



高等职业技术教育“十二五”规划教材

——土木工程类

JIEGOU LIXUE JI YINGYONG

# 结构力学及应用

朱耀淮 何奎元 编著



西南交通大学出版社  
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

高等职业技术教育“十二五”规划教材——土木工程类

# 结构力学及应用

朱耀淮 何奎元 编著

戴力斌 主审

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

---

图书在版编目 (C I P) 数据

结构力学及应用 / 朱耀淮, 何奎元编著. —成都:  
西南交通大学出版社, 2014.5

高等职业技术教育“十二五”规划教材. 土木工程类  
ISBN 978-7-5643-3014-9

I. ①结… II. ①朱… ②何… III. ①结构力学—高  
等职业教育—教材 IV. ①0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 070916 号

---

高等职业技术教育“十二五”规划教材——土木工程类  
结构力学及应用

朱耀淮 何奎元 编著

|       |                                                                   |
|-------|-------------------------------------------------------------------|
| 责任编辑  | 孟苏成                                                               |
| 封面设计  | 墨创文化                                                              |
| 出版发行  | 西南交通大学出版社<br>(四川省成都市金牛区交大路 146 号)                                 |
| 发行部电话 | 028-87600564 028-87600533                                         |
| 邮政编码  | 610031                                                            |
| 网 址   | <a href="http://press.swjtu.edu.cn">http://press.swjtu.edu.cn</a> |
| 印 刷   | 成都蓉军广告印务有限责任公司                                                    |
| 成品尺寸  | 185 mm × 260 mm                                                   |
| 印 张   | 10.25                                                             |
| 字 数   | 256 千字                                                            |
| 版 次   | 2014 年 5 月第 1 版                                                   |
| 印 次   | 2014 年 5 月第 1 次                                                   |
| 书 号   | ISBN 978-7-5643-3014-9                                            |
| 定 价   | 24.00 元                                                           |

图书如有印装质量问题 本社负责退换  
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

# 前 言

本书是根据高等学校土建学科教学指导委员会审定的“工程力学（下）教学大纲”编写的。本书可作为高职本科道路与桥梁工程技术、建筑工程技术、建设设计、隧道与地下工程技术、铁道工程技术、建筑工程项目管理等专业的教材，也可作为土建类工程技术人员的参考用书。

在编写本书时，注意了以下原则：体现高等职业教育教学改革的特点，突出针对性、适用性和实用性；吸取有关教材长处，结合作者的教学经验；重视由浅入深和理论联系实际；内容简明扼要，通俗易懂，图文配合紧密。并配有练习题册。

本书的编写，具有以下特点：

一、为了使得叙述更确切，提出新的名称和符号：二杆外点、附基梁、相应结构、本结构、附加刚臂新符号、固平衡力矩、工程结构梁等。

二、为了使得分析计算更简单，提出了新方法：

- （1）点和刚片的组成规则；
- （2）虚铰的 5 种形式及分析应用；
- （3）寻找零杆判点判零杆；
- （4）应用三铰拱内力计算公式计算三铰刚架；
- （5）用渐近法计算绝对最大弯矩值。

三、为了理解更容易，应用了新方法推导计算公式：

- （1）三铰拱内力计算公式的简易推导；
- （2）虚功原理的简易推导；
- （3）临界荷载判别式的简易推导。

四、为了适应目前教学时数不同数量减少的情况，对内容进行了合理编排：

- （1）几何组成分析后，紧接桁架，有利于复习和应用组成分析内容；
- （2）为了便于理解，针对职业教育的对象，减少难点，增加了单跨超静定梁这一章；
- （3）考虑到学生接受能力的差异，把内容进行分层编排，方法讲解非常简单，如第 5 章力法和第 7 章力矩分配法，而较难的应用内容放在第 9 章工程结构梁和第 11 章高次超静定工程结构里讲解。

前 8 章属高职专科和本科都要讲授的内容，后 3 章属高职本科内容。

本书由湖南高速铁路职业技术学院朱耀淮副教授（第 1 章～第 6 章，第 8 章，第 9 章，第 11 章）、何奎元副教授（第 7 章、第 10 章）编著；戴力斌教授主审，且为本书提出了宝贵意见，在此表示感谢。

鉴于作者水平，本书难免有不足之处，敬请读者批评指正。

作 者

2014 年 1 月于迴雁峰

# 目 录

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 绪 论 .....                | 1  |
| 结构力学的研究对象和任务 .....       | 1  |
| 结构的计算简图 .....            | 2  |
| 结构和荷载的分类 .....           | 5  |
| 第 1 章 平面体系的几何组成 .....    | 7  |
| 1.1 几何构造分析的目的 .....      | 7  |
| 1.2 自由度和约束的概念 .....      | 8  |
| 1.3 几何不变体系的简单组成规则 .....  | 10 |
| 1.4 瞬变体系 .....           | 13 |
| 1.5 无虚铰法几何组成分析 .....     | 14 |
| 1.6 虚铰的 5 种形式及分析应用 ..... | 16 |
| 1.7 静定与超静定结构 .....       | 18 |
| 第 2 章 桁 架 .....          | 19 |
| 2.1 概 述 .....            | 19 |
| 2.2 结点法求简单平面桁架内力 .....   | 21 |
| 2.3 截面法求简单平面桁架内力 .....   | 24 |
| 2.4 联合应用结点法和截面法 .....    | 26 |
| 2.5 几种桁架受力性能的比较 .....    | 27 |
| 第 3 章 静定受弯结构 .....       | 29 |
| 3.1 附基静定梁 .....          | 29 |
| 3.2 静定平面刚架 .....         | 31 |
| 3.3 三铰拱 .....            | 40 |
| 3.4 应用三铰拱公式计算三铰刚架 .....  | 46 |
| 第 4 章 静定结构位移 .....       | 48 |
| 4.1 概 述 .....            | 48 |
| 4.2 虚功与虚功原理 .....        | 49 |
| 4.3 荷载作用下的位移计算 .....     | 52 |
| 4.4 图乘法 .....            | 56 |
| 4.5 图乘法技巧 .....          | 59 |
| 4.6 静定结构在支座移动时的位移 .....  | 62 |
| 4.7 互等定理 .....           | 63 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 第 5 章 力 法 .....            | 65  |
| 5.1 力法原理 .....             | 65  |
| 5.2 力法方程 .....             | 68  |
| 5.3 力法计算举例 .....           | 70  |
| 5.4 相应结构 .....             | 75  |
| 第 6 章 超静定单跨梁 .....         | 77  |
| 6.1 概 述 .....              | 77  |
| 6.2 支座位移与变形 .....          | 79  |
| 6.3 查表求杆端内力 .....          | 82  |
| 第 7 章 力矩分配法 .....          | 86  |
| 7.1 力矩分配法的基本原理及基本概念 .....  | 86  |
| 7.2 用力矩分配法计算举例 .....       | 90  |
| 第 8 章 影响线 .....            | 94  |
| 8.1 移动荷载和影响线的概念 .....      | 94  |
| 8.2 用静力法作单跨静定梁影响线 .....    | 95  |
| 8.3 利用影响线求量值 .....         | 99  |
| 8.4 荷载最不利位置的确定 .....       | 103 |
| 8.5 简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩 ..... | 107 |
| 第 9 章 工程结构梁 .....          | 110 |
| 9.1 多跨静定梁 .....            | 110 |
| 9.2 超静定组合结构梁 .....         | 114 |
| 9.3 多跨连续梁的弯矩内力 .....       | 116 |
| 9.4 用机动法作连续梁影响线简介 .....    | 121 |
| 9.5 连续梁的内力包络图 .....        | 124 |
| 第 10 章 位移法 .....           | 128 |
| 10.1 无侧移结构 .....           | 128 |
| 10.2 有侧移结构 .....           | 131 |
| 10.3 基本未知量 .....           | 135 |
| 第 11 章 高次超静定工程结构 .....     | 138 |
| 11.1 一般刚架 .....            | 138 |
| 11.2 等标高排架 .....           | 145 |
| 11.3 对称结构 .....            | 148 |
| 附录 单跨超静定梁杆端弯矩和杆端剪力表 .....  | 155 |
| 参考文献 .....                 | 157 |

# 绪 论

## 结构力学的研究对象和任务

工程中的各类构筑物，如房屋、桥梁、水塔、挡土墙、车辆机架等，都要承受一些荷载的作用，如人群、设备、车辆、水压力、土压力、货物荷载，等等。凡在构筑物中，起着承担荷载的骨架作用的部分，都称为结构。如图 1 所示为房屋骨架图，最上层的荷载由屋面板承担，屋面板再依次传递荷载给横梁、柱子、基础，这个骨架也就是此房屋的结构。

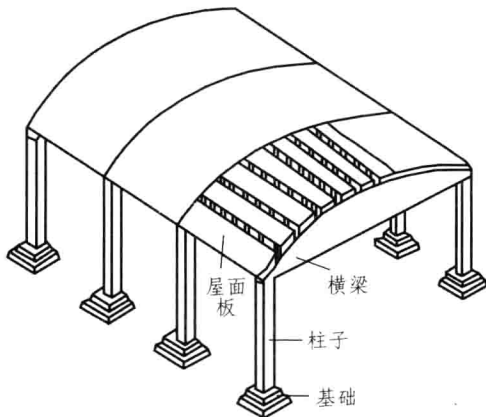


图 1

结构的类型有多种，通常可以依几何观点分为 3 种类型，即杆系结构、薄壁结构和实体结构。杆件的特点是，它的长度远大于另两个方向的尺寸，如矩形截面杆的长，远大于截面的宽和高。由杆件组成的结构称为杆系结构；如果杆系及其上的荷载都处于同一个平面内，就称为平面杆系结构。本书的研究对象限于平面杆系结构。薄壁结构是指它的厚度远小于另两个方向尺寸的结构，如水池、水塔等都可选取薄壁结构形式。结构的 3 个方向的尺寸为同一量级时，称为实体结构，如挡土墙结构。

研究杆系结构的任务包括讲授结构的合理组成，以保证结构内部不致产生相对运动，



使结构能维持外因作用下的平衡,研究结构在外因作用下的内力和变形,以便后续课对结构进行强度和刚度计算,来保证结构既安全又经济地工作。结构稳定问题在高职教材中都被略去,即便它对结构的安全也非常重要。因此,概括结构力学的主要任务,就是包括研究结构在荷载等因素作用下所产生的内力、变形以及稳定性,探讨结构的组成规律和合理形式。

## 结构的计算简图

实际构筑物的结构一般都比较复杂,完全按照实际结构进行分析计算,往往是不可能的。因此,必须抓住它的主要特征,略去次要的因素,采用经过简化的图形来代替它。这种能够代表实际结构的简化图形,就称为此实际结构的计算简图。结构力学就是按照结构的计算简图进行分析计算的。

选择结构的计算简图,应该保证此简图既能够正确地反映实际结构的变形情况和受力特点,又能使结构的计算得到简化。

### 1. 结构的结点

两根实际结构的杆件,有两种连接形式,如图 2(a) 和 3(a) 所示。在图 2(a) 中的不同杆件之间,用钢筋联成整体,再由混凝土浇注定位,可以称为刚结,刚结的计算简图如图 2(b) 所示。而在图 3(a) 中的杆件之间,虽然仍用混凝土浇筑固定了钢筋,但所用钢筋汇交抵抗弯矩的能力很弱,所以,可以近似地视为理想铰结,计算简图如图 3(b) 所示。

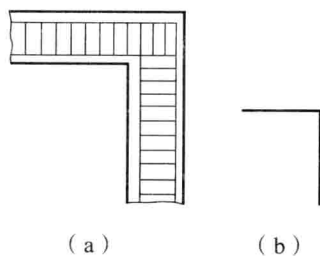


图 2

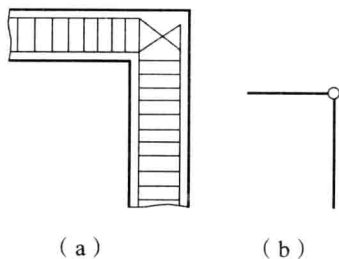


图 3

在结构的计算简图中,凡多根杆件联结的地方统称为结点。结点可以分为铰结、刚结和组合结点 3 种,如图 4 所示。

(1) 铰结点——凡被联结的各杆件,都可以绕着铰心自由转动,如图 4(a) 所示的为完全铰。

(2) 刚结点——如各杆件都不能绕着它的结点作杆件之间的相对转动,也就是各杆件之间的夹角保持不变,如图 4(b) 所示称为刚结点。

(3) 组合结点——此种结点处,有的杆件之间用刚结,而有的又用铰结,如图 4(c) 所示。此种结点为不完全铰结,也不完全为刚结。

以上任何一种结点,杆件之间在内力和变形方面,都有各自的特点,应注意理解和明确地区分。

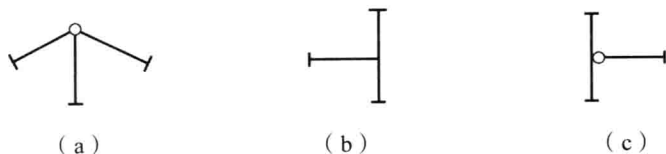


图 4

## 2. 结构的支座

结构与地基(或其他结构)相联系的装置称为支座。依据实际结构支座的约束特点,在工程力学中都绘出了简图。这些简图,也就是结构力学的支座计算简图,如图 5 所示。

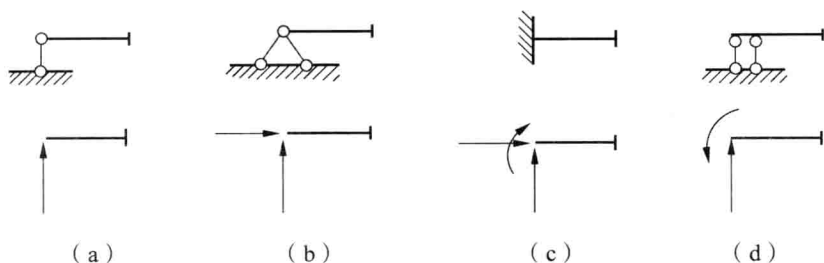


图 5

(1) 活动铰支座——这种支座的计算简图用一根链杆表示,它只能阻止结构沿支承链杆方向移动,如图 5(a)所示,反力的方向沿链杆轴向,大小未知。

(2) 固定铰支座——计算简图如图 5(b)所示,用两根相交的链杆表示。这种支座只允许结构绕铰中心转动,但不可以作任何方向移动,反力可任取两个相互垂直的分反力,两分反力的大小未知。

(3) 固定端支座——计算简图如图 5(c)所示,它表示结构被此种支座所固定,即不允许结构对支座作任何移动和转动,反力有 3 个未知量,包括任意两个互相垂直的分反力和一个力偶。

(4) 定向支座——计算简图如图 5(d)所示,此支座只允许结构沿杆轴方向有较小的移动。反力的未知量有两个,一个是沿链杆轴向的反力,另一个是抵抗转动的力偶矩。

要想由结构的实际支座作出合理的计算简图,仅仅依赖如上所述的工程力学的介绍还不够,此后还必须坚持理论联系实际的原则,特别是钢筋混凝土支座以前几乎没有讨论过,如何合理地给定各种支座的计算简图,还应该不断地摸索。

## 3. 杆系结构的简化

在杆系结构的计算简图中,同工程力学一样,杆件也都要采用它的轴线来表示。对于荷载,也应考虑实际的施加情况,近似地用集中荷载或分布荷载来表示。

关于选取结构的计算简图。一般杆系结构都可以化为平面杆系结构,故可先将结构体系简化为平面体系,并将该平面结构所应承担的荷载求出,施加到此平面结构的受力处。当然

也有不少结构不能简化为平面结构, 这种结构称为空间结构, 本教材不讨论。再就是判明结构杆件之间的连接, 并选择决定相适应的结点简图, 将结构中的杆件(轴线)连接起来。最后审定支座, 选取适当的支座得到简图。这样就得到了结构的计算简图。

如图 6(a) 所示为由梁、柱和基础等组成的结构图。其中每一排间距为  $L_1$  的横向梁、柱和基础, 处在一个平面内, 构成平面结构。屋面板将屋面荷载向下传, 传递到这些横向的平面结构上。

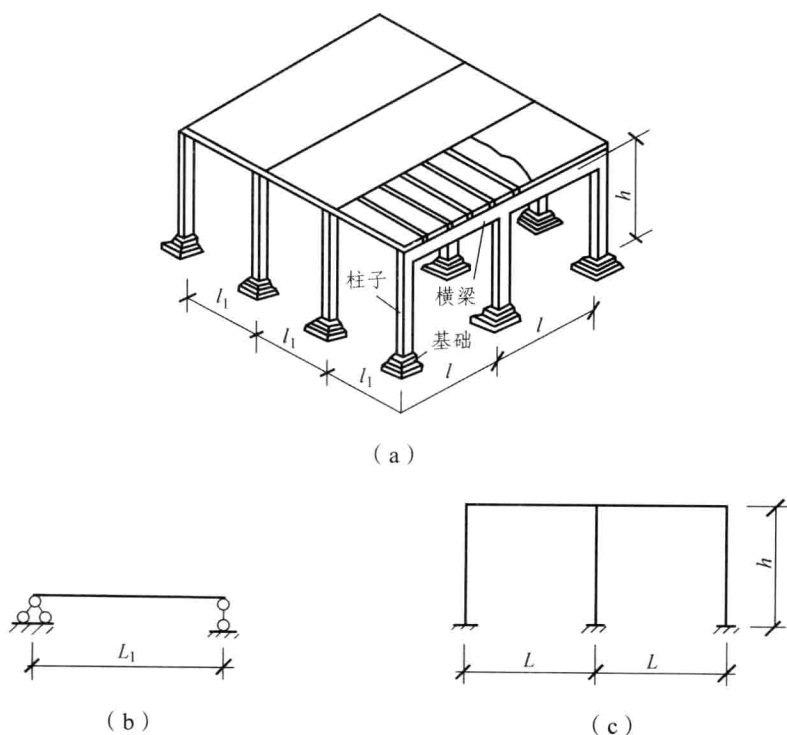


图 6

图 6(a) 所示的计算简图, 可以分解为两个部分讨论。一个屋面板, 它简支在横向平面结构之上, 屋面板的计算简图如图 6(b) 所示为简支梁, 设屋面板的荷载为  $p$ , 单位为  $\text{kN/m}^2$ 。通常对板可取  $1\text{ m}$  宽计算, 于是屋面板的荷载  $q_1$  应为

$$q_1 = 1 \times p_1 = p_1 \text{ (kN/m)}$$

另外一部分就是横向平面结构, 也就是屋面板的支座, 对中间二排架, 此支座反力为  $2Y$  (不计横梁自重), 横向结构的荷载  $q_2$  与  $2Y$  两者互为反作用, 有

$$q_2 = 2Y = 2 \left( \frac{q_1 l_1}{2} \right) = q_1 l_1 = p_1 l_1 \text{ (kN/m)}$$

横向结构的杆件连接, 设取图 2 刚结的形式, 钢筋混凝土结构一般多用此种刚结。对于支座, 要看柱子、基础和地基的实际情况而定, 如果柱子与基础连接为一体可抵抗弯矩, 而

且地基又良好,变形很小,此时支座可视为固定端支座,如图 6(c) 所示。图 6(b) 加上荷载  $q_1$  后和图 6(c) 加上荷载  $q_2$  后就是图 6(a) 所示结构的计算简图。

此后,结构力学将只对结构的计算简图进行分析和讨论。

## 结构和荷载的分类

### 1. 平面杆系结构分类

平面杆系结构是本书分析的对象,按照它的构造和力学特征,可分为 5 类:

(1) 梁——以受弯为主的直杆为直梁。本书主要讨论直梁,不涉及曲梁,更不考虑曲率对曲杆的影响。梁有静定梁和超静定梁两大类,如图 7(a)、(b) 所示。



图 7

(2) 拱——多为曲线外形,它的力学特征在以后讨论拱时再说明。常用的拱有静定三铰和超静定的无铰拱、两铰拱 3 种,分别如图 8(a)、(b)、(c) 所示。二铰拱和无铰的计算以三铰拱为基础,本书只讲三铰拱。

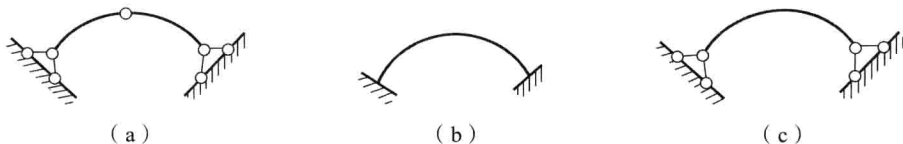


图 8

(3) 刚架——刚架由梁和柱等杆件构成,杆件之间的连接多为刚结。有静定刚架和超静定刚架两类,如图 9(a)、(b) 所示。

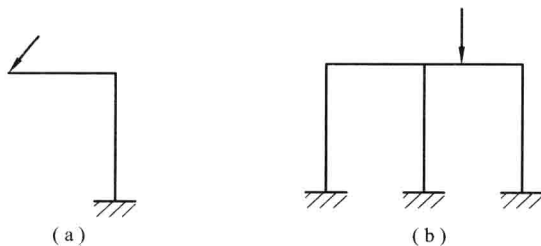


图 9

(4) 桁架——桁架由端部都是铰结的直杆构成,理想桁架的荷载必须施加在结点上,如图 10(a)、(b) 所示,有静定桁架和超静定桁架两种。

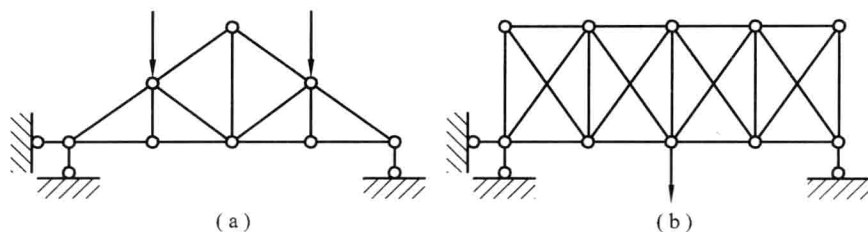


图 10

(5) 组合结构——它是桁架直杆和梁式杆件两类杆件组合而构成的结构，如图 11 所示。图中  $AB$  杆具有一个或多个组合结点，属梁式杆件，杆件  $AD$ ， $CD$ ……又为端部都为铰结的桁架式直杆，故图 11 (a) 和 (b) 所示均为组合结构。组合结构也有静定和超静定之分。

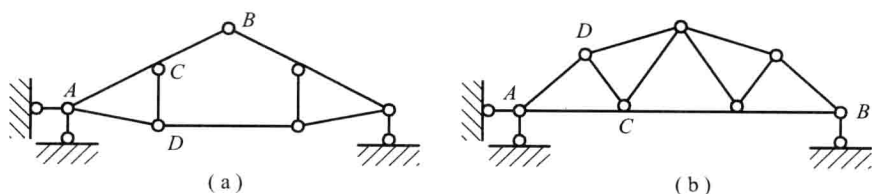


图 11

## 2. 荷载的分类

对于平面结构，通常可以将荷载归纳为集中荷载和线分布荷载两种，线分布荷载此后简称为分布荷载。除此对荷载还有不同的分类法。

### (1) 按荷载作用时间的长短分类。

① 恒载——在结构的使用期内，长期不变或变化值可以忽略的荷载称为恒线。如结构的自重、结构上不动的附属装置、设备等的自重，这些都是恒载。

② 活载——施加在结构上可以变化的荷载称为活载。常见的活载有：只改变大小的，如移动的人或物的荷载；也有只改变荷载位置的，如吊车或列车荷载，这种荷载也称为移动荷载。

### (2) 按荷载作用性质分类。

① 静载——由零缓慢地增加（加速度可忽略）到某一定值的荷载。最后的定值即为静载值。

② 动载——随着时间变化，必须考虑加速度影响的荷载。

### (3) 按荷载与构件的接触情况分类。

① 直接荷载——荷载直接与构件相接触。

② 间接荷载——荷载不直接与构件相接触。

# 第 1 章 平面体系的几何组成

## 1.1 几何构造分析的目的

结构是用来承受荷载的，通常情况下是由若干杆件互相联结而组成，但不能将杆件随意拼成结构。应该要求结构在承受荷载后，能牢固地维持它本身原有的几何形状和位置。这样的结构，才能在工程上使用。为此，要求结构必须满足一定的组成规律。一般将由若干杆件所构成的一个整体，称为体系。

由实践可知，如图 1.1 (a) 所示的体系，在外荷载作用下，若不考虑材料的微小变形时，能保持其几何形状和位置不变，这样的体系，称为几何不变体系。又如如图 1.1 (b) 所示的体系，即使在很小的外荷载的作用下，各杆件也会发生相对的机械运动，不能保持其原有的形

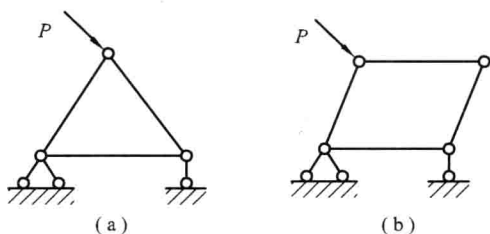


图 1.1

状和位置，这样的体系称为几何可变体系。显然，几何可变体系不能作为工程结构使用。就体系的几何形状和位置是否可变，进行体系的几何构造分析，称为体系的几何组成分析或机动分析。

平面体系几何组成分析的目的：

(1) 在结构设计选定计算简图时，必须分析它是否几何可变，从而决定它能否在工程结构上使用。

(2) 为了确定结构是静定还是超静定，以便采取相应的计算方法。

(3) 利用平面体系几何组成分析，掌握结构的构造特征，为后续的结构计算打下基础。

在进行几何组成分析时，由于略去了材料的弹性变形，因而将一根梁，一根链杆，或在体系中已被判明为几何不变的部分，都可视为一个刚体，它在平面体系中称为刚片。

## 1.2 自由度和约束的概念

### 1.2.1 平面体系的自由度

判断体系是否是几何可变，可从体系中的刚片是否会发生机械运动的分析着手。换句话说，就是从体系是否有自由度的分析着手。所谓体系的自由度，是指一个体系运动时，可以独立变化的几何参数的数目。这个数目，就是用来确定该体系的位置所必需的独立坐标数目。

例如在平面内的一个点的运动，它的位置可用两个坐标变量  $x$ 、 $y$  来确定，如图 1.2 (a) 所示，故自由度等于 2。一个刚片在平面内运动时，它的位置由刚片上面任一点  $A$  的坐标  $(x, y)$  和过  $A$  点的任一直线的倾角  $\varphi$  三个参数才能确定，如图 1.2 (b) 所示，所以一个刚片在平面内的自由度等于 3。

由体系自由度的定义和上述分析可知，在通常的情况下，若一个平面体系有  $n$  个独立的运动，就说明这个体系有  $n$  个自由度。

在工程上使用的结构，均为几何不变体系，对于大地其自由度为零或小于零。相对于大地凡自由度大于零的体系，都是几何可变的。

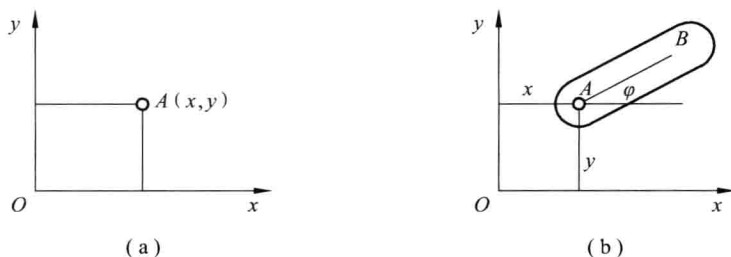


图 1.2

### 1.2.2 各种约束的分析

体系的自由度，可以通过在体系内加入某些装置，使刚片运动受到限制而减少，减少自由度的装置称为联系或约束。凡能减少一个自由度的装置，称为一个联系或一个约束。

#### 1. 链杆约束

用一根链杆  $AB$  将刚片与地基相联结，如图 1.3 (a) 所示。因  $A$  点不能沿链杆方向移动，故刚片将只有两种运动的可能，即刚片绕  $A$  点转动及刚片随链杆上的  $A$  点绕  $B$  点转动，刚片的自由度由原来的 3 减为 2。故一根链杆为一个联系或一个约束。

#### 2. 单铰约束

如图 1.3 (b) 所示，用一个铰  $A$  联结两个刚片。刚片 I 的位置可由  $A$  的坐标  $(x, y)$  和直线  $AB$  的倾角  $\varphi_1$  来确定，因此，它的自由度为 3；而刚片 II 就只有绕  $A$  点转动的自由，其位置用倾角  $\varphi_2$  就可以完全确定，因而减少了两个自由度。这样两个刚片的自由度由 6 减少为 4。

可见, 用铰  $A$  联结两个刚片减少了两个自由度。将这种联结两个刚片的铰称为单铰。显然, 1 个单铰相当于两个联系, 即相当于两根链杆的约束。反之, 同时联结两刚片的两根链杆, 也相当于 1 个单铰的作用。

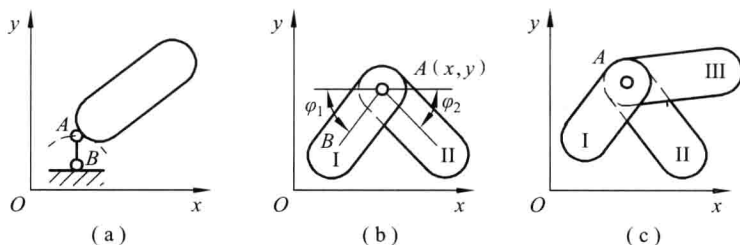


图 1.3

### 3. 复铰约束

将同时联结两个以上刚片的铰称为复铰。如图 1.3 (c) 所示, 刚片 I、II、III 共用 1 个复铰联结。若刚片 I 的位置已确定, 则刚片 II 和 III 只能绕  $A$  点转动, 从而每一刚片各减少了两个自由度。故此, 联结 3 个刚片的复铰, 实际上相当于两个单铰。由此可推知: 联结  $n$  个刚片的复铰, 其作用相当于  $(n-1)$  个单铰。

关于支座的约束, 在计算自由度时, 可将不同形式的支座化为链杆支座。如上所述, 活动铰支座相当于一根链杆支座, 固定铰支座相当于两根链杆约束。如图 1.4 所示, 对于 1 个定向支座, 可减少刚片的 2 个自由度, 相当于两根链杆支座; 而 1 个固定端支座对刚片的约束, 可减少刚片的 3 个自由度, 故相当于 3 根链杆支座。

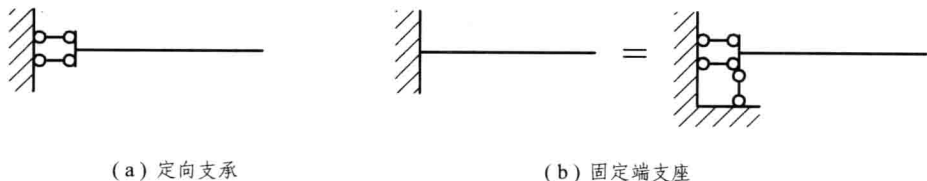


图 1.4

### 1.2.3 复铰的识别

一个平面体系, 通常可以看成是由若干个刚片加入某些联系, 并用支座链杆与地基相联结而组成的。因此, 在分析刚片之间的联系时, 必须正确判别复铰所包含的联系数, 在复铰折算成单铰计算联系数时, 应正确地识别该复铰所联结的刚片数, 如图 1.5 (a)、(b) 和 (c) 所示的几种情况, 其相应的单铰数分别为 1、2、3。

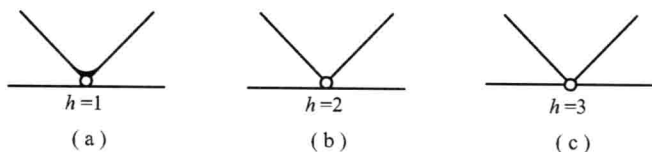


图 1.5



### 1.3 几何不变体系的简单组成规则

上节介绍了体系几何不变的必要条件, 本节将研究几何不变体系组成的充分条件。几何不变体系的简单组成规则, 也就是几何不变体系构成的组成规律。

#### 1.3.1 刚片和点的组成规则

将一个外点与一个刚片 (或几何不变的部分) 相联结成一个不变整体, 需要在点与刚片之间用两根不在同一直线上的链杆相连, 如图 1.6 (a) 所示, 故又称这种点为二杆外点, 在不变体系上增加或撤除一个二杆外点, 体系仍为一个几何不变体系。

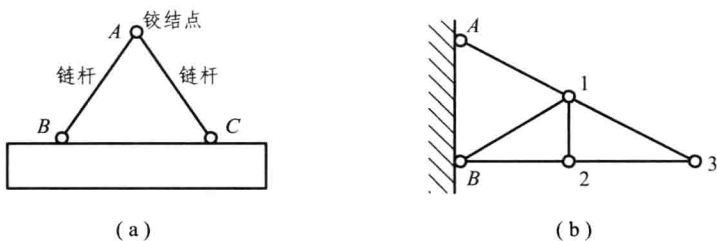


图 1.6

利用“刚片和点的规则”, 在分析某些体系时是比较方便的。例如分析图 1.6 (b) 所示的体系, 首先  $AB$  为刚片; 再按“刚片和点的规则”, 增加一个二杆外点得结点 1, 便得到几何不变体系  $A-1-B$ 。类似又以  $1-A-B$  刚片为基础, 增加一个二杆外点得结点 2……如此依次增加二杆外点, 可知最后得到的体系是一个无多余联系的几何不变体系。

反之, 也可以用撤除二杆外点的方法来分析图 1.6 (b) 所示的体系。因为从一个体系撤除一个二杆外点后, 所剩下的部分若为几何不变的, 则原来的体系也是几何不变的。现根据“刚片和点的规则”, 从图 1.6 (b) 所示的体系结点 3 开始撤除一个二杆外点, 然后依次撤除二杆外点 2、1……最后剩下的刚片  $AB$  是几何不变的, 故知原体系是一个几何不变体系。

当然, 若撤除二杆外点后, 所剩下的部分是几何可变的, 则原体系必定也是几何可变的。

#### 1.3.2 两刚片规则

两个刚片用三根既不完全平行也不汇交于一点的链杆相联, 这样组成的体系, 为无多余联系的几何不变体系。

如图 1.7 (a) 所示, 若刚片 I 和刚片 II, 用两根不平行的链杆  $AB$  和  $CD$  相联结。设刚片 I 固定不动, 则  $A$ 、 $C$  两点为固定; 当刚片 II 运动时, 其上  $B$ 、 $D$  两点, 各自沿与  $AB$  和  $CD$  杆垂直的方向运动。故刚片 II 的相对运动, 为绕  $AB$  与  $CD$  杆延长线的交点  $O$  转动,  $O$  点称为刚片 I 和 II 的相对转动瞬心。此情形类似于把刚片 I 和 II 用单铰在  $O$  点相联结。这又证明了两根链杆的约束作用相当于一个单铰, 这个铰的位置, 是在两根链杆的延长线上; 并且