高等职业教育课程改革示范教材

实用工程数学

GAODENG ZHIYE JIAOYU

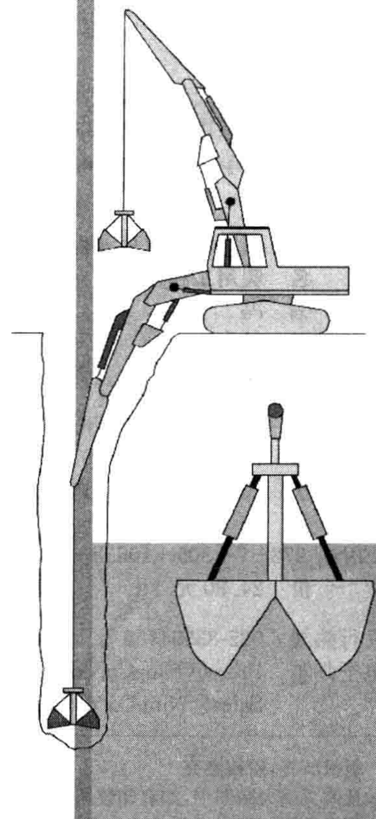
冯 宁◎主编

南京大学出版社

高等职业教育课程改革示范教材

实用工程数学

主　编　冯　宁
编　写　沈正梅　许　萍　王晓琴



南京大学出版社

内容提要

本书是高等职业教育课程改革示范教材之一. 教材内容包括空间解析几何、线性代数初步、级数、拉普拉斯变换、概率统计初步、集合与关系等.

本书针对高技能应用型人才培养目标的特点，在教学内容的安排上，遵循"以应用为目的，以必需够用为度"的原则，以"理解基本概念、掌握基本运算方法及应用"为依据，结合教育部制定的"高职高专高等数学课程教学的基本要求"及数学教学的实际经验编写的. 在教学内容的处理上，尽可能借助直观的几何模型、物理含义和实际背景阐述概念、定理和公式，适度论证，突出数学的基本思想和方法，注重阐明数学的实际应用价值.

本书可作为高职高专各专业通用数学教材，也可作为有关人员学习工程数学知识的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

实用工程数学 / 冯宁主编. —南京：南京大学出版社，2012. 12

高等职业教育课程改革示范教材

ISBN 978-7-305-10638-5

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①冯… Ⅲ. ①工程数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 234972 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　　　邮编　210093
网　　址　http://www.NjupCo.com
出 版 人　左　健

丛 书 名　高等职业教育课程改革示范教材
书　　名　实用工程数学
主　　编　冯　宁
责任编辑　吴　华　　　　　　　　编辑热线 025-83596997

照　　排　江苏南大印刷厂
印　　刷　南京新洲印刷有限公司
开　　本　787×1092　1/16　印张 12.25　字数 306 千
版　　次　2012 年 12 月第 1 版　　2012 年 12 月第 1 次印刷
印　　数　1～3000
ISBN　978-7-305-10638-5
定　　价　24.80 元

发行热线　025-83594756
电子邮箱　Press@NjupCo.com
　　　　　Sales@NjupCo.com(市场部)

前 言

为了适应新的职业教育人才培养要求，南京大学出版社根据教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专人才培养目标及规格》，组织有关高职院校进行了多次研讨，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来一些高职院校基础课程教学改革的经验，组织编写了一批"高等职业教育课程改革示范教材". 本书是其中的"高等职业教育数学系列教材"之一. 这些教材淡化了理论推导和证明，突出了职业教育改革特色，难易程度更适合现在高职院校的生源状况.

本书在编写过程中，遵循"注意课程衔接，面向专业需求，淡化严密形式，融入建模思想，注重应用能力"的原则，力求突出如下特点：

1. 面向专业需求，设计选学模块，供不同专业选用，满足工科专业的特殊需求.

2. 淡化严密形式，针对高职学生的数学基础，淡化数学概念和定理的严格表述，适度论证，不过分追求理论上的系统性和逻辑性，力求使基本概念、基本定理直观化、具体化.

3. 在每节开头，从问题入手，力求创造有利于学生发现知识的问题情境，激发学习兴趣，使重要知识点的引入更为朴实、简明和自然，结合具体内容进行数学建模训练，帮助学生获得正确的数学思想方法.

4. 注重应用能力，加强了数学知识在工程技术方面的具体应用，增加了有实际应用背景的例题和习题，注意与后续课程的衔接，力图体现高职教育实践性、应用性强的特点.

5. 在每节前增加了学习目标，引领学生明确目标，自主学习. 每章后增加了小结与复习的内容，帮助学生总结重要结论和解题方法，有利于高职学生快速提高运算技能，并起到释疑解难的作用. 节后都配有练习与思考、课后习题等，以帮助学生课前预习和课后复习.

本书教学时数建议：

序号	内容	建议学时	课时分配		适合专业
			讲授	习题课	
1	向量与空间解析几何简介	10	8	2	机械类
2	线性代数初步	16	14	2	电类、计算机类、化工类、经济类
3	级数	10	8	2	电类、计算机类
4	拉普拉斯变换	8	6	2	电类
5	概率统计初步	24	20	4	机械类、化工类、经济类
6	集合与关系	6	4	2	计算机类

全书的框架结构安排、统稿工作由常州轻工职业技术学院冯宁教授承担.第1章、第6章由沈正梅编写，第2、3章由冯宁编写，第4章由许萍编写，第5章由王晓琴编写.

由于编者的水平有限，虽经仔细推敲，不妥之处在所难免，还望专家、同行及广大读者批评指正.

编者

2012年9月

目　录

第 1 章　向量与空间解析几何简介

向量是解决数学、物理及工程技术问题的重要工具.本章在建立空间直角坐标系的基础上,建立向量的坐标表示式,用代数方法讨论向量的和、差、乘运算,并借助于向量讨论空间平面方程和直线方程,对常见的二次曲面进行简单介绍.

§1.1　空间直角坐标系及向量的基本概念

学习目标

1. 了解空间直角坐标系、空间点的直角坐标.
2. 会用空间两点间的距离公式计算两点间的距离.
3. 了解向量,向量的模,单位向量,向量的方向角、方向余弦等概念.
4. 会求任意向量的同向单位向量及其方向余弦.

引入问题

【定位问题】　一学生进入教学楼大门后向西走 5 m,通过电梯到 2 楼,每层楼高约 4 m,再向北走 10 m,那么学生所在位置如何表示?

主要知识

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的建立

在空间任取一点 O,过点 O 作三条两两互相垂直且具有相同长度单位的数轴,分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为**坐标轴**;点 O 称为**坐标原点**;任意两条坐标轴所确定的平面称为**坐标面**,即 xOy,yOz,zOx 三个坐标面.

建立空间直角坐标系时,习惯上常把 x 轴、y 轴置于水平面上,而 z 轴置于铅垂线上,各

轴正向及顺序遵循右手法则，即用右手握住 z 轴，右手的四指从 x 轴正向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向 y 轴的正向时，大拇指的指向是 z 轴的正向，如图 1-1 所示.

三个坐标面又将空间分成八个部分，各部分依次称为第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限，如图 1-2 所示，坐标面是卦限的界面，不属于任何卦限.

设点 M 为空间的一点，过点 M 分别作与三条坐标轴垂直的平面，交点分别为 P,Q,R（如图 1-3），这三点在坐标轴上的坐标依次为 x,y,z，则空间的点 M 唯一确定了一个三元有序数组(x,y,z)——点 M 的坐标. 显然，空间的点 M 与有序数组(x,y,z)之间建立了一一对应关系.

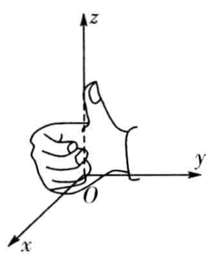


图 1-1

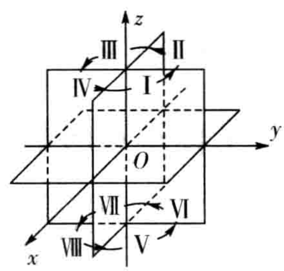


图 1-2

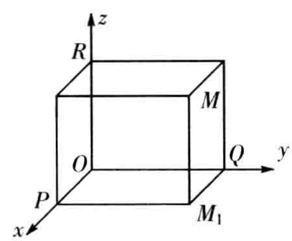


图 1-3

空间直角坐标系中八个卦限、坐标轴、坐标面上点的坐标特征列表如下（见表 1-1）：

表 1-1

卦限	各卦限的坐标特征	特殊点	特殊点的坐标特征
Ⅰ	(+,+,+)	原点	(0,0,0)
Ⅱ	(−,+,+)	x 轴上的点	$(x,0,0)$
Ⅲ	(−,−,+)	y 轴上的点	$(0,y,0)$
Ⅳ	(+,−,+)	z 轴上的点	$(0,0,z)$
Ⅴ	(+,+,−)	xOy 面上的点	$(x,y,0)$
Ⅵ	(−,+,−)	yOz 面上的点	$(0,y,z)$
Ⅶ	(−,−,−)	xOz 面上的点	$(x,0,z)$
Ⅷ	(+,−,−)		

本节的引入问题可通过建立空间直角坐标系来解决. 若以教学楼大门为原点，向西方向为 x 轴正向，向上方向为 z 轴正向，根据右手法则，向南方向为 y 轴正向，则学生所在位置可表示为(5，−10，4)(单位：m).

2. 空间两点间的距离

如图 1-4 所示，设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，过点 M_1，M_2 分别作垂直于三条坐标轴的六个平面，它们围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，其长、宽、高三条棱的长度分别为：

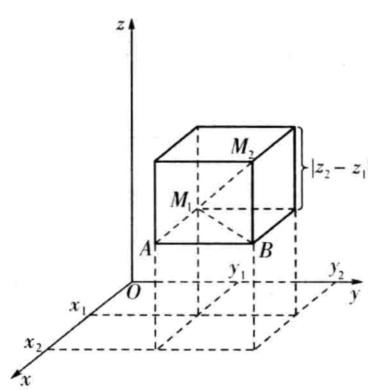


图 1-4

$$|x_2-x_1|,|y_2-y_1|,|z_2-z_1|.$$

根据几何知识,长方体对角线的平方等于三条棱长的平方和,即

$$|M_1M_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+|z_2-z_1|^2,$$

于是

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \tag{1-1}$$

公式(1-1)称为**空间两点间的距离公式**.

特别的,点 $M(x,y,z)$ 与原点 O 的距离公式为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1-2}$$

例 1　求点 $M(x,y,z)$ 到三条坐标轴的距离.

解　设点 M 在 x 轴上的投影为点 P(如图 1-3),则点 P 的坐标为 $P(x,0,0)$,根据三垂线定理可知 $MP\perp x$ 轴,即线段 MP 的长度就是 M 到 x 轴的距离,由公式(1-1),得

$$d_x=|MP|=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{y^2+z^2},$$

同理可得,点 M 到 y 轴、z 轴的距离分别为

$$d_y=\sqrt{x^2+z^2},d_z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

例 2　已知点 $A(7,-1,12)$,$B(1,7,-12)$,在 z 轴上求一点 C,使得 $\angle ACB$ 为直角.

解　由题意设点 C 的坐标为 $(0,0,z)$,由公式(1-1),得

$$|AB|=\sqrt{(1-7)^2+[7-(-1)]^2+(-12-12)^2}=26,$$
$$|AC|=\sqrt{(0-7)^2+[0-(-1)]^2+(z-12)^2}=\sqrt{50+(z-12)^2},$$
$$|BC|=\sqrt{(0-1)^2+(0-7)^2+(z+12)^2}=\sqrt{50+(z+12)^2},$$

要使得 $\angle ACB$ 为直角,必有 $|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$,即

$$[50+(z-12)^2]+[50+(z+12)^2]=26^2,$$

解得

$$z=\pm 12,$$

所求点 C 为 $(0,0,12)$ 或 $(0,0,-12)$.

二、向量的基本概念及向量的坐标表示

1. 向量的基本概念

物理中的速度、加速度、力、位移等不仅有大小,而且有方向,称既有大小又有方向的量为**向量(矢量)**. 一般用标上箭头的字母或黑体小写字母表示向量,如 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 或 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$. 在几何上,向量用有向线段表示,起点为 A、终点为 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$.

需要说明的是,为避免读者书写错误,本章用标上箭头的字母表示向量.

向量的大小(有向线段长度)称为向量的**模**,记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$.

模为 0 的向量称为**零向量**,记作 $\vec{0}$,零向量的方向是任意的.

模为 1 的向量称为**单位向量**. 与非零向量 $\vec{a}$ 同向的单位向量记作 $\vec{a}^0$,且有

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

方向相同且模相等的两个向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 称为**相等向量**,记作 $\vec{a}=\vec{b}$.

2. 向量的坐标表示

(1) 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示:在空间直角坐标系中,沿 x 轴、y 轴、z 轴正向分别取单位向量,称为**基本单位向量**,分别记作 $\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$.

设向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$(如图 1-5). 根据向量的数乘运算及向量相等的定义,得

$$\overrightarrow{M_1P} = (x_2 - x_1)\vec{i},$$
$$\overrightarrow{PQ} = (y_2 - y_1)\vec{j},$$
$$\overrightarrow{QM_2} = (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

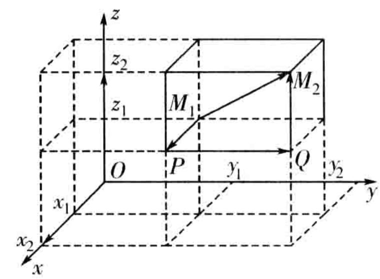


图 1-5

由向量的加法,得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM_2} \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

因此,向量$\overrightarrow{M_1M_2}$可以由其在 x,y,z 轴的分向量$(x_2-x_1)\vec{i}$,$(y_2-y_1)\vec{j}$,$(z_2-z_1)\vec{k}$ 表示. 由于向量$\overrightarrow{M_1M_2}$与有序数组 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1 存在一一对应关系,故可用它来表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,记作

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

上式称为**向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式**. 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在三条坐标轴上的投影 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1 称为**向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标**.

特别的,以原点 O 为起点、$M(a_x,a_y,a_z)$为终点的**向量$\overrightarrow{OM}$**(如图 1-6)的坐标表示式为

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$

注意	向量的坐标表示式不能与点的坐标混淆. 例如,$\vec{a}=\{1,-2,0\}$表示向量,$A(1,-2,0)$则表示点 A.

(2) 向量的模及方向余弦的坐标表示:任一非零向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$都可看做以原点 O 为起点,$M(a_x,a_y,a_z)$为终点的向量$\overrightarrow{OM}$,即 $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$. 由空间两点间的距离公式,可知向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$的模

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

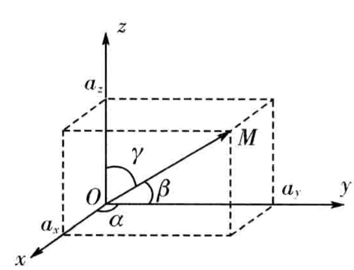


图 1-6

非零向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 的方向可以分别用向量 $\vec{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角来确定(如图 1－6).

定义 1－1　非零向量 $\vec{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角称为**方向角**,分别记作 α,β,γ(其中 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$),方向角的余弦称为非零向量 $\vec{a}$ 的**方向余弦**.

由图 1－6 可知,非零向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 的方向余弦的坐标表示式为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

显然,方向余弦满足以下关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

与非零向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量为

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{|\vec{a}|}\{a_x,a_y,a_z\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

(3) 向量线性运算的坐标表示:利用向量的坐标表示,可以将向量的线性运算转化为坐标间的代数运算.

设向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,则有

① $\vec{a}+\vec{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$;

② $\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$;

③ $\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$($\lambda$ 为实数);

④ $\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$(若 b_x,b_y,b_z 中某一个为零,相应的分子也为零).

例 3　已知两点 $M_1(1,-\sqrt{2},5)$,$M_2(2,0,4)$,求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦、方向角及与$\overrightarrow{M_1M_2}$同方向的单位向量$\overrightarrow{M_1M_2}^0$.

解　由于 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2-1,0-(-\sqrt{2}),4-5\}=\{1,\sqrt{2},-1\}$,所以

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}=2,$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=-\frac{1}{2},$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{2\pi}{3},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right\},$$

或 $$\overrightarrow{M_1M_2}^0=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right\}.$$

例 4 设向量 $\vec{a}$ 的方向角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，$\beta=\frac{\pi}{2}$，γ 为锐角，且 $|\vec{a}|=2$，求向量 $\vec{a}$ 的坐标表示式.

解 因为 $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

且 $$\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\frac{\pi}{2},\gamma\text{ 为锐角},$$

于是有 $$\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}\text{舍去}\right),$$

所以 $$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^0=2\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\{\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}.$$

练习与思考 1.1

1. 写出点 $M(1,-5,2)$ 关于原点、三个坐标轴、三个坐标平面的对称点的坐标.

2. 在 $P(5,2,3)$，$Q(-1,-1,2)$，$R(0,3,7)$ 中，哪一个点在 yOz 平面之中？哪一个点距离 xOz 平面最近？

3. 设 α,β,γ 是向量 $\vec{a}$ 的三个方向角，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$ 为多少？

习题 1.1

1. 在 x 轴上求与两点 $P_1(-4,1,7)$ 和 $P_2(3,5,-2)$ 等距离的点.

2. $\triangle ABC$ 的顶点坐标为 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$，试证明 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

3. 求点 $P(4,-3,5)$ 到原点及三个坐标轴的距离.

4. 已知 $A(-2,3,5)$，$B(1,-1,z)$，$|AB|=13$，求点 B 的坐标未知量.

5. 求向量 $\vec{a}=\{2,-5,\sqrt{7}\}$ 的模、方向余弦及与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量.

6. 在 yOz 平面上，求与 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 等距离的点.

7. 【平衡合力】已知力 $\vec{F_1}=\{1,1,3\}$，$\vec{F_2}=\{2,-3,1\}$ 作用于同一点，问如何使力才能与 $\vec{F_1}$ 和 $\vec{F_2}$ 的合力达到平衡？

8. 已知 $\vec{a}=\{3,5,-1\}$，$\vec{b}=\{2,-1,1\}$，$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$，求向量 $\vec{c}$ 的方向余弦及与 $\vec{c}$ 平行的单位向量.

9. 设向量 $\vec{a}$ 与各坐标轴成相等的锐角，$|\vec{a}|=2\sqrt{3}$，求向量 $\vec{a}$ 的坐标表示式.

§1.2　向量的数量积与向量积

学习目标

1. 能够熟练进行向量的数量积与向量积的运算.
2. 会判断两个向量是否平行、垂直.

引入问题

【常力做功】 若一物体在常力$\vec{F}$的作用下,由点A沿直线移动到点B,其位移$\vec{S}=\overrightarrow{AB}$(如图1-7),则力所做的功为$W=|\vec{F}||\vec{S}|\cos\theta$,其中$\theta$为$\vec{F}$与$\vec{S}$的夹角,功$W$是一个数量.

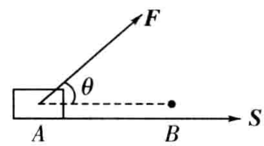


图1-7

【转动力矩】 用一个扳手拧紧或拧开螺丝,就会产生一个转量,即转动力矩,如图1-8所示,转动力矩是一个向量,其方向在转动轴上.由力学知识可知,引起物体旋转的是力$\vec{F}$的分量$|\vec{F}|\sin\theta$,其垂直于$\vec{r}$方向,若记转动力矩为$\vec{\tau}$,则其大小即为$\vec{\tau}$的模

$$|\vec{\tau}|=|\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta.$$

力矩$\vec{\tau}$的方向:$\vec{\tau}\perp\vec{r}$,$\vec{\tau}\perp\vec{F}$,且$\vec{r}$,$\vec{F}$,$\vec{\tau}$构成右手系,即当右手的四指从$\vec{r}$以小于π的角度转向$\vec{F}$时,大拇指所指的方向就是力矩$\vec{\tau}$的方向.

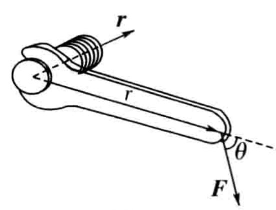


图1-8

上述两个案例中,前者是由两个向量决定一个数量的运算,后者是由两个向量决定一个新的向量的运算.向量的这两种乘积,在其他领域中也会遇到.数学上把这两类运算抽象为向量的数量积与向量积.

主要知识

一、向量的数量积

1. 数量积的定义及性质

定义1-2 设两个向量$\vec{a}$,$\vec{b}$,夹角为$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$,则称数$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**(或点积),记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$,即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\qquad(0\leqslant(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\leqslant\pi).$$

由数量积的定义，上述案例中做功问题可表示为

$$W=\vec{F}\cdot\vec{S}.$$

注意	$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 中的"·"不能省略，也不能改为"×".

数量积有以下性质：

① $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$，特别地，$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$；

② $\vec{a}\cdot\vec{0}=0$；

③ 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

④ 结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$，其中 λ 为实数；

⑤ 分配律 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

由数量积的定义可知，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 的充要条件是 $|\vec{a}|=0$，$|\vec{b}|=0$ 或 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{2}$，因此有下述定理.

定理 1－1 两非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直（记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$）的充要条件是 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

例如，$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 两两相互垂直$\Leftrightarrow\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$.

例 1 已知$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，求向量 $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$ 的模.

解 根据数量积的定义和性质，有

$$\begin{aligned}|\vec{c}|^2&=\vec{c}\cdot\vec{c}=(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})\\&=9\vec{a}\cdot\vec{a}-6\vec{b}\cdot\vec{a}-6\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=9|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})+4|\vec{b}|^2\\&=9\times3^2-12\times3\times1\times\cos\frac{\pi}{3}+4\times1^2\\&=67,\end{aligned}$$

所以

$$|\vec{c}|=\sqrt{67}.$$

2. 数量积的坐标表示

设向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，

则

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}),\\&=a_xb_x(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\cdot\vec{k})+a_yb_x(\vec{j}\cdot\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\cdot\vec{j})\\&\quad+a_yb_z(\vec{j}\cdot\vec{k})+a_zb_x(\vec{k}\cdot\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\cdot\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\cdot\vec{k}),\end{aligned}$$

所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{1-3}$$

公式(1－3)称为**数量积的坐标表示式**，即两向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和.

由式(1－3)及向量数量积的定义还可得到两非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角余弦的坐标表达式

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{1-4}$$

由上式知　　$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$

例 2　已知三点 $A(-1,2,3)$，$B(1,1,1)$，$C(0,0,5)$，求$\angle ABC$.

解　作向量$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{BA}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角即为$\angle ABC$.

$$\overrightarrow{BA} = \{-1-1,2-1,3-1\} = \{-2,1,2\},$$

$$\overrightarrow{BC} = \{0-1,0-1,5-1\} = \{-1,-1,4\},$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-2)\times(-1)+1\times(-1)+2\times 4 = 9,$$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(-2)^2+1^2+2^2} = 3, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2} = 3\sqrt{2},$$

于是
$$\cos\angle ABC = \cos(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以
$$\angle ABC = \frac{\pi}{4}.$$

例 3【斜力做功】　设有一方向角分别为 $60°$，$60°$，$135°$，大小为 100 N 的力$\vec{F}$，它使得一质点从 $A(3,-1,5\sqrt{2})$做直线运动至点 $B(-1,4,0)$，求力$\vec{F}$所做的功(坐标长度单位：m).

解　由于力的方向角分别为 $60°$，$60°$，$135°$，所以与力$\vec{F}$同向的单位向量为

$$\vec{F}^0 = \{\cos 60°,\cos 60°,\cos 135°\} = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\},$$

于是
$$\vec{F} = |\vec{F}|\cdot\vec{F}^0 = 100\cdot\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \{50,50,-50\sqrt{2}\},$$

又
$$\overrightarrow{AB} = \{-1-3,4+1,0-5\sqrt{2}\} = \{-4,5,-5\sqrt{2}\}.$$

因此，力$\vec{F}$所做的功为

$$W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = 50\times(-4)+50\times 5+50\sqrt{2}\times 5\sqrt{2} = 550(\text{J}).$$

二、两向量的向量积

1. 向量积的定义及性质

定义 1-3　设向量 $\vec{c}$ 由两个已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 按下列方式给出：

(1) $\vec{c}$ 的模　$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

(2) $\vec{c}$ 的方向　$\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{b}$，且按右手法则确定，即当四指从 $\vec{a}$ 转向 $\vec{b}$ 时，大拇指所指方向即为 $\vec{c}$ 的方向(如图 1-9)，则向量 $\vec{c}$ 称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**向量积**(或**叉积**)，记作 $\vec{a}\times\vec{b}$，即 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

注意	这里的"×"不能省略，也不能写成"·".

按上述定义，案例中提到的力矩 $\vec{\tau}$ 可表示为 $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$.

向量积的模 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$，在几何上表示以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积(如图 1-10).

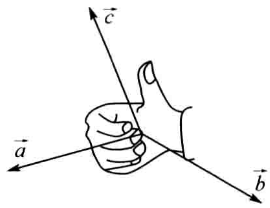


图 1-9

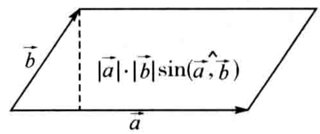


图 1-10

向量积有以下运算性质：

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$；

(2) 反交换律 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$；

(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$，其中 λ 为实数；

(4) 分配律 $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，则$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$ 或 π，$\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$，因此有下述定理.

定理 1-2 两非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行($\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$)的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

由向量积的定义、运算性质，可得

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0};$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

2. 向量积的坐标表示

设向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})\\&\quad+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k}),\end{aligned}$$

所以
$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}. \tag{1-5}$$

公式(1-5)称为**向量积的坐标表示式.**

为便于记忆，利用 § 2.1 中二阶、三阶行列式的展开式(2-2)和(2-4)，将式(1-5)用行列式表示为

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$