21世纪高职高专经济管理类规划教材

总主编　杨紫元

经济数学基础（2）

JINGJI SHUXUE JICHU

主　编　闫杰生

河南大学出版社

JINGJI SHUXUE JICHU

经济数学基础

（2）

主　编　闫杰生

副主编　庞进丽　张　彬　鲁丽萍

陈元安　陈　飞

河南大学出版社

·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础(2)/闫杰生主编.—郑州:河南大学出版社,2014.2
ISBN 978-7-5649-0641-2

Ⅰ.①经… Ⅱ.①闫… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 026140 号

责任编辑 李亚涛
责任校对 付会娟
封面设计 王四朋

出版发行 河南大学出版社
地址:郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号 邮编:450046
电话:0371-86059712(高等教育出版分社)
0371-86059713(营销部) 网址:www.hupress.com

排　版 郑州市今日文教印制有限公司
印　刷 郑州海华印务有限公司
版　次 2014 年 2 月第 1 版 **印　次** 2014 年 2 月第 1 次印刷
开　本 787mm×1092mm 1/16 **印　张** 15
字　数 328 千字 **定　价** 26.00 元

前　　言

自经济学作为一门学科出现，数学就在研究和说明经济思想中扮演着重要的角色.

数学具有精确严密的特点，并能清晰地解决复杂的问题，这使得数学方法在分析经济问题时具有很高的价值. 不仅许多经济学概念可以用数学去度量(如价格、商品数量以及货币等)，而且数学还可以帮助我们研究这些数量之间的关系. 经济模型把数学和经济学有机地结合在了一起.

本书是为适应高职高专数学教学发展，按"教、学、用"一体化的思路，征求经济学各专业教师的意见，经过深入调研，为高职高专经济和管理类专业学生编写而成的. 在编写过程中，努力做到知识体系完整、框架结构合理、内容编选丰富、教与学相结合、学与用相呼应，并努力实现理论扎实严谨、行文深入浅出、用例通俗实用，以此来满足高职高专学生学习的需求.

本书全面系统地介绍了相关的数学基础，并且在不失数学本身的严密性和精确性的前提下，打破了经济学和数学分别教学的常规，将经济学与数学有机结合在一起，不但清晰地表达了相关的数学主题，而且比较完美地将这些主题与经济问题相结合. 教会学生利用数学知识解决相关的经济问题是本书的主题之一.

本书具有以下突出特点：

(1)经济知识与数学内容衔接合理，且相互融合，体现了数学教学的适用性；数学语言与经济语言简练适度，概念清晰，方法简明；重视经济应用，其他应用相对淡化.

(2)内容内涵丰富，体现以数学思想为核心；以经济应用为主线，体现数学教学的应用性；知识案例一体化，"教、学、用"合而为一，体现工学结合思想；适度安排数学实验教学，体现了数学教学的工具性.

(3)重视基本计算，难题计算相对淡化；例题习题难易程度层次分明，便于学生学习和教师讲授；各章有小结、知识脉络、常见题型，自成体系，便于梳理和掌握；每章后配有复习题，在书末附有答案，便于学生进行巩固练习.

本书主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、概率论基础、数理统计基础、MATLAB基础与入门等，共六章.

本书由闫杰生总策划、组织实施. 本册编者的具体分工如下：闫杰生、鲁丽萍，第一章；鲁丽萍，第二章；张彬，第三章；庞进丽，第四章；鲁丽萍、陈飞，第五章；陈元安，第六章、附

录.在编写的过程中,得到商丘职业技术学院领导、经贸系经济学专业教师和河南大学出版社的支持与帮助,并提出许多宝贵意见,同时我们参阅了同行许多新的科研成果,在此一并表示感谢.

疏漏与不足之处,望不吝赐教.

闫杰生

2014年2月

目　　录

第一章　行列式

学习目标

1. 了解 n 阶行列式的定义，了解解方程组的克莱姆法则.
2. 理解行列式的性质，会利用行列式的性质计算行列式.
3. 掌握二阶、三阶行列式的计算方法.

在经济活动和科学技术中，许多问题都可直接或近似地表示成一些变量间的线性关系，线性代数是研究变量之间线性关系的数学方法，而行列式是线性代数的一个基本概念，它是讨论线性方程组(即多元一次方程组)理论的有力工具. 本章将在二阶、三阶行列式定义的基础上，进一步学习 n 阶行列式的定义、性质以及克莱姆法则和它们的应用.

1.1　行列式的定义

1.1.1　二阶行列式

例 1　某企业生产甲、乙两类产品，已知生产 1 个单位的甲产品需要投入成本 3 万元，可得利润 2000 元；生产 1 个单位的乙产品需投入 2 万元，可得利润 1000 元. 若计划可投入 130 万元，要求利润达到 80000 元，试确定甲、乙两产品的产量.

解　设甲、乙产品的产量为 x_1, x_2，则有二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 130; \\ 2000x_1 + 1000x_2 = 8000. \end{cases}$$

第二式可简化为

$$2x_1+x_2=80;$$

用消元法解之，得

$$x_1=30, x_2=20.$$

上述问题用一般数学式表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

用加减消元法来求解：将方程组中第一个方程的两边同乘以 a_{22}，第二个方程的两边同乘以 a_{12}，然后相减，消去 x_2 可得到 x_1；用类似方法消去 x_1 可得 x_2，即

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2; \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \end{cases}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，那么方程组(1.1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}; \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

为了便于表示讨论上述结果，规定记号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，并称为**二阶行列式**. 根据二阶行列式的概念，方程组(1.1.1)中的未知量 x_1、x_2 的系数可以用二阶行列式表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 称为这个二阶行列式的**元素**，横排称为**行**，竖排称为**列**，从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**次对角线**，即二阶行列式由两行两列共 4 个元素构成的，其右端为二阶行列式的展开式，我们常把 D 叫做线性方程组(1.1.1)的**系数行列式**. 利用二阶行列式的概念，(1.1.2)式中的分子可以分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

因此，当系数行列式 $D\neq 0$ 时，二元一次方程组(1.1.1)的解就可以简单地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.1.3}$$

例 2 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=2\times(-6)-(-3)\times 4=0$；

(2) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix}=(a+1)\times(a-1)-1\times 1=a^2$.

例 3 用二阶行列式解二元一次方程组 $\begin{cases}5x_1+2x_2=2;\\5x_1+4x_2=3.\end{cases}$

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}5&2\\5&4\end{vmatrix}=10\neq0,$$

所以方程组有解,且

$$D_1=\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2,\quad D_2=\begin{vmatrix}5&2\\5&3\end{vmatrix}=5.$$

由公式(1.1.3)知,方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{5},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{2}.$$

1.1.2 三阶行列式

类似地,对于三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1;\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2;\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1.1.4}$$

用消元法解得 x_1 的表达式为

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\&=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}.\end{aligned}$$

为了便于表示三元一次方程组(1.1.4)的解,引进记号

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}&=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\\&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\&=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31},\end{aligned}$$

称其为**三阶行列式**,用 D 表示,即

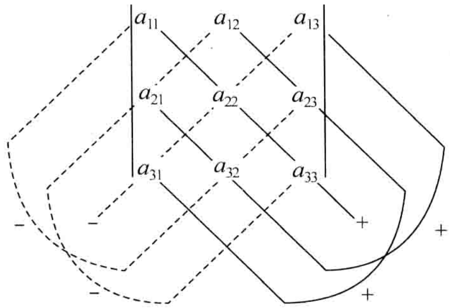
$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

其中 $\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 是原三阶行列式 D 中划去元素 a_{11} 所在的第 1 行、第 1 列后剩下的元素,按原来的顺序组成的二阶行列式,称它为元素 a_{11} 的**余子式**,记作 M_{11},即 $M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$.类似地,记 $M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$,$M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$,并且令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}$

$M_{ij}(i,j=1,2,3)$，称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**. 因此，三阶行列式也可以表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j}.$$

即三阶行列式是按它的第 1 行展开，它的值等于第 1 行的每个元素与它各自的代数余子式乘积之和，这样就可以转化为二阶行列式进行计算. 三阶行列式是由 3 行 3 列共 9 个元素构成的，它的展开式中有 6 个乘积项，每个乘积项由来自不同行、不同列 3 个元素相乘得到，且带正号和负号的项各一半，可用下图表示.



利用三阶行列式的概念，当方程组(1.1.4)的系数行列式 $D\neq 0$ 时，它的解也可以简洁地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.1.5}$$

其中，D_1,D_2,D_3 是将方程组(1.1.4)中的系数行列式 D 中的第 1,2,3 列分别换成常数列得到的三阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 4 在 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 中，分别写出元素 $a_{12}=0$ 和 $a_{23}=1$ 的余子式和代数余子式，并求 D 的值.

解 元素 $a_{12}=0$ 的余子式为 $M_{12}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$，

代数余子式为 $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$；

元素 $a_{23}=1$ 的余子式为 $M_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$，

代数余子式为 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\times 2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times 0\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times 3$$

$$\times\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2\times(-3)+3\times(-3)=-15.$$

例 5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

解 $D=(-1)^{1+1}\times(-1)\times\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times 0\times\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

$$+(-1)^{1+3}\times(-1)\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times(6+16)+(-1)\times(12+4)$$

$$=-38.$$

例 6 某工厂有 3 个车间,各车间互相提供产品(或劳务),现知 2010 年各车间出厂产量及对其他车间的消耗如表 1—1 所示.

表 1—1

车间 消耗系数	1	2	3	出厂产量 (万元)	总产量 (万元)
1	0.1	0.3	0.4	95	x_1
2	0.2	0	0.1	100	x_2
3	0.3	0.2	0.1	0	x_3

表中第 1 列消耗系数 0.1,0.2,0.3 表示第一车间生产 1 万元的产品需分别消耗第一、二、三车间 0.1 万元,0.2 万元,0.3 万元的产品,第 2、3 列类同,求全年各车间的总产量.

解 依题意,可构造方程组如下:

$$\begin{cases} 0.1x_1+0.3x_2+0.4x_3=x_1-95; \\ 0.2x_1\qquad\quad +0.1x_3=x_2-100; \\ 0.3x_1+0.2x_2+0.1x_3=x_3. \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 0.9x_1-0.3x_2-0.4x_3=95; \\ -0.2x_1+x_2-0.1x_3=100; \\ 0.3x_1+0.2x_2-0.9x_3=0. \end{cases}$$

系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & -0.1 \\ 0.3 & 0.2 & -0.9 \end{vmatrix}=-0.593\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 95 & -0.3 & -0.4 \\ 100 & 1 & -0.1 \\ 0 & 0.2 & -0.9 \end{vmatrix}=-118.6,\quad D_2=\begin{vmatrix} 0.9 & 95 & -0.4 \\ -0.2 & 100 & -0.1 \\ 0.3 & 0 & -0.9 \end{vmatrix}=-88.95,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 & 95 \\ -0.2 & 1 & 100 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \end{vmatrix}=-59.3.$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=200,x_2=\frac{D_2}{D}=150,x_3=\frac{D_3}{D}=100.$$

1.1.3 行列式的性质

从三阶行列式定义可以看出，用定义计算三阶行列式的值是比较麻烦的，为了简化三阶行列式的计算，下面介绍二阶、三阶行列式的几个性质（以下简称行列式的性质）.

如果把三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中的行与列按原来的顺序互换，则得到新的行列式

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

我们称行列式 D^T 为 D 的**转置行列式**. 显然 D 也是 D^T 的转置行列式.

性质 1.1 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 的值相等，即 $D=D^T$.

例如，行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=11$，其转置行列式 $D^T=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=11$.

性质 1.1 表明，在行列式中行和列的地位是对称的，因此凡是对行成立的性质，对列也同样成立.

性质 1.2 行列式 D 的值等于它的任意一行（或列）中每个元素与它们各自的代数余子式乘积之和，即行列式可以按任意一行或列展开.

例如，三阶行列式

$$D=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{ik} \text{ 或 } D=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}A_{kj}\text{，其中 } i,j=1,2,3. \tag{1.1.6}$$

例 7 设三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & 4 & 2\end{vmatrix}$.

(1)按第 3 行展开，并求其值；

(2)按第 2 列展开，并求其值.

解 (1)因为

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-9,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{vmatrix}=9,$$

所以

$$D=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=2\times(-9)+4\times(-3)+2\times 9=-12.$$

(2)因为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-3,$$

所以

$$D=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=3\times 2+3\times(-2)+4\times(-3)=-12.$$

由性质 1.2 可以看出利用定义计算行列式时，当行列式的某一行(或列)元素中零元素较多时，可按该行(或列)展开. 例如：

$$D=\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 3 & -7 & 5\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 4\\ -7 & 5\end{vmatrix}=28.$$

性质 1.3 将行列式的任意两行(或列)互换，行列式的值改变符号.

例如，三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}$，将第 2 行与第 3 行互换得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}.$$

计算 D 与 D_1，则 $D=11$, $D_1=-11$.

性质 1.4 行列式中两行(或列)对应元素全部相同，行列式的值为零.

例如，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.1.7}$$

$$=a_{11}\times 0-a_{12}\times 0+a_{13}\times 0=0.$$

事实上，如果三阶行列式 D 第 i 行的元素与第 j 行的对应元素相等，若交换 D 的第 i 行和第 j 行的元素得到的结果仍是 D，但由性质 1.3，交换了两行，行列式改变符号，所以有 $D=-D$，于是 $2D=0$，所以 $D=0$.

性质 1.5 行列式一行(或列)的公因子可以提到行列式记号的外面.

例如，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.1.8}$$

在(1.1.8)中令 $k=0$ 可得：

推论 1.1 如果行列式中有一行(或列)的全部元素都是零，那么这个行列式的值是零.

同样由性质 1.2 可以得到下面性质成立.

性质 1.6 行列式中某一行(或列)的每一个元素如果可以写成两数之和 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ $(j=1,2,3)$，那么此行列式等于两个行列式之和，这两个行列式的第 i 行的元素分别是 b_{i1},b_{i2},b_{i3} 和 c_{i1},c_{i2},c_{i3}，其他各行(或列)的元素与原行列式相应各行(或列)的元素相同.

例如，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+d & e+f \end{vmatrix}=a(e+f)-b(c+d)=(ae-bc)+(af-bd)$$

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ d & f \end{vmatrix}.$$

由性质 1.4 和性质 1.5，可以得到下列推论：

推论 1.2 行列式中如果两行(或列)对应成比例，那么行列式的值为零.

推论 1.3 行列式 D 中任意一行(或列)的元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即当 $i\neq j$ 时，

$$\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=0 \text{ 或 } \sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{ki}=0. \tag{1.1.9}$$

事实上，在(1.1.7)中第 2 行元素 a_{21},a_{22},a_{23} 分别乘以第 3 行的代数余子式 A_{31},A_{32},A_{33} 即得上式.

这样由性质 1.2 和推论 1.3 可得结论：

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

性质 1.7 在行列式中,把某一行(或列)的倍数加到另一行(或列)对应的元素上去,那么行列式的值不变.

例如,二阶行列式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 \end{vmatrix} &= a_1(b_2+ka_2)-a_2(b_1+ka_1) \\ &= (a_1b_2-a_2b_1)+k(a_1a_2-a_2a_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

(1.1.10)式的左端就是把 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的第 1 行的 k 倍加到第 2 行对应的元素上去得到的行列式.

例 8 利用行列式的性质计算下列行列式的值:

(1) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (2) $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 298 & 101 & 197 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $D_3 = \begin{vmatrix} -b & c & e \\ bd & -cd & ed \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$.

解 (1)利用行列式性质 1.7,把 D_1 的第 3 列的(−1)倍加到第 1 列上,再由性质 1.4 可计算 D_1 的值,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(2)把 D_2 的第 2 行的元素分别看成 300−2,100+1,200−3,由性质 1.6,可把 D_2 分成两个行列式的和,即

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 300-2 & 100+1 & 200-3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 300 & 100 & 200 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

由推论 1.2,得

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 300 & 100 & 200 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

所以 $D_2=0$.

(3)先利用性质 1.5 分别提取第 2 行和第 3 行的公因子 d,f,得

$$D_3=df\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix},$$

由性质 1.7,把第 2 行的 1 倍加到第 1 行上,再按第 1 行展开即得

$$D_3=df\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}=2dfe\begin{vmatrix} b & -c \\ b & c \end{vmatrix}=4bcdef.$$

例 9 证明:

$$D=\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证 利用性质 1.6 把原行列式拆成 4 个行列式之和,即

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

由推论 1.2 可知第 1 个和第 4 个行列式为零,由性质 1.3 和性质 1.4,得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+x^2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}-x^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$