滑动平均 $ARMA(p,q)$ 、序列预处理、卡尔曼滤波算法及其效能评估、基于熵权的导航信息估计算法效能分析和估计算法效能分析仿真。在本书的附录部分，就舰船

惯性导航系统中常用的控制理论和一种快速微分方程解算方法进行了介绍，以供相关人员方便使用和研究。

参加本书编写的人员有海军潜艇学院杨晓东教授、施闻明讲师、夏卫星博士和季超博士，哈尔滨工程大学程建华副教授。

在编写和出版中，哈尔滨工程大学赵琳教授对书稿进行了认真、细致的审阅，并提出了许多宝贵意见和建议，在此表示感谢。

感谢海军潜艇学院专著出版基金的鼎力相助和学院各级领导、同志们的大力支持。同时感谢国家自然科学基金（61273081、61374007、61104036）和中央高校科研业务费专项资金（HEUCFX41309）对本书出版的支持。

由于作者水平有限，资料掌握不够充分，疏漏与不足在所难免，诚望同行专家和广大读者批评指正。

编著者
2014年4月

目 录

第 1 章 惯性导航基础知识	1
1.1 地球与地球重力场	1
1.1.1 地球与导航物理量描述	1
1.1.2 地球重力场	6
1.1.3 惯导常用坐标系与坐标变换	9
1.2 惯性导航基本理论	16
1.2.1 惯性导航的牛顿定律基础	16
1.2.2 舒勒调整原理	23
1.3 半解析式惯性导航系统及其数学描述方程	26
1.3.1 半解析式惯性导航系统	26
1.3.2 惯性导航系统的控制方程	27
1.3.3 惯性导航系统的基本方程	32
第 2 章 半解析式惯导系统误差分析和阻尼	37
2.1 无阻尼惯性导航系统的误差分析	37
2.1.1 无阻尼惯性导航系统的误差方程	37
2.1.2 静基座下的无阻尼惯性导航系统误差分析	42
2.1.3 重力异常对惯性导航系统误差的影响	60
2.2 惯性导航系统的阻尼	63
2.2.1 外水平阻尼	66
2.2.2 方位阻尼	71
2.2.3 全阻尼	73
2.2.4 阻尼网络设计	74
2.3 惯性导航系统的统一方程	83
2.3.1 工作状态的统一控制方程	83
2.3.2 工作状态转换时的超调	86
2.3.3 惯性导航系统的仿真模型建立	90
第 3 章 惯性导航系统的初始对准与测漂	95
3.1 惯性导航系统的初始对准	96
3.1.1 粗对准	96
3.1.2 精对准	99
3.1.3 初始对准精度分析	112
3.2 陀螺仪测漂	124

3.2.1	惯性器件误差模型	124
3.2.2	陀螺漂移的测定与补偿	129
3.2.3	陀螺标度因数的测定与修正	136
3.2.4	利用舒勒回路特性确定系统标度	139
3.3	加速度计标定	140
3.3.1	加速度计误差模型	140
3.3.2	加速度计的零位标定	143
第 4 章	惯性导航系统的综合校正	144
4.1	常值综合校正和随机综合校正	144
4.1.1	Ψ 方程	144
4.1.2	外部信息综合校正方法	151
4.2	基于卡尔曼滤波的综合校正	165
4.3	采用组合导航方法的综合校正	171
4.3.1	状态方程的建立	171
4.3.2	量测方程的建立	174
4.4	弱航态约束的水下惯性导航系统综合校正	175
4.4.1	弱航态约束的综合校正原理	175
4.4.2	弱航态约束的陀螺漂移估计	176
4.4.3	航向缺失时弱航态综合校正	178
第 5 章	水下运载器定深旋回时惯导位置误差分析	186
5.1	水下运载器定深旋回时的性能分析	186
5.1.1	旋回性运动简析	186
5.1.2	旋回运动参数分析	187
5.2	水下运载器定深旋回时的位置误差估计分析	189
5.2.1	转舵阶段水下运载器位置误差估计模型	189
5.2.2	过渡阶段水下运载器位置误差估计模型	189
5.2.3	旋回阶段水下运载器位置误差估计模型	191
5.3	定深旋回时水下运载器的位置误差评估	204
5.3.1	离差度量法	205
5.3.2	定深旋回时水下运载器的位置误差评估实验与分析	205
第 6 章	惯性导航信息处理中的数学方法	214
6.1	自回归滑动平均 (ARMA) 平稳序列参数测量的估计	214
6.1.1	自回归滑动平均 $ARMA(p,q)$	214
6.1.2	序列的预处理	216
6.2	惯性导航信息的线性估计方法	220
6.2.1	卡尔曼滤波算法	222
6.2.2	卡尔曼滤波效能评估	236
6.3	基于熵权的导航信息估计算法效能分析	248
6.3.1	熵权法确定指标权重	249

6.3.2	基于熵权的估计算法效能分析方法	252
6.3.3	估计算法效能分析仿真	252
附录 A	线性定常系统的控制性能分析	262
A.1	线性系统的数学描述	262
A.1.1	线性系统及其性质	262
A.1.2	定常线性系统及其求解	263
A.1.3	线性时变系统及其求解	265
A.2	能控性和能观测性的分析	265
A.2.1	系统的能控性	265
A.2.2	系统的能观性	266
A.3	定常线性系统结构及零极点分析	268
A.3.1	线性系统的标准结构	268
A.3.2	传递函数的零极相消	270
A.3.3	极点配置与系统镇定	271
A.4	状态观测器的数学描述	272
A.4.1	状态观测器的一般描述	272
A.4.2	离散定常系统的观测器描述	274
A.5	系统稳定性分析	275
A.5.1	稳定性	275
A.5.2	李雅普诺夫函数	276
A.5.3	李雅普诺夫函数的构成	276
A.6	黎卡提方程	278
A.6.1	控制系统的黎卡提方程	278
A.6.2	终端时刻 T 的伴随变量 $P(t)$ 的确定	279
附录 B	Runge-Kutta 法	280
参考文献		282

第 1 章 惯性导航基础知识

惯性导航系统(简称惯导系统)是利用惯性敏感元件在舰船内部测量舰船相对惯性空间的线运动和角运动参数,在给定的运动初始条件下,根据牛顿运动定律,推算舰船的瞬时速度和瞬时位置。惯性导航系统分为平台式和捷联式两大类,前者是将陀螺仪和加速度计安装在一个稳定平台上,以平台坐标系为基准测量舰船运动参数;后者是将惯性敏感元件(陀螺仪和加速度计)直接安装在舰船上,测量到的舰船线运动和角运动参数是沿船体坐标轴上的分量,然后通过“姿态矩阵”获得在惯性坐标系或当地地理坐标系的速度和位置。由于惯性导航完全依靠舰船自身设备进行导航,不与外界发生任何光、声、磁、电的联系,工作不受环境条件和人为干扰,因此是一种自主式的导航方法。

1.1 地球与地球重力场

1.1.1 地球与导航物理量描述

1.1.1.1 地球的形状

地球表面是一个凹凸不平、形状复杂的物理面,其高低相差达 20 km 左右。为研究方便,假想将风平浪静的海平面向陆地延伸,则由海水平面所包围的曲面就定义为地球的形状,并将这个曲面称为大地水准面。大地水准面是一个重力等位面,其水准面的法线与重力方向一致。由大地水准面所包围的几何形体称为大地球体。但由于地球的重力是引力和自转向心力的合力,加之地球质量的分布不均匀,太阳、月亮等天体的影响,大地球体不是一个规则的几何体。在实际应用中,可将它近似成一个可以利用数学公式描述的几何形体,其近似程度根据实际需要来确定。

若把地球看成是一个圆球体,则有

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \quad (1.1.1)$$

式中: R 为地球的平均半径, $R=(6371.02\pm0.05)\text{km}$ 。

把地球近似看成圆球体,常称为地球的第一近似体。第一近似体对于要求精度不高或在较小范围内进行的导航计算而言既方便又实用,并可使实际问题大为简化。

一种更为接近地球实际形体的近似是把地球看成一个旋转椭圆体,称为第二近似。若将赤道和纬度圈均当作椭圆,则为地球的第三近似体,称为三轴椭球体或地球椭球体。这种近似体给测量带来极大的不便,因此,除个别专门问题外,通常采用第二近似体。在大地测量中,用以代表地球的某种旋转椭圆体称为地球椭球,即旋转椭球。

第二近似体以地球的极(地)轴为旋转轴,以某一子午圈为母线,绕地轴旋转一周而

成。长半轴 a 在赤道平面内，短半轴 b 在极轴上，如图 1.1.1 所示，其描述公式为

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \tag{1.1.2}$$

椭圆体的参数除长半轴 a 、短半轴 b 外，还有扁率(又称椭圆度) ε ，其计算表达式为

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a}$$

由于世界各国对地球的测量所采取的方法不尽相同，在工程计算中往往采用不同的椭圆体。常见的地球参考椭圆体有 5 种，其椭圆体参数如表 1.1.1 所列。

表 1.1.1 地球参考椭圆体参数

椭 球	长半轴 R_e /km	短半轴 R_p /km	椭圆度 ε	适用地区或系统
克拉克(1866 年)	6378.206	6356.584	1/295	美国
海福特(1909 年)	6378.388	6356.912	1/297	西欧
克拉索夫斯基(1938 年)	6378.24500000	6356.86301877	1/298.3	俄罗斯、中国
IUGG1975 椭球	6378.14000000	6356.75528816	1/298.257	—
WGS-84	6378.137	6356.752	1/298.257	GPS

自 1952 年以来，我国一直采用克拉索夫斯基椭球，直到 1980 年采用国际大地测量和地球物理联合会 1975 年推荐的椭球，简称 IUGG1975 椭球。

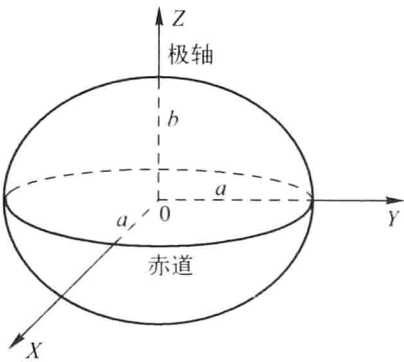


图 1.1.1 旋转椭圆体图

从 2008 年 7 月 1 日起，启用 2000 国家大地坐标系。2000 国家大地坐标系的原点为包括海洋和大气的整个地球的质量中心，其 Z 轴由原点指向历元 2000.0 的地球参考极的方向，该历元的指向由国际时间局给定的历元 1984.0 作为初始指向来推算，定向的时间演化保证相对地壳不产生残余的全球旋转； X 轴由原点指向格林尼治参考子午线与地球赤道面(历元 2000.0)的交点； Y 轴与 Z 轴、 X 轴构成右手正交坐标系。2000 国家大地坐标系的尺度为在引力相对论意义下的局部地球框架下的尺度。2000 国家大地坐标系采用的地球椭球参考数数值如下：

- 长半轴
- $a=6378137\text{ m}$
- 扁率
- $f=1/298.257222101$
- 地球引力常数
- $GM_e=3.986004418\times10^{14}\text{ m}^3/\text{s}^2$

自转角速度	$\Omega=7.292115\times10^{-5}\text{ rad/s}$
短半轴	$b=6356752.31414\text{ m}$
极曲率半径	$c=6399593.62586\text{ m}$
第一偏心率	$e=0.0818191910428$
第二偏心率	$e'=0.0820944381519$
1/4 子午圈长度	$Q=10001965.7293\text{ m}$
椭球平均半径	$R_1=6371008.77138\text{ m}$
相同表面积的球半径	$R_2=6371007.18092\text{ m}$
相同体积的球半径	$R_3=6371000.78997\text{ m}$
椭球的正常位	$U_0=62636851.7149\text{ m}^2/\text{s}^2$
动力形状因子	$J_2=0.001082629832258$
球谐系数	$J_4=-0.00000237091126$
球谐系数	$J_6=0.00000000608347$
球谐系数	$J_8=-0.00000000001427$
赤道正常重力值	$\gamma_e=978.03253361\text{ Gal}^{①}$
两极正常重力值	$\gamma_p=983.21849379\text{ Gal}$
正常重力平均值	$\gamma=979.76432224\text{ Gal}$
纬度 45° 的正常重力值	$\gamma_{45^\circ}=980.61977695\text{ Gal}$

1.1.1.2 地球的点、线、面

1. 地极

如图 1.1.2 所示，地球的自转轴 $P_N P_S$ 为地轴。地轴与地球表面相交的两个点 P_N 和 P_S 为地极。其中 P_N 为地理北极， P_S 为地理南极。

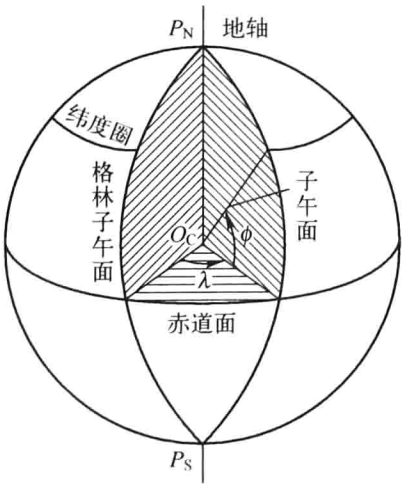


图 1.1.2 地球上的点、线、面

2. 赤道与纬度圈

过地心并垂直于地轴的平面为赤道面，它与地球表面的交线为赤道。赤道把地球分

① $1\text{ Gal}=1\text{ cm/s}^2$ 。

为两个半球，包含北极的称为北半球，包含南极的称为南半球。平行于赤道的小圆为纬度圈。

3. 子午面与子午圈

通过地球两个极点的平面为子午面，它有无数个。其中通过英国格林尼治天文台的子午面为格林子午面，也称为本初子午。格林子午面把地球分成东西两个半球，即东半球和西半球。子午面与地球表面的交线为子午圈。

4. 经度线与基准经度线

自地球两极子午圈的一半为经度线。规定通过格林尼治天文台的经度线为基准经度线，又称本初子午线。规定基准子午线为 0° 。自基准子午线向东 180° ，为东经；自基准子午线向西 180° ，为西经。

1.1.1.3 地球的曲率半径

当把地球近似为旋转椭圆体来研究时，需要用到椭球的曲率半径等参数。由于地球是椭圆体，在地球表面的不同位置，曲率半径是不同的，是纬度的函数。在导航中，常用到以下三种曲率半径。

1. 纬度圈半径

纬度圈是一个圆，如图 1.1.3 所示，过 A 点的纬度圈半径为

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1.1.3)$$

式中： $e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$ ， e 为椭球偏心率。

纬度圈半径 r 随纬度 φ 的增高而减小。在赤道上， $r = a$ ；在地理极点上， $r = 0$ 。如果将地球视为半径 R 的圆球体，则

$$r = R \cos \varphi \quad (1.1.4)$$

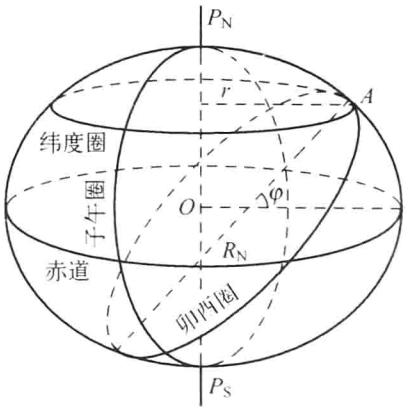


图 1.1.3 地球曲率半径

2. 子午圈曲率半径

子午圈是一个椭圆，纬度不同，弯曲度亦不同。子午圈曲率半径为

$$R_M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \quad (1.1.5)$$

子午圈曲率半径 R_M 随纬度 φ 的增高而增大，在赤道处 R_M 最小，在极点处 R_M 最大。

3. 卯酉圈曲率半径

过 A 点所作和子午面垂直的法线平面与椭球表面的交线称为卯酉圈，如图 1.1.3 所示，其曲率半径为

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1.1.6)$$

卯酉圈曲率半径 R_N 随纬度 φ 的增高而增大，在赤道处最小， $R_N = a$ ，即卯酉圈与赤道重合；在地理极点处 R_N 最大，即变成子午圈。

由式(1.1.3)、式(1.1.6)可知，卯酉圈曲率半径 R_N 与纬度圈半径 r 的关系为

$$r = R_N \cos \varphi \quad (1.1.7)$$

比较式(1.1.5)与式(1.1.6)可以看出,除在两极点 $R_M=R_N$ 外,在其他任何纬度上均有 $R_N>R_M$ 。同一点的 R_M 、 R_N 在同一条直线上,但长短不等。 R_N 的端点落在地球短轴上。

1.1.1.4 地球自转角速度

地球在惯性空间既绕其地轴自转,又绕太阳公转。地球自转一周为一天,公转一周为一年。在一年中,地球相对于太阳转约 365 转,但由于有一周公转,地球相对于惯性空间即遥远的恒星实际上转了 366 转。地球在 24 h 内相对惯性空间的自转角速度为

$$\Omega = 1.0027379 \text{ 转}/24 \text{ h} = 7.2921158 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

如果用每小时旋转的度数来表示,则

$$\Omega = 15.041069^\circ / \text{h}$$

地球自转角速度是一个向量,与地轴平行,指向北极。如果在北极上空俯视地球自转的方向,为逆时针方向。

1.1.1.5 地球上的方向、位置、速度和航程

1. 地球上方向的确定

舰船在地球上的运动都有一定的方向。地球上任意一点的方向都是以真北线为基准来确定的。

在舰船处于平稳状态时,通过舰船艏尾两点连线的铅垂面与真地平面的交线,称为舰船艏尾线,艏尾线向舰艏延长的方向线叫航向线,如图 1.1.4 所示。真北线与航向线之间的夹角叫真航向,用符号 C_t 表示(或用 TC 表示)。真航向 C_t 以真北为基准,按顺时针划分为 $0^\circ \sim 360^\circ$ 。

测者与目标的铅垂面在真地平面的交线叫做目标方位线。目标方位线与真北线之间的夹角叫做真方位,用符号 B_t 表示(或用 TB 表示)。真方位 B_t 也是以真北为基准顺时针划分为 $0^\circ \sim 360^\circ$ 。航向线与目标方位线之间的夹角叫做舷角,用符号 Q 表示。以航向线为基准向左、右各划分为 $0^\circ \sim 180^\circ$ 。目标在左舷时叫左舷角,为负;目标在右舷时叫右舷角,为正。舷角为 90° 时,又叫正横。真方位 B_t 、真航向 C_t 和舷角 Q 三者之间的关系为

$$B_t = C_t + Q \quad (1.1.8)$$

式中: Q 值的符号为左舷角 “-”, 右舷角 “+”。

2. 地球上的位置

地球上任意一点的位置可以用地理坐标纬度和经度两个参量来表示。地球表面上某点 O 的法线 OO' 与赤道面的夹角叫该点的地理纬度,简称纬度,用符号 φ 表示,如图 1.1.5 所示。纬度是以赤道为基准,分别向北、南各划分为 $0^\circ \sim 90^\circ$,赤道以北的叫北纬,赤道以南的叫南纬。地球椭球面上某点 O 的向径 OO_e 与赤道面的夹角叫该点的地心纬度,用符号 φ' 表示。地心纬度一般不等于地理纬度,最大误差为 $11'.5$ 。当纬度为 0° 或 90° 时, $\varphi' = \varphi$ 。若把地球看成圆球体,那么法线将通过地心 O_e ,则地心纬度与地理纬度一致。

在图 1.1.5 中, a 为椭圆体的长半径, b 为椭圆体短半径, E 为焦点。地球表面上某

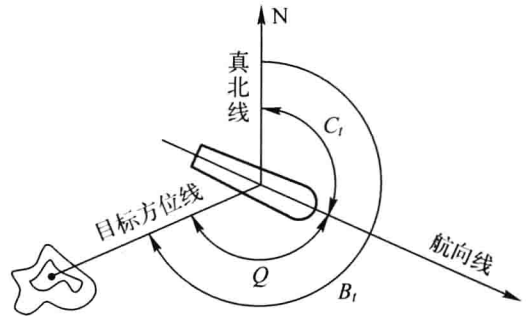


图 1.1.4 地球上的方向与方位

点 O 的子午面与格林尼治子午面的夹角, 或该两面夹角在赤道上所对应的弧长, 叫该点的地理经度, 简称经度, 用符号 λ 表示, 如图 1.1.2 所示。经度是以格林尼治经度线为基准, 向东、西各划分为 $0^\circ \sim 180^\circ$ 。基准经度以东的叫东经, 以西的叫西经。东经(或西经) 180° 的经度线叫日界线(又称为国际日期变更线)。当舰船向东航行通过日界线时, 应将日期减少一天, 反之则增加一天。日界线是一条折线, 目的是为了避开太平洋中的某些国家或岛屿在同一天内出现两个日期。

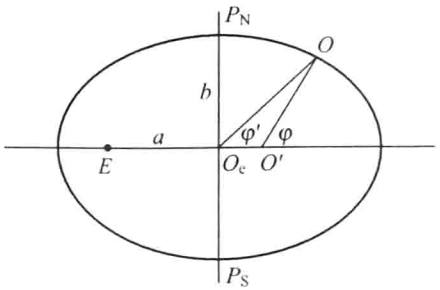


图 1.1.5 地理纬度与地心纬度

在海上度量距离的单位常用海里, 用 $n\text{ mile}$ 表示。地球椭圆子午线上纬度 $1'$ 的弧长称为 $1n\text{ mile}$, 并规定其长度为 1852 m 。若以米为单位, 则在不同的地理纬度 $1'$ 的弧长是不同的, 其计算公式为

$$S_{1'} = 1852.3 - 9.3 \cos 2\varphi \tag{1.1.9}$$

1.1.2 地球重力场

1.1.2.1 重力加速度

重力加速度是地球物理研究中的一个基本向量, 也是对一般力学系统进行力学分析时需考虑的一个重要参数。在进行一般性的研究分析和使用时, 可将重力加速度作为常量来处理。但实际上由于地球是一个质量巨大的旋转球体, 其内部密度分布不均匀, 外部地形地貌也各不相同, 显然将重力加速度作为常量来处理会产生一定的误差。在对精度要求不是很高的情况下, 将其作为常量处理所带来的误差较小时, 重力

的异常可以忽略不计, 并可在一定程度上减少计算量。在精度要求较高的系统中, 重力加速度往往不能再看作常量, 必须精确考虑重力的变化。

地球表面的重力加速度随着纬度的变化而变化。由于受地球自转的影响, 地球表面的物体随地球做圆周运动, 如图 1.1.6 所示, 物体所受的重力 F_g 是万有引力 F_G 的一个分力, 维持物体随地球自转的向心力 F_X 是万有引力 F_G 的另一个分力, 设 F_G 和 F_X 之间的夹角为 θ , 则由几何关系得

$$F_G = F_g + F_X \tag{1.1.10}$$

现设地球的质量为 M , 半径为 R , 自转角速度为 Ω , 地球表面的重力加速度为 g , 物体的质量为 m , 绕地轴做匀速圆周运动的半径为 r , 则

$$F_X = mr\Omega^2, \quad r = R \cos \theta, \quad F_g = mg$$

且有

$$F_G = G \frac{Mm}{R^2}$$

由上面 4 个式子得

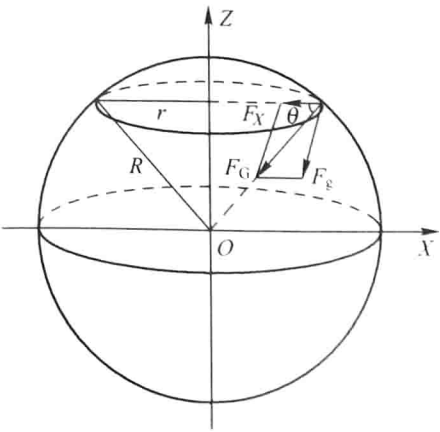


图 1.1.6 地球表面物体受力

$$g = \sqrt{G^2 \frac{M^2}{R^4} + R\Omega^2 \cos^2 \theta \left(R\Omega^2 - 2G \frac{M}{R^2} \right)} \tag{1.1.11}$$

由式(1.1.11)可见,地球表面的重力加速度与物体的质量无关,由 M 、 R 、 Ω 、 θ 共同决定;重力加速度的大小随纬度变化。

非赤道上的物体随地球自转做匀速圆周运动,所需向心力小于万有引力。并且纬度越高, θ 角越大, $\cos\theta$ 越小, g 越大。

在地球的南北极处, $\theta = 90^\circ$, $\cos\theta = 0$, 得

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (1.1.12)$$

此时物体所受的万有引力即为重力,重力加速度最大。在赤道上, $\theta = 0^\circ$, $\cos\theta = 1$, 可知此时的重力加速度最小,其值为

$$g = G \frac{M}{R^2} - R\Omega^2 \quad (1.1.13)$$

重力加速度的方向除了在地球的两极和赤道上指向地心外,在地球表面的其他地方均不指向地心。

1.1.2.2 地球重力场的级数形式表达

地球重力场是由两个长期分量和一个时间变化分量组成。占总重力场的 99.9% 的长期分量是由地球引力和地球旋转引起的;时间变化分量是由月亮和太阳的潮汐引起的,这一部分相对比较小。

地球重力场在球坐标系中的表达式为

$$W(\lambda, \varphi, r) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (c_{n,m} \cos(m\lambda) + s_{n,m} \sin(m\lambda)) P_{n,m}(\sin\varphi) \quad (1.1.14)$$

式中: λ 、 φ 、 r 是点的球坐标; G 是地心引力常数; R 是地球平均半径; $P_{n,m}(\sin\varphi)$ 是完全规格化的 n 阶 m 次勒让德函数; $C_{n,m}$ 和 $S_{n,m}$ 是地球重力场的完全规格化的球谐函数系数。

地球重力场在三位笛卡儿坐标系中的表达式为

$$W(\lambda, \varphi, r) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^n n_{n,m} \sum_{k=0}^{(n-m)/2} b_{n,m,k} z^{n-m-2k} (x^2 + y^2 + z^2)^{k-n/2} \cdot \left\{ c_{n,m} \sum_{i=0}^{m/2} (-1)^i \binom{m}{2i} x^{m-2i} y^{2i} + s_{n,m} \sum_{i=0}^{(m-1)/2} (-1)^i \binom{m}{2i+1} x^{m-(2i+1)} y^{2i+1} \right\} \quad (1.1.15)$$

式中: $b_{n,m,k} = (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!}$, $n_{n,m}$ 为使勒让德函数完全规格化的乘因子,

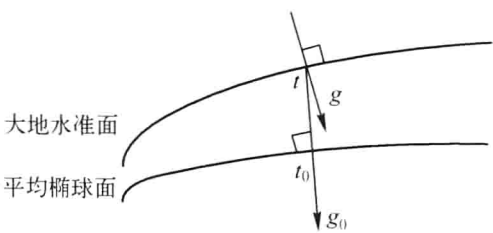
即 $P_{n,m}(t) = n_{n,m} P'_{n,m}(t)$, $P_{n,m}(t)$ 为完全规格化的勒让德函数, $P'_{n,m}(t)$ 则表示为未完全规格化的勒让德函数。

实际上,由于地球并非是一个理想的旋转椭球体,且密度不均匀,大地水准面上一点 t 处的实际重力 g 与该点在平均椭球面上对应点 t_0 处的正常重力 g_0 间存在着差异,这种差异不仅表现在数值上,而且表现在方向上。实际重力相对正常重力在数值上的偏差称为重力异常,记为 Δg (一般用毫伽表示, $1 \text{ mGal} = 0.001 \text{ cm/s}^2$)。实际重力相对正常重力在方向上的偏差,称为垂线偏差(一般为几角秒或几十角秒)。

重力异常是引起大地水准面偏离参考椭球面的质量分布产生的主要原因。这种异常包括大地水准面和椭球面之间的高程差的影响,但这种高程差影响比较小。当

大地水准面处于椭球面之外时, 这种高程差影响约等于自由空气改正。对于不在大地水准面上的点, 计算重力异常时必须将该点的重力值归算到大地水准面上。由图 1.1.7 可得, 重力异常的表达式为

$$\Delta g = g - g_0 \quad (1.1.16) \quad \text{图 1.1.7 地球表面重力分析}$$



计算垂线偏差的球面积分公式, 即 Vening-Meinesz 公式, 为

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{\partial}{\partial \psi} S(\psi) \cos A d\sigma \\ \eta = -\frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{\partial}{\partial \psi} S(\psi) \sin A d\sigma \end{cases} \quad (1.1.17)$$

式中: ξ 为垂线偏差向南的分量; η 为垂线偏差向西的分量; γ 为正常重力值; $S(\psi)$ 为 Stokes 函数。

1.1.2.3 地球异常重力场模型

重力势 W 是描述地球重力场的基础, 它表示单位质量被从无穷远处移动到位于以地心为原点的坐标系中某一点时重力所做的功。大地测量中的水准面, 即是曲面上任一点的重力与曲面正交, 这样的曲面是处于均衡状态的液体表面。根据物理知识可知, 这样的曲面是一个等位面。不同的常数对应不同的等位面, 即水准面。设 W 为重力位, 则

$$W(x, y, z) = \text{常数}$$

设重力 g 的反方向为 h , 则由物理学知

$$-g = dW/dh$$

式中: dW 是两个无限接近的水准面之间的位差, 即这两个水准面之间的距离。

上式表明, 水准面之间距离与 g 成反比。由于在地球重力场中, 同一水准面上的点, 靠近赤道的重力小, 靠近两极的重力大, 即重力变化的总趋势是随纬度增大而增大。

由于地球重力场和地球内部密度变化, 水准面的变化形态特别是 $W=W_0$ (对应于大地水准面) 是不可能精确测定的。为研究复杂的地球重力场, 需要引入一个与地球重力场十分接近且易于计算的“正常重力场”, 并可将其作为实际地球重力场的基准。

在工程上, 重力加速度的大小随纬度 φ 变化的规律可近似表述为

$$g(\varphi) = 978.049(1 + 0.0052884 \sin^2 \varphi - 0.0000059 \sin^2 2\varphi) \quad (1.1.18)$$

在 WGS-84 坐标系中, 重力加速度的计算可表述为

$$g(\varphi) = 978.032677 \frac{1 + 0.00193185138639 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - 0.00669437999013 \sin^2 2\varphi}}$$

在以上两式中, 所计算的重力加速度值的单位为 cm / s^2 。

与平均海平面相一致的等势面 $W=W_0$ 给出了一个重力平面。通常把 W 的常量部分作为椭圆体的位势 U , 地球椭圆体表面可表述为位势 $U=W_0$ 的一个面, 其扰动势可表述为

$$T = W - U \quad (1.1.19)$$

式(1.1.19)也看作是地球异常重力场的一种表达方式, 重力异常 Δg 可看作是地球异

常重力场与地球形状之间的一种关系，它反映了在重力平面一点 M 的重力加速度 $\mathbf{g}_M$ 与椭圆体表面点 N 法线上标准重力加速度 $\tilde{\mathbf{g}}$ (即 $\mathbf{g}_0$) 间的差值，即

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_M - \tilde{\mathbf{g}} \tag{1.1.20}$$

如图 1.1.8 所示，线段 MN 表示重力平面的高度，向上为正；重力平面 M 处法线与椭圆体表面点 N 处法线存在有一个偏差角，将重力在这两个方向进行分解，得子午面上分量 ξ ，第一垂直圈平面上分量 η 。

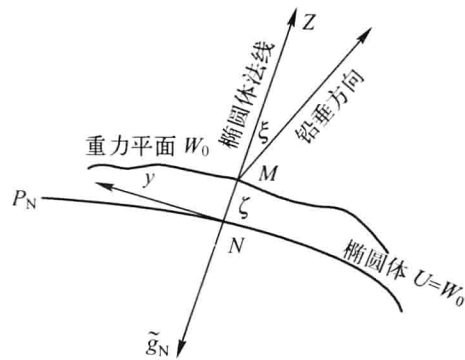


图 1.1.8 重力平面与椭圆体

ξ —铅垂偏差角； ζ —重力平面高度； $\tilde{\mathbf{g}}$ —标准重力加速度。

1.1.3 惯导常用坐标系与坐标变换

1.1.3.1 惯性导航常用的坐标系

1. 地心惯性坐标系 $OX_iY_iZ_i$

如图 1.1.9 所示，以地心 O 为原点， OZ_i 轴沿地球自转轴方向而指向某颗恒星， OX_i 轴和 OY_i 轴在赤道平面内，亦指向两颗恒星。由这三根坐标轴构成的右手笛卡儿坐标系称为地心惯性坐标系。地心惯性坐标系不参与地球的自转，即地球的自转不改变三个坐标轴在惯性空间的方位，代表了惯性空间。在惯性导航系统中，常用的惯性坐标系主要指的是太阳中心惯性坐标系，由于舰船仅在地球表面运动，可用地球中心惯性坐标系代替太阳中心惯性坐标系，同时忽略太阳的引力和地理中心的平移加速度。

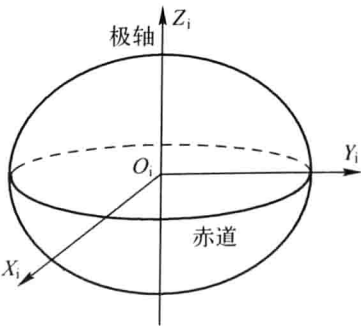


图 1.1.9 地心惯性坐标系

而地理坐标系 $OX_eY_eZ_e$ 的 Z_e 轴沿地轴的方向， X_e 轴在赤道平面与格林威治子午面的交线上， Y_e 轴也在赤道平面内与 X_e 、 Z_e 轴构成右手坐标系。 $OX_eY_eZ_e$ 坐标系与地球固连且随地球一起转动。

2. 地理坐标系 $OX_lY_lZ_l$

如图 1.1.10 所示，以舰船在地球表面上的位置 O 为坐标原点，通过此点作地球的切平面(当地水平面)，在此平面内指东为 OX_l 轴，指北为 OY_l 轴，沿法线方向指天顶为 OZ_l 轴，由此组成的右手笛卡儿坐标系 $OX_lY_lZ_l$ 称为地理坐标系。该坐标系随舰船一起运动，但各坐标轴相对地球的方位不变，故该坐标系也称东北天坐标系，它是舰船的水平及方位信息的测量基准。舰船导航定位经常用到这一坐标系。

地理坐标系 $OX_lY_lZ_l$ 还有其他描述方法，如北、西、天坐标系，北、东、地坐标系等。