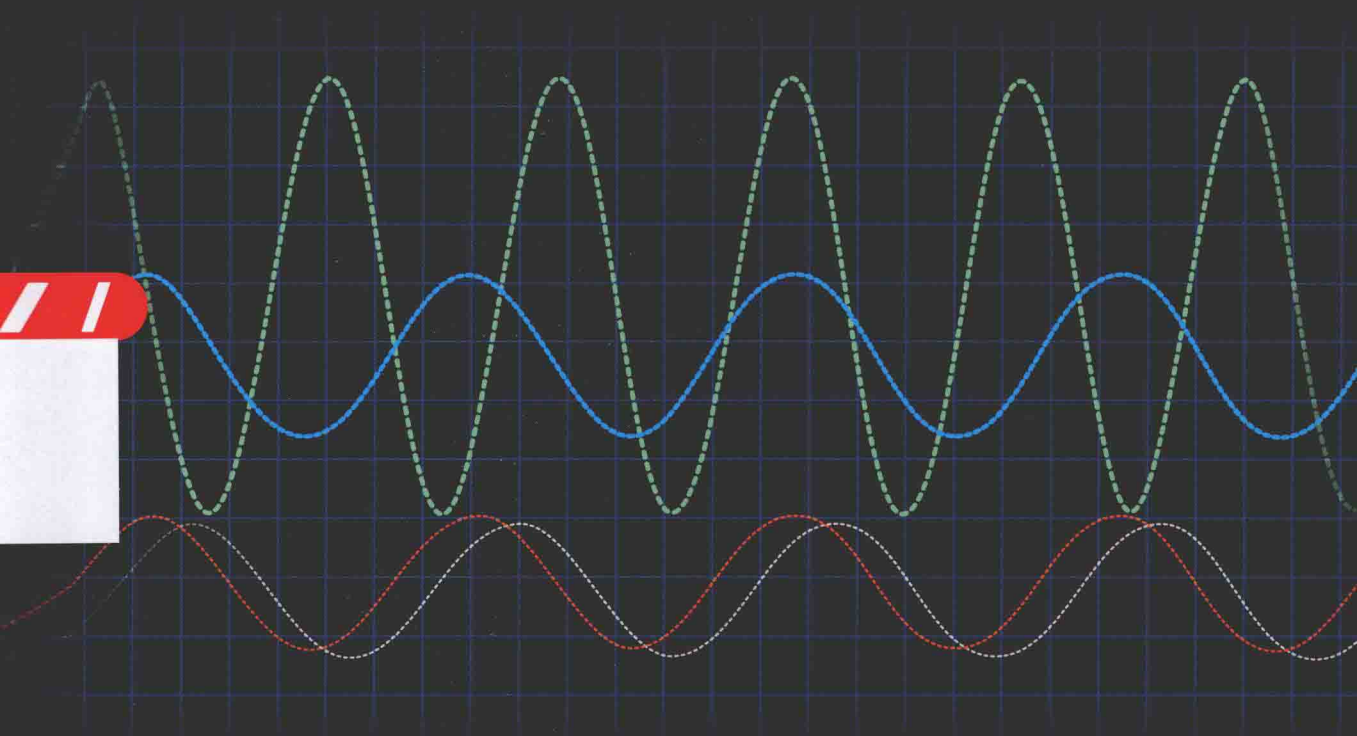




普通高等教育**电子通信类**国家级特色专业系列规划教材

信号与系统 (第二版)

主编 杨晓非 何 丰



科学出版社

普通高等教育电子通信类国家级特色专业系列规划教材

信号与系统

(第二版)

主 编	杨晓非	何 丰
副主编	李 强	黄 胜
	张 刚	刘占军
主 审	王继森	

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书根据高等工科大学信号与系统课程教学基本要求编写。全书共分7章:信号与系统概论;LTI系统的时域分析法;信号与系统的频域分析;连续信号与系统的复频域分析;离散信号与系统的 z 域分析;状态变量分析法;信号与系统的MATLAB辅助分析;并在最后附有每章的部分习题答案。全书概念准确,重点突出,结构清晰,文字精练,例题丰富,图文并茂,深入浅出,易教易读。

本书可作为通信工程、电子信息、光电工程、自动化、计算机科学与技术、生物医学工程等专业的大学本科教材,也可供相关专业技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/杨晓非,何丰主编.—2版.—北京:科学出版社,2014.6
普通高等教育电子通信类国家级特色专业系列规划教材

ISBN 978-7-03-041203-4

I. ①信… II. ①杨…②何… III. ①信号系统-高等学校-教材 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第126422号

责任编辑:贾瑞娜 张丽花/责任校对:胡小洁

责任印制:阎磊/封面设计:陈敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年2月第1版 开本:787×1092 1/16

2014年6月第2版 印张:26 3/4

2014年6月第九次印刷 字数:700 000

定价:46.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书第一版出版以来，不断收到读者反馈的信息。本着对广大读者负责的态度，我们在第一版教材实践经验的基础上，广泛地听取和研究选用本教材的教师、学生及其他读者的意见，改编出版了本书的第二版。

本书第二版保留了第一版连续信号与系统和离散信号与系统对称并行相似的章节结构框架，全面审查、修订第一版所述内容，作了一定的充实，并对全部习题解答再次进行了演算验证。使本书更充分地体现时代气息，概念更加严密准确，分析方法和实例更加紧密关联。

本书第二版由杨晓非、王继森、何丰共同进行改编，王继森先生做了大量修改、增删和审阅工作。李强执笔修订第5章，黄胜执笔修订第6章，张刚参与修订部分章节，重庆邮电大学担任本课程教学任务的其他老师均对第二版提出了许多有益的建议和意见。科学出版社的编辑为本书的出版创造了许多有利的条件。从2008年至今，兄弟院校的任课教师和学生以多种方式与作者交换意见，对修订工作予以关心。此外，本书的第二版得到重庆邮电大学各级领导的支持，在此一并深表谢意。

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

2014年3月

目 录

第1章 信号与系统概论	1	2.1.1 微分方程的经典解	47
1.1 绪言	1	2.1.2 初始值的确定	50
1.2 信号的描述及分类	2	2.1.3 零输入响应、零状态响应和全 响应	51
1.2.1 信号的描述	2	2.2 LTI 离散系统的时域经典分 析法	54
1.2.2 信号的分类	3	2.2.1 差分方程的经典解	54
1.3 典型信号	6	2.2.2 零输入响应、零状态响应和 全响应	57
1.3.1 典型连续信号	6	2.3 LTI 连续系统的单位冲激响应 ..	60
1.3.2 奇异函数	8	2.3.1 单位冲激响应和单位阶跃响应 ..	60
1.3.3 典型离散信号	16	2.3.2 单位冲激响应 $h(t)$ 的求取方法 ..	60
1.4 信号的基本运算	21	2.4 LTI 离散系统的单位序列响应 ..	66
1.4.1 信号的相加与相乘	21	2.4.1 单位序列响应和单位阶跃序列 响应	66
1.4.2 信号的反折、平移和压扩	21	2.4.2 单位序列响应 $h(k)$ 的求取方法 ..	66
1.4.3 连续信号的微分和积分	24	2.5 卷积积分	71
1.4.4 离散信号的差分和累加	25	2.5.1 LTI 连续系统的零状态响应 表示为卷积积分	71
1.5 信号的分解	26	2.5.2 卷积的基本计算方法	73
1.5.1 偶分量与奇分量	26	2.5.3 卷积的存在性简介	77
1.5.2 奇谐函数和偶谐函数	27	2.5.4 卷积的性质	78
1.5.3 直流分量和交流分量	27	2.5.5 利用卷积求零状态响应	84
1.5.4 脉冲分量	28	2.6 卷积和	86
1.5.5 实部分量和虚部分量	28	2.6.1 LTI 离散系统的零状态响应 表示为卷积和	86
1.6 系统的描述及其分类	29	2.6.2 卷积和的求取方法	87
1.6.1 系统的基本概念	29	2.6.3 卷积和的性质	90
1.6.2 系统模型	29	2.6.4 利用卷积和求零状态响应	91
1.6.3 系统的分类	33	习题	93
1.7 系统的时域模拟	38	第3章 信号与系统的频域分析	98
1.7.1 基本运算器	39	3.1 信号分解为正交函数	98
1.7.2 连续系统的模拟框图	39	3.1.1 矢量表示为正交矢量集	98
1.7.3 离散系统的模拟框图	40	3.1.2 正交函数集	99
1.8 信号与系统分析方法及应用 概述	41		
习题	42		
第2章 LTI 系统的时域分析法	47		
2.1 LTI 连续系统的时域经典分 析法	47		

3.1.3 信号分解为正交函数	100	3.7.2 频率响应 $H(j\omega)$ 的性质简介 ...	146
3.2 连续周期信号的傅里叶级数 ...	102	3.7.3 频率响应 $H(j\omega)$ 的求取	147
3.2.1 三角函数型傅里叶级数	102	3.7.4 信号的无失真传输和理想低通 滤波器的响应(频域分析法的 应用)	149
3.2.2 指数型傅里叶级数	104	3.8 取样定理	155
3.2.3 微分冲激法求取傅里叶系数 ...	105	3.8.1 信号的取样	155
3.3 连续周期信号的频谱和功率谱 ...	108	3.8.2 取样定理	158
3.3.1 周期信号的频谱	108	3.9 调制与多路复用	162
3.3.2 周期信号的平均功率和功 率谱	112	3.9.1 调制与解调	162
3.4 连续非周期信号的频谱—— 傅里叶变换	114	3.9.2 多路复用	165
3.4.1 从傅里叶级数到傅里叶变换 ...	114	3.10 离散信号的频域分析	168
3.4.2 非周期信号频谱的物理意义 及其特性	116	3.10.1 周期序列的离散时间傅里叶 级数(DTFS)	168
3.4.3 傅里叶变换的存在性	118	3.10.2 非周期序列的离散时间傅里叶 变换(DTFT)	170
3.4.4 能量谱和功率谱	118	3.10.3 离散傅里叶变换(DFT)	172
3.4.5 典型信号的傅里叶变换	121	习题	176
3.5 傅里叶变换的性质	126	第4章 连续信号与系统的复频域分析 ...	186
3.5.1 线性性质	126	4.1 拉普拉斯变换	186
3.5.2 对称性	126	4.1.1 拉普拉斯变换的定义	186
3.5.3 尺度压扩性质(反比特性) ...	127	4.1.2 拉普拉斯变换的物理意义 ...	189
3.5.4 时移性质	128	4.1.3 典型信号的拉普拉斯变换 ...	190
3.5.5 频移性质	130	4.2 拉普拉斯变换的性质	191
3.5.6 卷积定理	133	4.2.1 线性性质	192
3.5.7 时域微分性质	135	4.2.2 尺度压扩性质(比例性) ...	192
3.5.8 时域积分性质	135	4.2.3 时延性质	192
3.5.9 频域微分性质	138	4.2.4 复频移性质	194
3.5.10 频域积分性质	138	4.2.5 时域微分性质	194
3.6 LTI 连续系统的频域分析	140	4.2.6 时域积分性质	196
3.6.1 基本信号激励下连续系统的 频域分析	140	4.2.7 复频域微分性质	197
3.6.2 周期信号激励下连续系统的 频域分析	141	4.2.8 复频域积分性质	198
3.6.3 非周期信号激励下连续系统的 频域分析	143	4.2.9 卷积定理	199
3.6.4 微分方程的频域解	144	4.2.10 初值定理	200
3.7 LTI 连续系统的频率响应 $H(j\omega)$	145	4.2.11 终值定理	201
3.7.1 LTI 连续系统频率响应 $H(j\omega)$ 的定义	145	4.3 拉普拉斯反变换	203
		4.3.1 部分分式展开法	203
		4.3.2 留数法(围线积分法)	207
		4.4 拉普拉斯变换与傅里叶变换的 关系	209

4.5 LTI 连续系统的复频域分析法	211	5.3.1 幂级数展开法	270
4.5.1 基本复指数信号 e^{st} 激励下的零状态响应	211	5.3.2 部分分式展开法	271
4.5.2 任意信号 $f(t)$ 激励下的零状态响应	211	5.3.3 围线积分法(留数法)	273
4.5.3 微分方程的复频域解	212	5.3.4 单边 Z 变换与拉普拉斯变换的关系	275
4.5.4 电路的复频域分析	215	5.3.5 Z 变换与 DTFT 的关系	277
4.6 LTI 连续系统的复频域系统函数 $H(s)$	220	5.4 LTI 离散系统的 Z 变换分析法	278
4.6.1 系统函数 $H(s)$ 的求法	220	5.4.1 基本信号 z^k 激励下的零状态响应	278
4.6.2 系统函数 $H(s)$ 的零点和极点分布对系统特性的影响	223	5.4.2 一般因果序列 $f(k)$ 激励下的零状态响应	278
4.7 LTI 连续系统的稳定性	236	5.4.3 差分方程的 z 域求解	279
4.7.1 关于系统稳定性的概念	236	5.5 离散系统函数 $H(z)$ 与系统特性	283
4.7.2 LTI 因果连续系统稳定性的一般判别方法	237	5.5.1 系统函数 $H(z)$ 及其零极点图	283
4.8 LTI 连续系统复频域框图和信号流图	240	5.5.2 因果系统 $H(z)$ 的极点分布与单位序列响应 $h(k)$ 模式的关系	283
4.8.1 LTI 连续系统复频域的基本图示法	240	5.5.3 $H(z)$ 的零极点分布对系统频率特性 $H(e^{j\omega})$ 的影响	285
4.8.2 LTI 连续系统的复频域模拟	242	5.5.4 系统函数 $H(z)$ 与 LTI 因果离散系统的稳定性	290
4.8.3 梅森公式及应用	244	5.6 LTI 离散系统的 z 域模拟框图和信号流图	292
习题	249	5.6.1 z 域基本运算器	292
第 5 章 离散信号与系统的 z 域分析	258	5.6.2 LTI 离散系统的 z 域模拟	293
5.1 Z 变换	258	习题	294
5.1.1 从拉普拉斯变换到 Z 变换	258	第 6 章 状态变量分析法	300
5.1.2 Z 变换	258	6.1 状态、状态变量和动态方程	300
5.1.3 Z 变换的收敛域(ROC)	259	6.1.1 连续系统的动态方程	300
5.1.4 典型离散信号的 Z 变换	261	6.1.2 离散系统的动态方程	302
5.2 Z 变换的性质	263	6.2 动态方程的建立	303
5.2.1 线性性质	263	6.2.1 LTI 连续系统动态方程的建立	303
5.2.2 时域乘 a^k (z 域尺度变换)	263	6.2.2 LTI 离散系统动态方程的建立	314
5.2.3 移序性质	264	6.3 LTI 连续系统动态方程的求解	315
5.2.4 卷积和定理	265	6.3.1 用拉普拉斯变换法求解动态方程	315
5.2.5 z 域微分性质(时域乘 k)	266	6.3.2 用时域分析法求解动态方程	318
5.2.6 z 域积分性质(时域除 k)	267		
5.2.7 序列部分和的 Z 变换	268		
5.2.8 初值定理	268		
5.2.9 终值定理	269		
5.3 Z 反变换	270		

6.4 LTI 离散系统动态方程的求解 ...	323	7.2.4 LTI 系统时域分析的 MATLAB 实现	366
6.4.1 用 Z 变换法求解动态方程 ...	324	7.3 信号与系统变换域分析的 MATLAB 实现	373
6.4.2 用时域分析法求解动态方程 ...	326	7.3.1 连续信号与系统频域分析的 MATLAB 实现	373
6.5 系统的可控制性和可观性 ...	329	7.3.2 连续信号与系统 s 域分析的 MATLAB 实现	385
6.5.1 状态矢量的线性变换	329	7.3.3 离散信号与系统 z 域分析的 MATLAB 实现	388
6.5.2 系统的可控制性及一般判定 方法	331	7.4 状态变量分析法的 MATLAB 实现	393
6.5.3 系统的可观性及一般判定 方法	334	7.4.1 动态方程的 MATLAB 实现 ...	393
6.5.4 可控制性和可观性与系统 函数	335	7.4.2 LTI 连续系统状态变量分析的 MATLAB 实现	393
习题	338	7.4.3 LTI 离散系统状态变量分析的 MATLAB 实现	395
第 7 章 信号与系统的 MATLAB 辅助 分析	345	7.4.4 系统可观测性和可控制性的 MATLAB 实现	396
7.1 MATLAB 简介	345	习题	397
7.1.1 MATLAB 中的数值计算	345	部分习题答案	399
7.1.2 MATLAB 中的语言与基本 语法	349	参考文献	419
7.2 信号与系统时域分析的 MATLAB 实现	351		
7.2.1 连续信号的 MATLAB 表示	351		
7.2.2 离散信号的 MATLAB 表示	358		
7.2.3 用 MATLAB 实现信号的基本 运算	360		

第1章 信号与系统概论

本章应用平行相似的手法分别介绍连续信号与离散信号的描述和分类、连续系统与离散系统的特点和分类,以及系统的时域数学模型和时域框图模型。

1.1 绪 言

大千世界,林林总总。然而,无论自然界和人类社会如何变化多端、奥妙无穷,最终却总能被人的意识所感知,信号与系统承担着客观存在与主观意识之间的信息传递任务,通信就是通过信号与系统来实现这种传递的过程。

任何客观存在都有其自身的物理形态,例如,语言以声音表示;图像以光和色彩表示;科研工作或历史事件可用文字记载;经济形势用数据列表,等等。通常,人们将这些具有某种内容的语言文字、声讯图像及统计数据等称为消息,如果这些消息是人们所需要的便叫做信息,信号是携带消息的随时间变化的物理量,它向人们传递信息。信号是消息的具体表现形式,它的形态根据其具有物理形态的不同而不同。信号分为电信号、声信号、光信号等,不同形态的信号之间可以相互转换,例如,以亮度和色彩变化表示的光信号可以转换成以电压或电流表示的电信号;反之,电信号也可以转换成光信号。本书以讨论电信号为主。

在通信过程中,信号通过系统来传输。著名科学家钱学森先生说:“系统是由相互制约又相互作用的个体所组成的具有一定功能的整体”。钱先生的话,准确地诠释了系统的概念。例如,电路系统由开关、电阻、电容、电感、导线和半导体集成电路等元器件所组成,在外加电压信号或电流信号的激励下,电路内部各支路的电压和电流将发生变化,这些变化的电压和电流称为电路系统的响应。在某种激励的作用下电路产生了某种响应,便是该电路系统的功能。本课程所研究的对象与先修课程“电路分析”所研究的对象同是电信号与电路系统,但“电路分析”更多地从微观的角度关注构成系统的电路内各支路电信号的变化;而系统分析则是从宏观的角度研究由电路构成的系统的输入激励与输出响应之关系。在某种意义上,电路与系统以及网络的概念是可以通用的。

信号与系统紧密关联,是相互依存的整体。信号由系统产生、发送、传输与接收,在系统中信号按一定的规律运动和变化;系统则是对信号进行加工、变换、处理和传输,没有信号的系统没有存在的意义。因此,在实际应用中,信号与系统需相互协调,才能实现各自的功能,两者共存共荣,共同发展。信号与系统的这种协调一致的现象称为信号与系统的“匹配”。事实上,在我们生活的各个领域,信号与系统的理念随处可见。例如,语言通过声音信号在空气中传播,声音和空气就是最普通的信号与系统。

人类通信的历史,就是信号与系统的发展史。公元前700年,中国人最先将信号与系统应用于长途通信,我们的先祖用烽火台来传递警报,滚滚狼烟和冲天的火光,是外敌来犯的信号,烽火台便是古老的通信系统。但是,这样的通信系统不能传输事先没约定的未知信号,直到18世纪法国人夏普发明了烽火台上安装巨大的木制手臂,通过两端的木板变化来传递各种信号。19世纪,随着电力学的发展,通信技术发生了质的飞跃。1832年41岁的美国画家莫尔

斯,在回美国的轮船上碰见有人展示一种叫“电磁铁”的新器件并讲述电磁原理,他萌生了发明电报的欲望。1837年,在经过反复的试验后他研制出最早的电磁式电报系统,并在1838年创造了点划组合的莫尔斯电码信号,使电报通信进入实用阶段,揭开了人类通信史新的一页。1875年6月2日,美国发明家贝尔在实验中意外地发现,当电流导通和截止时,螺旋形线圈里会发生轻微的沙沙声,他因此想到用电流强度的变化来模拟声波的变化,从而使用导线来传送语音信号,并随之投身研究。1876年,21岁的贝尔比他人早一个小时向专利局申请专利权并获得了成功。这种将声音信号转变成电信号并经过电话系统传输出去的发明依然是今天在我们身边最流行的现代通信手段之一。

20世纪末,随着高速计算机技术、全球卫星定位技术、数字信号处理技术和以光波为载体,以光纤为传输介质的光纤通信系统的发展,推动了远距离大容量信息传输技术和复杂信号处理技术的发展,最终推动了国际互联网络(Internet,因特网)系统的发展,标志着信号与系统在通信领域的发展进入了崭新的时代。

但是,无论通信技术如何进步,现代通信系统总是可以用图1-1所示的框图模型来表示。框图中,发送端信号源发出的非光电信号经过变换器转变为光信号或电信号进入信道传输,接收端的反变换器将信号还原成非光电信号,最后被信宿接收。

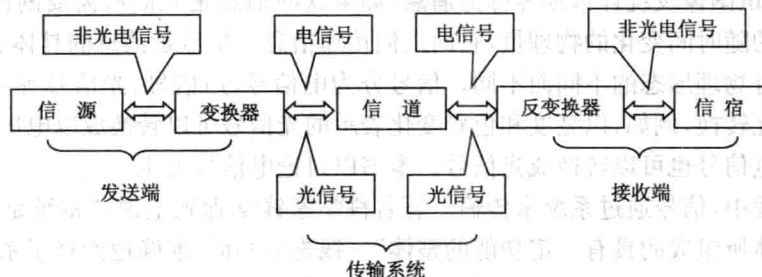


图 1-1 通信系统模型

不管系统内部对信号做怎样的转换,系统对施加的信号总会作出响应,产生另外的信号。

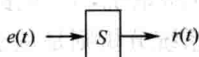


图 1-2 系统的框图模型

施加于系统的信号叫做输入信号或激励(excite),可以用 $e(t)$ 或 $f(t)$ 表示,系统产生的信号叫做系统的输出信号或响应(response),可以用 $r(t)$ 或 $y(t)$ 表示,系统 S (systems)的功能体现为什么样的激励产生什么样的响应。所以,任何信号与系统的问题都可以在去其内涵以后,抽象地用图 1-2 所示的框图模型来表示。

1.2 信号的描述及分类

1.2.1 信号的描述

信号可以用一个单变量或多变量的函数来表示,因变量可以是各种物理量或数量,所以信号可以代表不同的物理形态或数值。自变量可以是时间、空间、频率或其他形式量纲的变量,信号代表不同物理形态的数学函数或函数的值,也具有不同的量纲。“信号与系统”学科将信号从各种不同的具体物理形态中抽象出来,视为一般的数学函数,探讨其在数学意义上变化的理论与分析方法。因此,“信号”与“函数”两词常常可以通用,只有在接触到具体应用问题时,

才将信号的物理形态和量纲考虑进去。信号有一维信号(一个自变量)和多维信号(多个自变量),本课程只讨论一维信号。

以时间 t 为自变量,信号可以表示为 t 的函数,用函数 $f(t)$ 、 $y(t)$ 等表征。信号也可以描绘成随时间变化的波形图,信号在某一时刻的大小、信号持续时间的长短及信号变化的快慢等都可以从波形图上反映出来,信号的这一特性叫做信号的时间特性。例如,单边指数衰减信号的函数表达式为

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\sigma t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad \sigma > 0$$

其波形图如图 1-3 所示。

信号在一定的条件下又可分解为不同频率的正弦分量之和,正弦分量的振幅和初相位与频率之间的关系叫做信号的频率特性,信号的这一特性,可用以频率 f 或角频率 ω 为自变量的数学函数来表征,例如 $F(j\omega)$ 、 $Y(j\omega)$ 、 $\varphi(j\omega)$ 等。

信号的时间特性和频率特性有着对应关系,但不同的时间特性将导致不同的频率特性,而不同形式的信号这两种特性完全不一样。

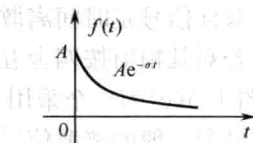


图 1-3 单边指数衰减信号

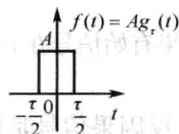
1.2.2 信号的分类

从不同的角度,可以将信号分为不同的类型。

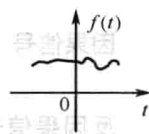
1. 确定信号与随机信号

根据信号能否用确切函数来表示,可将信号分为确定信号和随机信号。

如果信号可以写出一个确定的时间函数表达式,对于每一时刻 t 都有确定的函数值与其对应,这样的信号称为确定信号,如矩形波信号 $f(t) = Ag_r(t)$,如图 1-4(a) 所示。



(a) 确定信号



(b) 随机信号

随机信号不能写出确定的时间函数表达式,只能用概率统计的方法来描述,即只能预测它在某一个时刻是一个值的概率,而在该时刻的值却是未知的,如图 1-4(b) 所示。

图 1-4 确定信号与随机信号

一般地说,凡是能够用于传递信息的信号都是随机信号。

随机信号在一定的条件下能近似表现为某种确定信号,所以本书仅研究确定信号,为后续课程研究随机信号打下基础。以下是确定信号的分类。

2. 连续信号与离散信号

按照信号的时间自变量取值是否连续,信号可分为连续时间信号和离散时间信号。除了有限个间断点以外,如果一个信号在任意时刻均有定义值,则称其为连续信号。连续是指时间自变量 t 是连续变化的,而函数值可允许个别时刻跳变,如图 1-5(a) 所示信号 $f(t)$ 在 t_0 时刻发生了跳变。如果信号在时间 t 和函数值 $f(t)$ 皆连续变化,则称为模拟信号,如 $f(t) = \sin\omega_0 t$ 。

那些只在一系列离散的瞬间有确切定义而在其他时刻无定义的信号叫做离散时间信号,简称离散信号,用 $f(t_k)$ 或 $f(kT)$ 或 $f(k)$ 表示。离散信号可以从连续信号等间隔时间 T 取样

得到,其自变量是离散时间 kT (k 为整数),而不是连续时间 t 。在波形上,除了在定义的时刻以外,离散信号在其他时刻的幅值被当作不确定(或为零、或不研究),如图 1-5(b)所示。

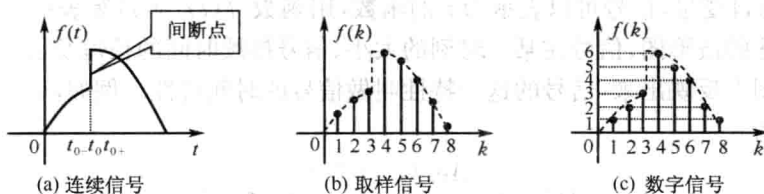


图 1-5 连续信号与离散信号

取样信号是时间离散而函数取值连续的信号,其幅值可能有无限多个值,不便编成数字码。若对其幅值按四舍五入的原则进行分级量化编码便得到一个时间和幅值皆离散的数字信号,图 1-5(c)为一个采用二进制 3 位数码(0,1,2,3,4,5,6)表示的数字信号。本书仅研究连续信号和一般的离散信号(幅值未量化编码)。

3. 时限信号与无时限信号

根据信号时间域的定义范围,信号可分为时限信号和无时限信号。

时限信号 时间域有始有终的信号。例如, $f(t) = \begin{cases} f(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & t < t_1, t > t_2 \end{cases}$ 。

有终信号 时间域无始有终的信号。例如, $f(t) = \begin{cases} f(t), & t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}$ 。

有始信号 时间域有始无终的信号。例如, $f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$ 。

因果信号 如果有始信号在 $t=0$ 时刻起始,则为因果信号,即 $f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 。

反因果信号 反因果信号是因果信号的反折,定义为 $f(t) = \begin{cases} f(t), & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$ 。

无时限信号 时间域无始无终的信号。例如, $f(t) = f(t) (-\infty < t < \infty)$ 。

4. 周期信号与非周期信号

根据信号的周期性,信号可分为周期信号和非周期信号。

连续**周期信号**是按一定的时间周期 T 周而复始地重复出现并且时间域无始无终的信号。其函数表达式为

$$f_T(t) = f(t - kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad T > 0 \quad (1-2-1)$$

式中, T 叫做周期信号的周期。具有周期和定义域无始无终是周期信号的两个特点,如图 1-6(a)

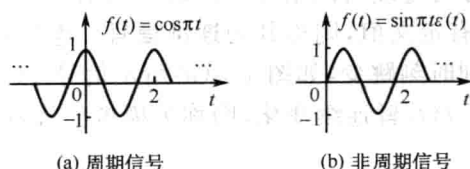


图 1-6 周期信号与非周期信号

所示。不具备这两个特点的信号便是非周期信号,如图 1-6(b) 所示信号尽管具有周期性,但在时间上有始无终,所以不是周期信号,习惯上称之为有始周期信号。两个及两个以上的周期信号的叠加可能是周期信号,也可能是非周期信号,其中,能找到最小公倍周期的为周期信号,否则就是非周期信号。

离散周期信号可表示为

$$f_N(k) = f(k - mN), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad N > 0 \quad (1-2-2)$$

式中, N 是正整数, 叫做离散周期信号的周期。

5. 能量信号与功率信号

根据是否能量有界或者功率有界, 信号可分为能量信号、功率信号和非功非能信号。不存在功率有界能量也有界的信号。

由电路知识可知: 在 1Ω 的电阻上消耗的瞬时功率为 $p(t) = u^2(t)$, 或 $p(t) = i^2(t)$ 。若将电压和电流抽象为一般意义上的信号 $f(t)$, 则在有 $f(t)$ 的激励下归一化瞬时功率为

$$p(t) = f^2(t) \quad (1-2-3)$$

信号 $f(t)$ 在时间区间 $-\tau < t < \tau$ 的归一化能量为

$$E = \int_{-\tau}^{\tau} p(t) dt = \int_{-\tau}^{\tau} |f(t)|^2 dt \quad (1-2-4)$$

归一化平均功率为

$$P = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |f(t)|^2 dt \quad (1-2-5)$$

在全时域 $(-\infty, \infty)$ 的归一化总能量为

$$E_{\text{总}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} |f(t)|^2 dt \quad (1-2-6)$$

归一化平均功率为

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |f(t)|^2 dt \quad (1-2-7)$$

若信号 $f(t)$ 的总能量为有限值, 即 $E_{\text{总}} \leq M$, 平均功率为零, 即 $P=0$, 则称其为能量有限信号, 简称**能量信号**; 若信号 $f(t)$ 的平均功率为有限值, 即 $P \leq M$, 总能量为无穷大, 即 $E_{\text{总}} = \infty$, 则称其为功率有限信号, 简称**功率信号**; 若信号 $f(t)$ 的平均功率为无穷大, 总能量也为无穷大, 则为**非功非能信号**。

离散信号 $f(k)$ 的归一化总能量为

$$E_{\text{总}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |f(k)|^2 \quad (-n \leq k \leq n) \quad (1-2-8)$$

归一化平均功率为

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n |f(k)|^2 \quad (-n \leq k \leq n) \quad (1-2-9)$$

例 1-1 试判定下列信号是否功率信号或能量信号或非功非能信号。

$$(1) f_1(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$(2) f_2(t) = 1$$

$$(3) f_3(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$(4) f_4(k) = \begin{cases} (0.5)^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

解 (1) $E_{\text{总}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} |e^{-t}|^2 dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}, \quad P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{E_{\text{总}}}{2\tau} = 0$

所以 $f_1(t)$ 为能量信号。

(2) $E_{\text{总}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| t \right|_{-\tau}^{\tau} = \infty$

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{E_{\text{总}}}{2\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{2\tau}{2\tau} = 1$$

所以 $f_2(t)$ 为功率信号。

$$(3) \quad E_{\text{总}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} t^2 dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^{\tau} = \infty$$

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_0^{\tau} t^2 dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau^3}{6\tau} = \infty$$

所以 $f_3(t)$ 为非功非能信号。

$$(4) \quad E_{\text{总}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^{2k} = \frac{1}{1-0.25} \approx 1.33$$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{\text{总}}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.33}{2n+1} = 0$$

所以 $f_4(k)$ 为能量信号。

一般地说,连续的周期信号、直流信号和单位阶跃信号是功率信号,只讨论它们的功率;时限脉冲信号、单边指数衰减信号等是能量信号,只从能量的角度去考察; $t^n (t > 0)$ 及指数增长信号为非功非能信号。离散信号与连续信号平行相似。

1.3 典型信号

典型信号是指那些简单的常用信号,在一定的条件下,复杂信号可以分解成这些典型信号的加权、叠加、微积分或差分与求和的形式。典型信号包括典型的连续信号和典型的离散信号。

1.3.1 典型连续信号

1. 复指数信号

$$f(t) = Ae^{st} = Ae^{(\sigma + j\omega)t} = Ae^{\sigma t} e^{j\omega t} = Ae^{\sigma t} \cos \omega t + jAe^{\sigma t} \sin \omega t \quad (1-3-1)$$

式中, $s = \sigma + j\omega$ 是复频率; σ 和 ω 为实数; A 为正实数。**复指数信号**是实变量 t 的复函数,一般地说,复函数在 $f(t)-t$ 二维平面上是画不出其波形的,通常只讨论它的实部和虚部的波形。当 $\omega = 0$ 时, $f(t) = Ae^{\sigma t}$ 是实指数信号;当 $\sigma = 0$ 时, $f(t) = Ae^{j\omega t}$ 是虚指数信号,其实部和虚部是正弦信号。

(1) 实指数信号

$$f(t) = Ae^{\sigma t} \quad (1-3-2)$$

当 $\sigma > 0$ 时 $f(t) = Ae^{\sigma t}$ 为**指数增长信号**;当 $\sigma < 0$ 时 $f(t) = Ae^{\sigma t}$ 为**指数衰减信号**;当 $\sigma = 0$ 时 $f(t) = Ae^{\sigma t}$ 为**直流信号**,波形如图 1-7 所示。

通常把 $|\sigma|$ 的倒数称为指数信号的时间常数,记作 $\tau = \frac{1}{|\sigma|}$,它反映了指数信号变化的速率。 τ 越大指数信号增长或衰减越慢。对于常见的**单边衰减指数信号** $f(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} (t \geq 0)$ (如图 1-8 所示), $t = 0$ 时, $f(0) = A$; $t = \tau$ 时, $f(\tau) = 0.368A$; $t \rightarrow \infty$ 时, $f(t) \rightarrow 0$;工程上, $t = 4\tau$ 时, $f(4\tau) = 0.0183A$,便可近似地认为信号基本衰减到零。

实指数信号对时间的微分和积分仍然是实指数信号。

(2) 正弦信号

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad (1-3-3)$$

式中, A 为振幅; ω 为角频率; φ 为初始相位。正弦信号是周期信号, 其波形如图1-9所示。其周期 T 与角频率 ω 和频率 f 之间的关系为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad (1-3-4)$$

国际单位制中, 时间 t 的单位为秒(s), 则初始相位 φ 的单位为弧度(rad), 角频率 ω 的单位为弧度/秒(rad/s), 频率 f 的单位是赫兹(Hz)。正弦信号的平均功率为 $P = \frac{A^2}{2}$, 单位为瓦特(W)。

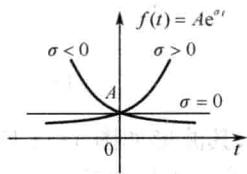


图 1-7 实指数信号

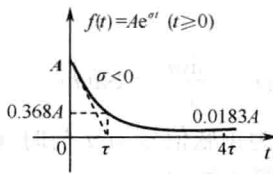


图 1-8 单边指数衰减信号

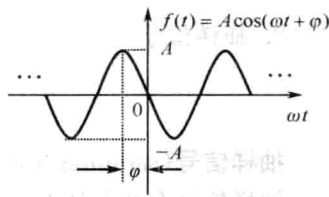


图 1-9 正弦信号

正弦信号是周期信号, 但两个频率不相同的正弦信号的叠加却只有在一定的条件下才是周期信号。例如,

$$f(t) = \cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t$$

式中, 若 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{n}$ 是最简分式 ($\frac{m}{n}$ 为不可约的整数比), 则 $f(t)$ 是周期信号, 其周期为 $T = mT_1 = nT_2$ (最小公倍周期); 若 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1}$ 不是最简分式, 如是无理数, 则 $f(t)$ 不是周期信号; 当 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1}$ 可写成近似最简分式时, 则 $f(t)$ 称为近似周期信号或概周期信号。

例 1-2 $f_1(t) = a\cos t + b\cos 3t$ 和 $f_2(t) = a\cos t + b\cos \sqrt{2}t$, ①试问它们是否为周期信号? 如果是, 周期和频率为多少? ②若选 $\sqrt{2} = 1.4$ 和 $\sqrt{2} = 1.41$ 时, 所得近似周期信号 $f_2(t)$ 的周期分别为多少?

解 ① 对 $f_1(t)$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$, 所以 $f_1(t)$ 是周期信号, 其周期为 $T = 3T_2 = T_1 = 2\pi(\text{s})$, 角频率为 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1\text{rad/s}$ 。

对 $f_2(t)$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 是无理数, 所以 $f_2(t)$ 不是周期信号。

② 选 $\sqrt{2} = 1.4$, 则 $\frac{T_2}{T_1} \approx \frac{1}{1.4} = \frac{5}{7}$, 得周期为 $T = 7T_2 = 7 \times \frac{2\pi}{1.4} = 10\pi(\text{s})$ 的近似周期信号; 选 $\sqrt{2} = 1.41$, 则 $\frac{T_2}{T_1} \approx \frac{1}{1.41} = \frac{100}{141}$, 得周期为 $T = 141T_2 = 200\pi(\text{s})$ 的近似周期信号。

(3) 变幅正弦振荡信号

$$f(t) = Ae^{\sigma t} \cos\omega t \quad (1-3-5)$$

复指数信号的实部和虚部是变幅正弦振荡信号

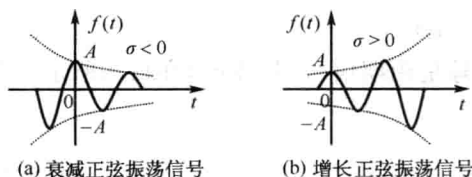


图 1-10 变幅振荡信号

$$f_r(t) = \operatorname{Re}[Ae^{st}] = Ae^{\sigma t} \cos \omega t$$

和

$$f_i(t) = \operatorname{Im}[Ae^{st}] = Ae^{\sigma t} \sin \omega t$$

若 $\sigma < 0$, 则 $f_r(t)$ 或 $f_i(t)$ 是振幅按指数规律衰减的正弦振荡信号, 如图 1-10(a) 所示; 若 $\sigma > 0$, 则 $f_r(t)$ 或 $f_i(t)$ 是振幅按指数规律增长的正弦振荡信号, 如图 1-10(b) 所示。

可见, 复指数信号是信号分析中最基本的信号之一。

2. 抽样信号

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} = \operatorname{Sa}(t) \quad (1-3-6)$$

抽样信号(sampling function) 定义为正弦信号 $\sin t$ 与时间 t 的比值, 其波形如图 1-11 所示。抽样信号有如下特点: ① 它是一个偶函数, $\operatorname{Sa}(t) = \operatorname{Sa}(-t)$, 其波形关于纵轴对称; ② $t = n\pi$ 时 (n 为整数), 其函数值为零; ③ $\lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{Sa}(t) = 1$; ④ $\int_0^{\infty} \operatorname{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Sa}(t) dt = \pi$ 。

3. 高斯脉冲信号(钟形脉冲信号)

$$f(t) = Ae^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (1-3-7)$$

高斯脉冲信号的波形如图 1-12 所示, 因为 $f\left(\frac{\tau}{2}\right) = Ae^{-\frac{1}{4}} \approx 0.78A$, 所以钟形脉冲的脉冲宽度 τ 定义为当 $f(t)$ 下降到最大值 A 的 0.78 倍时, 所对应的两个截止时刻之间的时间范围。钟形脉冲的频谱函数对于定义有效频带宽度有特殊意义, 本书将在第 3 章提及。

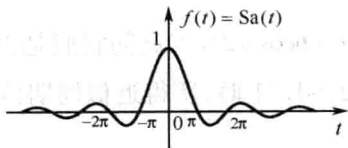


图 1-11 抽样信号

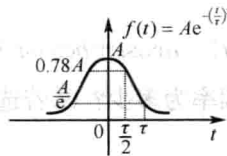


图 1-12 高斯脉冲信号

1.3.2 奇异函数

在信号与系统中, 将那些本身或其导数或积分具有不连续点(跃变点)的这一类函数定义为奇异函数(广义函数)或奇异信号^①。这里主要介绍单位斜变信号、单位阶跃信号、单位冲激信号和冲激偶信号。

^① 1950 年, 施瓦兹(L. Schwartz)发表的专著, 建立了分配函数(广义函数)理论, 为研究奇异函数奠定了基础。一个分配函数 $g(t)$ 的定义, 是赋予测试函数 $\varphi(t)$ (普通函数, 紧致的, 即要求连续、具有各阶导数、在有限时间内 $\varphi(t) \neq 0$) 为一个数值的过程。这个数值可能是: $t \neq t_0$ 时 $\varphi(t)$ 的值或 $\varphi^{(n)}(t)$ 值; 也可能是 $\varphi(t)$ 在某时间区间的面积; 还可能与 $\varphi(t)$ 有关的其他值。所赋的值为 $N_g[\varphi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)dt$ 。利用此式, 可对奇异函数作出严格的数学定义。读者若需深入了解, 可参阅吴大正(1998)2.9 节和郑君里(2000)1.4 节。

1. 单位斜变(斜坡)信号(unit ramp signal)

$$R(t) = t\varepsilon(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1-3-8)$$

单位斜变信号 $R(t)$ 的波形如图 1-13(a) 所示, 如果将时间起始点移至 t_0 , 则有

$$R(t-t_0) = (t-t_0)\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} t-t_0, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (1-3-9)$$

如图 1-13(b) 所示。另外, 有的信号可以用斜变信号来表示, 如截平斜变信号如图 1-13(c) 所示。

$$f_1(t) = R_1(t) = \begin{cases} \frac{A}{\tau}R(t), & t < \tau \\ A, & t \geq \tau \end{cases}$$

锯齿形脉冲信号, 如图 1-13(d) 所示。

$$f_2(t) = R_2(t) = \begin{cases} \frac{A}{\tau}R(t), & t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

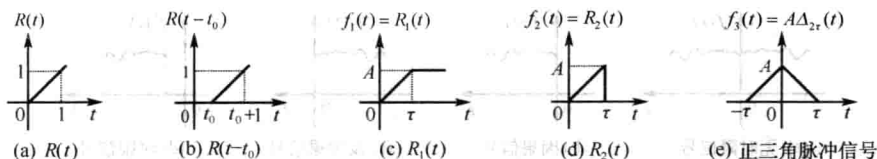


图 1-13 斜变信号

正三角脉冲信号, 如图 1-13(e) 所示。

$$f_3(t) = A\Delta_{2\tau}(t) = R_1(t+\tau) - R_1(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right), & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases} \quad (1-3-10)$$

2. 单位阶跃信号(unit step signal)

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1-3-11)$$

单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 的定义可理解为: $t < 0$ 甚至 $t = 0_-$ 时, $\varepsilon(t) = 0$; $t > 0$ 甚至 $t = 0_+$ 时, $\varepsilon(t) = 1$; 在 $0_- < t < 0_+$ 时, $\varepsilon(t)$ 在 0 和 1 之间处于一种不确定状态。虽然数学取 $\varepsilon(0) = 0.5$, 但本书取 $\varepsilon(0)$ 为不予定义。单位阶跃信号的波形如图 1-14(a) 所示。

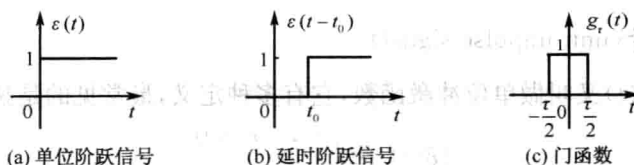


图 1-14 单位阶跃信号及其相关信号

单位阶跃信号的物理解释是在 $t=0$ 时刻接入电路一个单位的直流电源。如果接入电源