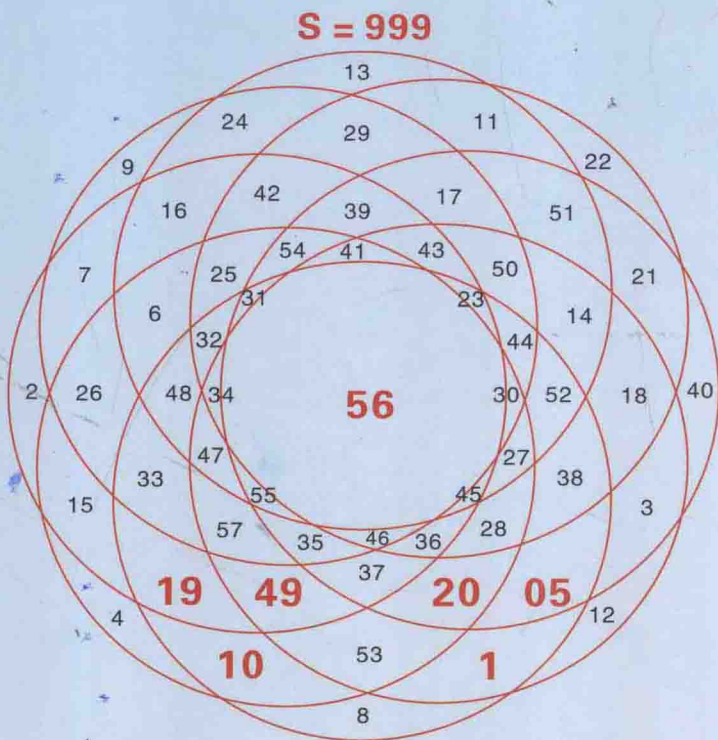


\* 组合数学新书 \*

# 幻环探秘

杨高石 著



# EXPLORATION OF MAGIC RINGS

国际文化出版公司出版

\* 2005 年 5 月 \*

\* 组合数学新书 \*

# 幻环探秘

杨高石 著

国际文化出版公司出版

## 图书在版编目（CIP）数据

幻环探秘/杨高石 著· - 北京：国际文化出版公司，2004.12

ISBN 7 - 80105 - 625 - 6

I. 幻… II. 杨… III. 数学 - 普及读物

IV. 01 - 49

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第 071692 号

---

|      |                          |
|------|--------------------------|
| 书 名  | 幻环探秘                     |
| 作 者  | 杨高石                      |
| 出 版  | 國際文化出版公司                 |
| 发 行  | 國際文化出版公司 发行部             |
| 地 址  | 北京东土城路乙9号                |
| 经 销  | 全国新华书店                   |
| 责任编辑 | 李正堂                      |
| 印 刷  | 曲靖霞光总公司霞光印刷厂             |
| 开 本  | 787 × 1092 1 / 16        |
| 字 数  | 475千字                    |
| 印 张  | 30                       |
| 印 数  | 1000                     |
| 版 次  | 2005 年 6 月第 1 版 第 1 次印刷  |
| 书 号  | ISBN 7 - 80105 - 625 - 6 |
| 定 价  | 30.00元                   |

谨以幻环的美丽花瓣  
献给敬爱的易钟焜老师

## 作者简历



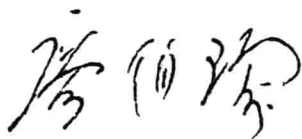
杨高石，昆明理工大学教授。1928年出生于长沙。1933—1938：长沙幼幼小学肄业。1939—1945：国立第十一中学毕业。1945—1948：国立兵工大学兵器系肄业。1948—1952：国立中央大学—南京大学数学系毕业(其中，曾参加中国人民解放军、曾转业到中共云南省委秘书处工作)。1952—1955：云南大学机械系毕业。1955—1958：北京第一设计院工作；曾被评为北京市“先进工作者”。1958—1989：昆明工学院任机床电器教研室教师；“机械振动学”、“机床动态分析”等硕士研究生导师。著有《机床设计手册》、《现代机械优化设计》、《现代机械设计方法》以及《计算机算法语言与计算数学》等教材。主要科研成果有：“阳极铜连续铸锭自动线设计”；“顺酐车间成套设备设计”；“高压破坏加氢专用设备设计”；“PCS-1型微机配料系统设计”；“机床主传动系统模块式低噪音优化设计”；“无机套粘试件组正交优化设计及数据处理”；“国家标准GB1117-89的设计与制订”等。主要科研论著有：《多杆机构的完全平衡与非完全平衡》；《行星齿轮与波导齿轮》；《行星差动齿轮机构》；《链环传动》；《透平压缩机原理》；《机床主传动系统静刚度计算的影响系数法及其专用程序》；《多自由度主轴扭振系统动态分析的传递矩阵法及其源程序》；《粘接应力分析的有限单元法及其通用程序》；《套粘接头的强度设计及其通用程序》；《异材套粘的双曲函数型非线性应力分布及其典型公式》；《套粘接头剪切强度的可靠性设计》；《水轮发电机组转速的有差调节和无差调节》；《金属切削机床的人机工程》；《日显威力的工业工程》；《三峡工程谏议》等。1989年离休。离休后，曾热心参加科普工作，译有《我们到了月球》（英汉对照，曾在《英语沙龙》连载）；著有《太空的向往》、《哈勃望远镜》、《国际空间站》等科普读物。又曾创建“钟瑛奥数培训部”，并著有《二次素数等幂和》、《双行素数表（ $P < 100000$ ）》、《幻方寻幽》以及包括《幻方之美》、《幻环之美》、《整数之美》、《素数之美》、《级数之美》、《复数之美》、《曲线之美》、《同余之美》、《“抽屈”之美》、《矩阵之美》、《正交之美》、《运筹之美》……等十余分册的“数学美学丛书”。

## 序 (一)

原昆明理工大学校长 廖伯瑜

据我所知,《幻环探秘》是国内外第一部有关“幻环”的专著。

作者杨高石同志,1958年自北京调来我校,长期在机械系从事教学与科研工作。他数十年如一日,勤勤恳恳,兢兢业业、任劳任怨、刻苦钻研;教学成绩颇佳,深受各级学生爱戴;科研成果颇丰,深受厂矿企业欢迎。他的业务能力,也得益于他的数学功底。1983年,我校研究生班《机械振动学》课程,首次引进美国原文教材,他临时受命,负责讲授“多自由度振动系统”一章,对其中的矩阵分析方法,应用自如、效果很好。1989年离休之后,他更是“离而不休”,除承担一些成人教育和科技培训工作外,还结合自己的数学爱好,创建了“钟瑛奥数培训部”,并长途跋涉,对一些边远地区的青少年学生进行奥数辅导。他还热心于扶贫励学活动,并资助失学儿童复学。特别是进入21世纪以来,他对组合数学的一些内容进行了比较广泛深入的学习,对古老而又新颖的幻环领域进行了坚持不懈的探索,终于有所突破,有所创新,取得了一系列初步成果,得到了数学界专家学者同行们的一致好评。《幻环探秘》一书的正式出版,是对组合数学的一份贡献,也是杨高石教授在幸福晚年、老有所乐、老有所学、老骥伏枥、耕耘不已的一次收获。我愿借此机会,对他表示祝贺;并对支持和帮助此书审订、出版、印制、发行的有关单位和同志表示感谢!



2005年3月24日

## 序 (二)

延安教育学院教授 原中国幻方研究者协会主席 高治源

这本厚厚的《幻环探秘》，是一位77岁老人——杨高石先生辛勤创作的。拿起这本书，我们会很惊讶，因为杨老先生用坚强的毅力，聪颖的才华，为我们开避了一个丰富多彩的幻环世界。这个幻环世界充满着数学的美妙，千姿百态的奇趣，有着很强的生命力，是组合数学发展的新天地。

大家普遍重视研究幻方，从九宫图到高阶幻方，从和幻方到积幻方进而到双重幻方，从自然数组成的幻方到各种趣味数幻方，从一次幻方到高次幻方，从平面幻方到幻立方以及高维幻方，可以说我们现代幻方研究者们已经创造出一个让人十分欣慰的大观园了。可是，我们生活在一个“方圆”的世界里，在这世界里，总是‘方中有圆’、‘圆中有方’的，我们领略了幻方世界后，自然应该在幻环的世界里遨游一番了。

我国不仅是幻方的故乡，而且也曾拥有多采的幻环资料。在李严著的《中算史论丛》(第一集)书中，全面介绍了我国历史上中算家的纵横图研究。这里不仅介绍了洛书及宋朝杨辉，明朝陈大位，王文素的纵横图，而且也介绍了宋朝杨辉、丁易东，明朝王文素，以及清朝方中通、张潮、保其寿的各种幻环，例如聚五图、聚六图、聚八图、攒九图、八阵图、辐奏图、花王字图、古珞钱图、连环之图、纓络图、参三图、揲四图、五五图、更定聚六图、七攘图、九宫图、瓜瓜失图等，它们都是由不同的圆圈构成的各种样式的幻环。此外保其寿还有六合立方、浑三角、六合浑图、六道浑天图等一些在球体、多面体上所作的数阵图等等。

新中国成立以来，我国的幻环研究散见于各种数学杂志和一些报纸的游艺活动中。在近年的奥数书中和数学教育杂志上，有一些研究幻圆(同心圆和直径组成的幻环)的文章。如詹天文、施学良就对幻圆和幻球作过理论上的探讨。1999年5月，日本幻方研究专家阿部乐方，给我寄来了一本阿部义雄的研究数学艺术的书，这本书除了研究三角阵、四角阵、三结晶菱形阵、有心三角、四角、五角相结阵、V字形五方形相结阵、Z字形相结阵、多个立方体相邻阵等外，还研究了一些幻环，但他主要研究了由五个圆构成的幻环以及由一个圆和多个三角形共同构成的像葵花一样的幻环。在网上我们只看到了西方国家研究

幻圆的一些网页，也许幻环在电脑制作上有一定难度的原因吧，网上的幻环资料还不够丰富，尽管如此我们看到幻环在世界各地都有不少的研究者。

我们感到非常的高兴，因为杨高石先生的《幻环探秘》一书提出了那么多的幻环概念，探索了那么多的幻环布局规律，描画了那么多的由多个等径圆环构成的、环环相扣的幻环图画。他在回顾我国幻环研究的历史基础上，大胆开创幻环研究的新内容，如均布型幻环、均布型全重幻环、平方数幻环、素数幻环、点幻环、球面点幻环等。布局幻环是一种高智力的思维活动，杨老先生推出了变换法，互补原理，展开法，差补法等布阵方法，他是那样仔细认真地为我们作了介绍。有些幻环内容，他竟然不厌其烦，想将全部内容罗列给我们，我们不得不佩服他研究数学的那种一丝不苟的情怀。纪念幻环是一种高尚的文化品味，杨老先生在去年的《云南老年报》上就发表了国庆纪念幻环，他创造的纪念幻环还赠给学校及获得《钟瑛数学奖》的中学生们，以此鼓励青少年热爱科学、喜爱数学研究。应该提出的是2001年，杨老先生为北京申奥专门设计了一个“奥林匹克幻五环”的问题，他与王忠汉先生合作，让数千名中学生参加解题活动；为庆祝我国申奥成功，他还将奥林匹克幻五环的四组解制成铜质贺屏，亲自赠给北京市2008奥筹委。这是一个有着历史意义的趣味数学活动，也表达了他对五湖四海朋友将相聚北京的一种和谐美好的祝愿。

读了《幻环探秘》一书，我们感到杨老先生已经沉浸在幻环所表现出的一种数学之美中。幻环的千变万化呈现出一幅百花争艳的景象，他惊叹这景象的美妙神奇；幻环的布阵设计中时有“山重水复疑无路”的感受，而他的努力，往往会出现柳暗花明、峰回路转的惊喜。幻环的理论求解过程，是那樣的幽深莫测啊！可是他在研究中却欣赏到了数学的均衡美、对称美、奇巧美、简洁美、数形统一美……，于是他时而心旷神怡，时而拍手称快。

数学是一个万花竞放的大世界，而幻环是一个独具特色的花园。杨高石先生乐于在此耕耘浇灌，愿他的勤劳和智慧能获得更多美妙的果实。

2005年正月初六

## 序 (三)

中国数学学会会员 中国幻方研究者协会副主席 施学良

我国著名数学家陈景润在他所著的《组合数学》一书的序言(1983年12月)中写道：“组合数学具有悠久的历史，现在世界上许多组合数学家认为中国是先期组合数学的发源地。这门古老的学问之所以焕发出新的活力，主要是由于计算机的出现和计算机科学的蓬勃发展，提出了一系列传统数学无法解决的实际问题，这促使数学工作者以现代的理论和方法，把组合数学建立在全新的基础之上，成为计算机科学发展的一个不可分割的组成部分。因此，组合数学的发展，对于我国科学技术现代化，具有重要的现实意义。”

陈景润所说的先期组合数学，就是中国两千多年前发明的《洛书》。《组合数学》第一章“引言”的第一节，就首先介绍《洛书》。《洛书》是世界上最早的幻方。

《洛书》出现后，古今中外数学家围绕存在性问题、组合设计即构造方法问题、计数问题、优化问题和特性问题，对幻方进行了系统的研究，取得了可喜的成果。中国先期组合数学这门古老的学问焕发出新的活力，得到了蓬勃发展。

仅从图形来说，已突破了平面正方形的范围，出现了多种非正方形平面数阵。如三角形、矩形、五边及五边以上多边形平面数阵，幻圆(幻环)，幻星，线立方、面立方、体立方、多面体及复合多面体数阵，幻球等。原意指正方形平面数阵的“幻方”这一名称已远不能包括已经出现的种类繁多的数阵。为此，笔者在拙著《智力王国—幻方与魔数阵》(1985)一书中将具有幻方基本特征的各种数阵统称之为魔数阵。

幻圆(幻环)是魔数阵中颇具特色的一类。追溯历史，我国南宋数学家杨辉在他所著的《续古摘奇算法》(1275)一书中，把《洛书》这种方阵称为纵横图。他除了新创作的4阶至10阶纵横图外，还创作了6种非正方形图，为幻方的发展开拓了一个新领域。杨辉创作的攒九图是世界上出现的第一个幻圆(幻环)，属同心圆与直径相交之图形，数在图中交点上布阵。

明代王文素在其《新集通证古今算学宝鉴》(1524)一书中著有纓络图一幅，属等圆相交相切之图形，数在图中之圆面上布阵。

1922年，屠恂立，汪以麟编纂出版的《幻方》一书中，列有3、4、5、6、

8、9、12个圆组成的幻圆图，除等圆相交之图形外，还有用三组每组3、4个同心圆相交之图形，数在图中之交点上布阵。

我国历代数学家所创作的各式幻圆图，拙著《智力王国—幻方与魔数阵》一书中都有收录，并补充了周径幻阵。但总的看来，对幻圆特别是幻环的研究远不及对幻方的研究深入。

可喜的是，杨高石先生从2001年创作“奥徽幻五环”开始，数年来对各类幻环进行了全面、深入、系统的研究，取得了丰硕成果。

他对幻环的存在性问题及其基本解和全部解，研究得非常深、非常细。在“16数三重幻五环”的研究中，求得332个（以上）基本解和27144个（以上）变换解，超过了日本幻方专家阿部义雄作出的125个基本解和11476个全部解。他还创作了素数幻环、平方数幻环、纪念幻环、互补素数点幻环对等，是幻环研究的一个飞跃。

杨高石先生的幻环研究成果集《幻环探秘》，揭示了求解幻环的变换法、展开法、差补法和求解点幻环的各种互补法，论述严谨。图谱丰富，千姿百态，琳琅满目，美不胜收，铺就了一座幻环新花园。

《幻环探秘》是我国建国以来出版的第一部幻环研究专著，对我国组合数学的发展，是一大贡献。

幻环的设计和求解，需要运用奇数与偶数、素数与合数、数列与级数等整数基础理论和数的平衡与变化、互补与置换、排列与组合、数学归纳等数学方法。掌握幻环的构造方法，有助于提高综合、分析、推理、演绎、归纳等思维能力和数学解题能力。《幻环探秘》一书具有科学性、知识性和趣味性，无疑是学习整数理论的理想读物。因此，我向广大读者热忱推荐这本难得的好书。

2005年12月8日

## 序 (四)

广东医学院数学电脑教研室教授 李英杰

昆明理工大学杨高石教授的《幻环探秘》，是组合数学领域难得的一部原创性优秀专著，是自主创新的佳作，是我国走向创新型国家过程中的一朵玫瑰花，在科技创新方面有一定的高度、广度和深度。在人类社会走向21世纪的庄严时刻，我为它的出版而拍手叫好。就数学、美学而言，它又是一个重大突破。我坚信，《幻环探秘》的出版，定会为社会各界朋友增设一条由乐而智，由智而美、由美而有所作为的利国、利民的发展道路，定会对我国数学科学事业的发展，作出有益的贡献。

2001年，全国有数千名中学生，利用暑假饶有兴趣地参加了为支持北京申奥而举行的"奥林匹克幻五环"趣题征解活动，它有力地说明了幻环的研究有着广泛的群众基础和应用前景。理论和实践的结合是有一定难度的，但必须坚持这个方向。重要的是，坚冰已经打破，航线已经开通，道路已经指明。

虽说"七十不希奇、八十小弟弟"，但作者毕业已是七十又七的老人了，在这把年纪，作者以原创性的40多万字的宏篇巨著奉献给各位读者，真可谓老骥伏枥，志在千里，其敬业和奋斗精神实在可敬可贺。

"在科学上是没有平坦的道路可走的，只有那在崎岖小路的攀登上不畏艰险的人，才有希望到达光辉的顶点。"作者甘作人梯，你就踩在他的肩膀上攀登世界科学技术高峰吧！所有人间的困难，原本都是可以克服的。难住数学界几百年的费尔马猜想不是已经被攻克了吗？《幻环探秘》还会向您展示这样一个真理：只要奋斗，就会有路。坚持奋斗，必能成功。

君若不信，且看事实。敬请各位读者现在就打开第一页看吧，一种全新的知识和追求事业成功的幸福感就会像血一样流到你的心坎里。

祝各位读者身体健康，生活幸福，事业有成。

向各位读者学习！向各位读者致敬！

2005年1月15日

## 序 (五)

鹿头高中一级教师 中国组合数学学会会员 高金生

为了支持申奥，我们数学界的朋友——昆明理工大学的杨高石教授，组织了全国3千多名中学生求解奥徽幻五环的竞赛，并把镌有奥徽幻五环全部解的铜制贺屏亲自送到北京奥筹委，得到高度评价。

我有幸组织本校学生参加了这次求解幻五环的活动，并得到部分解，但一般方法没有得到。杨教授不仅给出一般解法，而且在此基础上创立了组合数学的一个新的分支——幻环，丰富了数学的内容。

幻环是一门新的数学学科，目前除日本一种幻五环与美国两例点幻环外，尚无其他任何报道。可以毫不夸张地说，杨教授开创了幻环研究的先河，是一位奠基人。

杨教授又在均布型幻环，非均布型幻环，素数幻环、合数幻环、点幻环等方面作了很多探索，同时对幻环的理论——求解幻环的变换法，展开法、差补法、均布型幻环的互补原理等方面给出一系列完整的理论。这一切都是在2001年2003年间完成的。杨教授以七十多岁的高龄，克服身体伤患、特别是眼疾，在这样短的时间内取得这么多成果，足见其扎实的功力和为数学献身的精神。

杨教授发明的《双行素数表》，揭示了素数的内在规律，它不仅可用于制作素数幻环，而且将会在素数论的研究上成为有力工具。

杨教授还组织奥林匹克数学培训，经常辅导学生，普及数学美学和幻方、幻环等组合数学基本知识，他又是一位辛勤的科普工作者。

我有幸与杨教授多年通信交往，直接接受教诲；在幻环的构造上作了一点工作，我是他作品初稿的第一批读者之一，受益匪浅。

《幻环探秘》的出版，必将极大地推动组合数学的普及和发展。

2004年7月12日

## 序 (六)

岳阳六中高级教师、中国幻方研究者协会主席 李杭强

本书是我国第一本研究幻环的专著，其内容极为丰富，笔者得到本书，就被它深深的吸引，恨不得一口气把它读完。

幻方、幻阵与幻环都是我们祖先留下的珍贵遗产，都有待我们发扬光大。幻方、环阵与幻环都还处在“养在深闺人未识”的状况。这三者中，了解幻环的人更少一些。由于涉足幻环的人不多，所能找到的资料是很少的，这就为幻环的研究增加了难度。作者年近八旬，敢于在这一领域全面探索，有一股难得的勇气，令人敬佩。

本书开头的《幻环之美》在介绍幻环历史的过程中就给读者带来了极为多样的美的享受。接着，作者采用科学的方法对幻环进行分类，对幻环的构造方法作了初步的介绍。

《求解幻环的变换法》、《均布型幻环的互补原理》、《求解幻环的展开法》、《求解幻环的差补法》等是本书的重点。这里有作者的多种创新。对于众多不同形状的幻环，作者总结出一些极为巧妙又易掌握的构造方法。这些令人拍案叫绝的巧妙方法，必然使幻环这一令人生畏的数阵，能较快的为人们所了解，迎来幻环研究的春天。

一般自然数组成的幻环，已经是难度不小了。作者迎难而上，又向更高的山峰进行冲击。平方数幻环、素数幻环、连续素数幻环这些堡垒都被作者攻破，并且都找到了一些巧妙的构造途径。作者还构造了一批纪念幻环，倾注了作者对伟大祖国的无限热爱，对母校——国十一中——的深情缅怀，对接班人的殷切期望，……。总之，本书既是一本高水平的专著，又做到深入浅出，读起来兴趣盎然。

作者杨高石教授是从事机电工程教学的，有不少的研究成果，为人民所作的贡献够多了。离休后，又为社会主义精神文明建设作了很多工作。2001年作者与幻方、幻环结缘，倍感喜爱，从此将大部分精力投放在新的战线。本书的书稿是2001年10月开始写的，只花3年多一点的时间，撰写成这么一本数十万字的幻环专著，作者才思之敏捷实在难得。

作者是老有所为的好榜样，他的继续战斗精神值得我们学习。

2005年3月20日

## 序（七）

孝感工业学校数学教师 中国幻方研究者协会副秘书长 曹 陵

杨高石老先生是昆明理工大学教授，现年七十有七。离休之后，老骥伏枥，壮心不已；志存高远，锐意进取；以当年治学传道之精神，开创今日幻环探索的新天地；将创新思维推广到社会大众，从数字组合中寻觅乐趣真谛。

2001年北京申奥期间，杨老先生激情澎湃、灵感泉涌；取象徽互相了解、团结、友谊、公平竞争的奥徽五环图，设计“奥林匹克幻五环趣题”在十多省市青少年中开展征解活动，大获成功。多少新颖事物源于瞬间的想象，杨公此举，竟开创了一门与幻方媲美的幻环研究领域。从此以后，一幅幅美丽的环图、一项项新奇的创作，如春潮般滚滚而来！杨老先生仍孜孜以求，探索不止，从“展开法”到“互补解”、从自然数到素数，由“格”到“点”，直达“拉马努贾数”、“哥德巴赫数”……；数年辛劳，竟成宏篇巨著，又钻研得如此精彩、如此周全，真令人叹为观止。

我是在幻五环的启发下加入幻环研究的，有幸与杨老结识交流，遂成忘年之友。我属后生晚辈，杨公却屈尊推崇屡屡来信做学术探讨，每一创作或新得，总是在第一时间内先寄给我，征询见解。尤其令我难以忘怀的是2002年杨公在美国探亲访友之际，仍雁书越洋来共论幻环。杨老先生的高风亮节、虚怀若谷、谦逊治学等可贵品质，值得我们永远学习。

幻环蕴藏着和谐、均衡、有序、严谨诸多品德，我醉心于其繁花似锦、群芳争艳；王忠汉老先生将其中最简单的环图向少年儿童推广；而杨老先生则深入其难题佳作与理论幽境。今《幻环探秘》即将付梓面世，杨老请我也作一序呼应。乃于匆忙中涂鸦塞责，不能全述幻环之华丽壮美、博大精深，只是表示我对老先生的一片敬佩和祝贺之心。

2005年5月25日

## 序 (八)

中国幻方研究者协会秘书长 王忠汉

2005年元旦,杨高石老先生于七十七岁高龄完成了他四百多页的巨著——《幻环探秘》。杨老先生自幼酷爱数学,对幻环产生兴趣是离休之后的事。我俩很幸运,有机会成为《幻环》理论的第一批探索者,借此机会,特回顾一下《幻环》理论的最初行程。

2001年6月16日,杨高石老先生首创“奥林匹克幻五环趣题征解”。6月27日,“趣题征解”进入社会,为奥林匹克“幻五环”找到了极其宝贵的四组解。用这四组解设计精巧的铜质彩色纪念贺屏于2001后10月15日由杨高石老先生亲自送存北京市2008年奥筹委。在北京申奥成功喜讯的鼓舞下,一批幻环爱好者开始了进一步深入的探索,一门新的学科——《幻环》正式形成。

以幻环为核心,杨高石老先生对自古以来的成果进行了全面的研究、给予了系统的归类和拓展。用这套研究武装起来的杨老先生为《幻环探秘》给出了很多精彩的设计。例如:“差值变换”,“等值变换”、“展开法”,“差补法”等等。正是这些方法,促成了幻环园地的百花齐放,群艳争芳。

《幻环探秘》为杨老先生展示才华提供了绝妙的舞台,是苦干与巧干的结晶。“苦干”给出的最精彩创作我选中的是《双行素数表》。正是这套资料,让一整套素数幻环展示在人们的面前,其中还出现了一批“连续素数解”。例如:三重幻三环的连续素数解,当 $P < 40$ 时就有34个。均布型(8素数)二重幻四环的连续素数解,当 $P < 100$ 时有7个。15数三重幻五环的连续素数解,当 $P < 100$ 时找到了1个。非均布型(21素数)三重幻五环的初始连续素数解,存在8个。连续素数解之所以宝贵,是比较出来的。连续素数3阶幻方登上历史舞台的故事为“宝贵”给出了说明:

1988年,数学科普大师马丁·加德纳先生曾为罗马出版社设计“1988年数学挂历”的精致印刷品。为了撰写《素数幻方》,特以100美元设奖,奖给第一位利用连续素数造出三阶幻方的作者。接着,加德纳先生又在美国数学会出版的、他的名著《狮身人面像之谜》的结尾中重申了这件事。果然,回音来了,来得极快。1988年初,哈里·纳尔逊(Harry Nelson)先生利用加利福尼亚大学一台克雷超级计算机,通过巧妙的程序设计,一举成功,一下就找出了22个答案,从而获得了这笔奖金。下图是最小的一解。

|            |            |            |
|------------|------------|------------|
| 1480028201 | 1480028129 | 1480028183 |
| 1480028153 | 1480028171 | 1480028189 |
| 1480028159 | 1480028213 | 1480028141 |

《双行素数表》是一个宝贝，它不仅为《幻环》增色，也将为《幻方》争光。

在《幻环探秘》的实践进程中，杨高石老先生曾给出了一段精美的描述：

在幻环的设计、布阵、变换、求解中，有时往往会感到峰回路转、柳暗花明、神秘莫测、奥妙无穷，乃至拍案叫绝、拍手称快、心旷神怡、乐趣丛生。它体现了数学的深沉之美、哲理之美、严谨之美、明快之美、变幻之美、含蓄之美以及对称之美、平衡之美、简约之美、朴实之美、形态之美、标新立异之美……；可谓美不胜收。特与读者们共享。

2005年3月21日

## 数学界朋友来信剪辑

2001年7月13日22时9分是一个激动人心的历史时刻：我们赢了！为祝贺北京申奥成功，昆明理工大学杨高石教授设计了对奥徽幻五环的研究。

奥徽五环旗，百年以来，人们都见到了它，人们都欢呼过它。杨高石先生以特有的敏感，发现了它与数学之间的联系。这是一个非同小可的发现，一门新的学科，登上了历史舞台。

一夜之间，《幻环之美》出现在我的眼前。我发现，每一个幻环之美都闪烁着灵感的大火。

2003年5月5日寄来的《幻环探秘》之三、之四收到，这套《探秘》是一个创举，精彩之至，祝早日成书。

王忠汉

您的《幻环之美》独具特色，构思精巧，在中国国内的数坛中，各显其能，您从何处入手，将五环旗展为一幅画卷，使线形与起即落，一技之长，令人赞叹。

王忠汉

最近看到所编《幻环之美》来信及两本大作，您对幻环的研究成果令人大吃一惊。您的《幻环之美》是一个创举，很了不起。祝您研究取得更大的成果。

您的大作内容很丰富，我几乎插不上手。您大都使用程序搜字到的，应该不会有差错。

您这没寄来的幻图环，都很精彩，特别是开头几个及图28更为精彩。众多的五环幻图，无疑也是亮点。

您好，来信收到，您的两个纪念幻图环也现出水平，祝贺您的成功！

李兆浩

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 841. 842. 843. 844. 845. 846. 847. 848. 849. 850. 851. 852. 853. 854. 855. 856. 857. 858. 859. 860. 861. 862. 863. 864. 865. 866. 867. 868. 869. 870. 871. 872. 873. 874. 875. 876. 877. 878. 879. 880. 881. 882. 883. 884. 885. 886. 887. 888. 889. 890. 891. 892. 893. 894. 895. 896. 897. 898. 899. 900. 901. 902. 903. 904. 905. 906. 907. 908. 909. 910. 911. 912. 913. 914. 915. 916. 917. 918. 919. 920. 921. 922. 923. 924. 925. 926. 927. 928. 929. 930. 931. 932. 933. 934. 935. 936. 937. 938. 939. 940. 941. 942. 943. 944. 945. 946. 947. 948. 949. 950. 951. 952. 953. 954. 955. 956. 957. 958. 959. 960. 961. 962. 963. 964. 965. 966. 967. 968. 969. 970. 971. 972. 973. 974. 975. 976. 977. 978. 979. 980. 981. 982. 983. 984. 985. 986. 987. 988. 989. 990. 991. 992. 993. 994. 995. 996. 997. 998. 999. 1000. 1001. 1002. 1003. 1004. 1005. 1006. 1007. 1008. 1009. 1010. 1011. 1012. 1013. 1014. 1015. 1016. 1017. 1018. 1019. 1020. 1021. 1022. 1023. 1024. 1025. 1026. 1027. 1028. 1029. 1030. 1031. 1032. 1033. 1034. 1035. 1036. 1037. 1038. 1039. 1040. 1041. 1042. 1043. 1044. 1045. 1046. 1047. 1048. 1049. 1050. 1051. 1052. 1053. 1054. 1055. 1056. 1057. 1058. 1059. 1060. 1061. 1062. 1063. 1064. 1065. 1066. 1067. 1068. 1069. 1070. 1071. 1072. 1073. 1074. 1075. 1076. 1077. 1078. 1079. 1080. 1081. 1082. 1083. 1084. 1085. 1086. 1087. 1088. 1089. 1090. 1091. 1092. 1093. 1094. 1095. 1096. 1097. 1098. 1099. 1100. 1101. 1102. 1103. 1104. 1105. 1106. 1107. 1108. 1109. 1110. 1111. 1112. 1113. 1114. 1115. 1116. 1117. 1118. 1119. 1120. 1121. 1122. 1123. 1124. 1125. 1126. 1127. 1128. 1129. 1130. 1131. 1132. 1133. 1134. 1135. 1136. 1137. 1138. 1139. 1140. 1141. 1142. 1143. 1144. 1145. 1146. 1147. 1148. 1149. 1150. 1151. 1152. 1153. 1154. 1155. 1156. 1157. 1158. 1159. 1160. 1161. 1162. 1163. 1164. 1165. 1166. 1167. 1168. 1169. 1170. 1171. 1172. 1173. 1174. 1175. 1176. 1177. 1178. 1179. 1180. 1181. 1182. 1183. 1184. 1185. 1186. 1187. 1188. 1189. 1190. 1191. 1192. 1193. 1194. 1195. 1196. 1197. 1198. 1199. 1200. 1201. 1202. 1203. 1204. 1205. 1206. 1207. 1208. 1209. 1210. 1211. 1212. 1213. 1214. 1215. 1216. 1217. 1218. 1219. 1220. 1221. 1222. 1223. 1224. 1225. 1226. 1227. 1228. 1229. 1230. 1231. 1232. 1233. 1234. 1235. 1236. 1237. 1238. 1239. 1240. 1241. 1242. 1243. 1244. 1245. 1246. 1247. 1248. 1249. 1250. 1251. 1252. 1253. 1254. 1255. 1256. 1257. 1258. 1259. 1260. 1261. 1262. 1263. 1264. 1265. 1266. 1267. 1268. 1269. 1270. 1271. 1272. 1273. 1274. 1275. 1276. 1277. 1278. 1279. 1280. 1281. 1282. 1283. 1284. 1285. 1286. 1287. 1288. 1289. 1290. 1291. 1292. 1293. 1294. 1295. 1296. 1297. 1298. 1299. 1300. 1301. 1302. 1303. 1304. 1305. 1306. 1307. 1308. 1309. 1310. 1311. 1312. 1313. 1314. 1315. 1316. 1317. 1318. 1319. 1320. 1321. 1322. 1323. 1324. 1325. 1326. 1327. 1328. 1329. 1330. 1331. 1332. 1333. 1334. 1335. 1336. 1337. 1338. 1339. 1340. 1341. 1342. 1343. 1344. 1345. 1346. 1347. 1348. 1349. 1350. 1351. 1352. 1353. 1354. 1355. 1356. 1357. 1358. 1359. 1360. 1361. 1362. 1363. 1364. 1365. 1366. 1367. 1368. 1369. 1370. 1371. 1372. 1373. 1374. 1375. 1376. 1377. 1378. 1379. 1380. 1381. 1382. 1383. 1384. 1385. 1386. 1387. 1388. 1389. 1390. 1391. 1392. 1393. 1394. 1395. 1396. 1397. 1398. 1399. 1400. 1401. 1402. 1403. 1404. 1405. 1406. 1407. 1408. 1409. 1410. 1411. 1412. 1413. 1414. 1415. 1416. 1417. 1418. 1419. 1420. 1421. 1422. 1423. 1424. 1425. 1426. 1427. 1428. 1429. 1430. 1431. 1432. 1433. 1434. 1435. 1436. 1437. 1438. 1439. 1440. 1441. 1442. 1443. 1444. 1445. 1446. 1447. 1448. 1449. 1450. 1451. 1452. 1453. 1454. 1455. 1456. 1457. 1458. 1459. 1460. 1461. 1462. 1463. 1464. 1465. 1466. 1467. 1468. 1469. 1470. 1471. 1472. 1473. 1474. 1475. 1476. 1477. 1478. 1479. 1480. 1481. 1482. 1483. 1484. 1485. 1486. 1487. 1488. 1489. 1490. 1491. 1492. 1493. 1494. 1495. 1496. 1497. 1498. 1499. 1500. 1501. 1502. 1503. 1504. 1505. 1506. 1507. 1508. 1509. 1510. 1511. 1512. 1513. 1514. 1515. 1516. 1517. 1518. 1519. 1520. 1521. 1522. 1523. 1524. 1525. 1526. 1527. 1528. 1529. 1530. 1531. 1532. 1533. 1534. 1535. 1536. 1537. 1538. 1539. 1540. 1541. 1542. 1543. 1544. 1545. 1546. 1547. 1548. 1549. 1550. 1551. 1552. 1553. 1554. 1555. 1556. 1557. 1558. 1559. 1560. 1561. 1562. 1563. 1564. 1565. 1566. 1567. 1568. 1569. 1570. 1571. 1572. 1573. 1574. 1575. 1576. 1577. 1578. 1579. 1580. 1581. 1582. 1583. 1584. 1585. 1586. 1587. 1588. 1589. 1590. 1591. 1592. 1593. 1594. 1595. 1596. 1597. 1598. 1599. 1600. 1601. 1602. 1603. 1604. 1605. 1606. 1607. 1608. 1609. 1610. 1611. 1612. 1613. 1614. 1615. 1616. 1617. 1618. 1619. 1620. 1621. 1622. 1623. 1624. 1625. 1626. 1627. 1628. 1629. 1630. 1631. 1632. 1633. 1634. 1635. 1636. 1637. 1638. 1639. 1640. 1641. 1642. 1643. 1644. 1645. 1646. 1647. 1648. 1649. 1650. 1651. 1652. 1653. 1654. 1655. 1656. 1657. 1658. 1659. 1660. 1661. 1662. 1663. 1664. 1665. 1666. 1667. 1668. 1669. 1670. 1671. 1672. 1673. 1674. 1675. 1676. 1677. 1678. 1679. 1680. 1681. 1682. 1683. 1684. 1685. 1686. 1687. 1688. 1689. 1690. 1691. 1692. 1693. 1694. 1695. 1696. 1697. 1698. 1699. 1700. 1701. 1702. 1703. 1704. 1705. 1706. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. 1712. 1713. 1714. 1715. 1716. 1717. 1718. 1719. 1720. 1721. 1722. 1723. 1724. 1725. 1726. 1727. 1728. 1729. 1730. 1731. 1732. 1733. 1734. 1735. 1736. 1737. 1738. 1739. 1740. 1741. 1742. 1743. 1744. 1745. 1746. 1747. 1748. 1749. 1750. 1751. 1752. 1753. 1754. 1755. 1756. 1757. 1758. 1759. 1760. 1761. 1762. 1763. 1764. 1765. 1766. 1767. 1768. 1769. 1770. 1771. 1772. 1773. 1774. 1775. 1776. 1777. 1778. 1779. 1780. 1781. 1782. 1783. 1784. 1785. 1786. 1787. 1788. 1789. 1790. 1791. 1792. 1793. 1794. 1795. 1796. 1797. 1798. 1799. 1800. 1801. 1802. 1803. 1804. 1805. 1806. 1807. 1808. 1809. 1810. 1811. 1812. 1813. 1814. 1815. 1816. 1817. 1818. 1819. 1820. 1821. 1822. 1823. 1824. 1825. 1826. 1827. 1828. 1829. 1830. 1831. 1832. 1833. 1834. 1835. 1836. 1837. 1838. 1839. 1840. 1841. 1842. 1843. 1844. 1845. 1846. 1847. 1848. 1849. 1850. 1851. 1852. 1853. 1854. 1855. 1856. 1857. 1858. 1859. 1860. 1861. 1862. 1863. 1864. 1865. 1866. 1867. 1868. 1869. 1870. 1871. 1872. 1873. 1874. 1875. 1876. 1877. 1878. 1879. 1880. 1881. 1882. 1883. 1884. 1885. 1886. 1887. 1888. 1889. 1890. 1891. 1892. 1893. 1894. 1895. 1896. 1897. 1898. 1899. 1900. 1901. 1902. 1903. 1904. 1905. 1906. 1907. 1908. 1909. 1910. 1911. 1912. 1913. 1914. 1915. 1916. 1917. 1918. 1919. 1920. 1921. 1922. 1923. 1924. 1925. 1926. 1927. 1928. 1929. 1930. 1931. 1932. 1933. 1934. 1935. 1936. 1937. 1938. 1939. 1940. 1941. 1942. 1943. 1944. 1945. 1946. 1947. 1948. 1949. 1950. 1951. 1952. 1953. 1954. 1955. 1956. 1957. 1958. 1959. 1960. 1961. 1962. 1963. 1964. 1965. 1966. 1967. 1968. 1969. 1970. 1971. 1972. 1973. 1974. 1975. 1976. 1977. 1978. 1979. 1980. 1981. 1982. 1983. 1984. 1985. 1986. 1987. 1988. 1989. 1990. 1991. 1992. 1993. 1994. 1995. 1996. 1997. 1998. 1999. 2000. 2001. 2002. 2003. 2004. 2005. 2006. 2007. 2008. 2009. 2010. 2011. 2012. 2013. 2014. 2015. 2016. 2017. 2018. 2019. 2020. 2021. 2022. 2023. 2024. 2025. 2026. 2027. 2028. 2029. 2030. 2031. 2032. 2033. 2034. 2035. 2036. 2037. 2038. 2039. 2040. 2041. 2042. 2043. 2044. 2045. 2046. 2047. 2048. 2049. 2050. 2051. 2052. 2053. 2054. 2055. 2056. 2057. 2058. 2059. 2060. 2061. 2062. 2063. 2064. 2065. 2066. 2067. 2068. 2069. 2070. 2071. 2072. 2073. 2074. 2075. 2076. 2077. 2078. 2079. 2080. 2081. 2082. 2083. 2084. 2085. 2086. 2087. 2088. 2089. 2090. 2091. 2092. 2093. 2094. 2095. 2096. 2097. 2098. 2099. 2100. 2101. 2102. 2103. 2104. 2105. 2106. 2107. 2108