东北师范大学物理函授教材

理 论 力 学

思考题及习题解答

东北师范大学函授教育处

1 9 8 2 . 7 · 长春

目　　录

第一章　质点力学思考题解

1.1）　为何提出质点概念：

答：理由有三：1．物体平动时，其上各点运动情况完全相同，故可以质点代替此物体。2．当物体大小、形状在所研究具体问题中可忽略时，如研究地球正体相对太阳运动，则可以质点代替物体。3．任何物体或物体或皆可看成质点系。因而质点运动规律的研究是物体或物体系运动规律研究的基础。

1.2）　为何提出参照系与坐标的概念？二者是否相同？

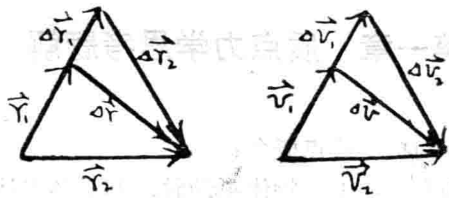
答：由于物体运动描述的相对性及定量描述运动的需要，所以提出二概念。因为研究物体运动所“立足”的物体（系），称为参照系，能定量确定物体空间位置的与参照系联结在一起的计算系统称为坐标系，所以，二者不同。

1.3）　一个运动质点在某一时刻有一确定的$\mathbf{r}$、$\mathbf{a}$，而同时由$\mathbf{v}$，$\mathbf{a}$定义知$\mathbf{r}$、$\mathbf{v}$又在变。这不矛盾吗？理解的关键何在？

答：不矛盾。理解的关键在于质点是运动的，因而一般$\mathbf{r}$、$\mathbf{v}$是变量。所说某一时刻有确定的$\mathbf{r}$、$\mathbf{v}$值是指在变化过程中某一时刻的取值。犹如量得某一小孩的身高，是他在长身体过程中某一时刻的取值一样。

1.4）　$\dot{\mathbf{r}}$与$\dot{\vec{r}}$、$\dot{\mathbf{v}}$与$\dot{\vec{v}}$相同吗？试从矢量关系及物理含义两方面说明之。

答：不同。从矢量关系看见题图：



思考题 1.4 图

图中 $|\mathbf{r}_1+\Delta\mathbf{r}_1|=|\mathbf{r}_2|$，$|\mathbf{v}_1+\Delta\mathbf{v}_1|=|\mathbf{v}_2|$

$$\dot{\mathbf{r}}=\lim_{\Delta t\to}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t},\quad \dot{\vec{r}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}_1}{\Delta t}$$

物理含义：$\dot{\mathbf{r}}$ 为速度、$\dot{\vec{\mathbf{r}}}$ 为速度的一个分量。同理有：

$$\dot{\mathbf{v}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t},\quad \dot{\vec{v}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_1}{\Delta t}$$

物理含义：$\dot{\mathbf{v}}$为加速度，$\dot{\vec{v}}$为加速度的一个分量。

1 5） 为什么要讨论速度及加速度分量式？

答：运动学及动力学方程中皆含速度及加速度，它们都是矢量。而在解方程时，一般需作标量运算。故有了 $\mathbf{v}$，a 分量式便可写出运动方程分量式，从而可对方程进行具体运算求解。

1.6） 速度与加速度在平面极坐标系和自然坐标系中分量式导出的思路及关键如何？

答：平面极坐标导出思路：由在平面极坐标中表达式出发，利用定义通过微分运算。关键：明确 $\mathbf{r}=r\mathbf{r}^0$ 及弄清

$$\frac{d\mathbf{r}^0}{dt}=\dot{\theta}\,\mathbf{p}^0、\quad \frac{d\mathbf{p}^0}{dt}=-\dot{\theta}\,\mathbf{r}^0。$$

自然坐标导出思路：由 $\mathbf{v}$在自然坐标系中表达式，利用 $\mathbf{a}$ 定义通过微分运算。关键：明确 $\mathbf{v}=v\vec{\tau}_0$及弄清

$$\frac{d\vec{\tau}^0}{dt}=\frac{v}{\rho}\mathbf{n}^0。$$

1.7) 为何要讨论相互作平动参照系中的速度与加速度的合成？

答：由于运动描述的相对性，从相互平动坐标系描述同一物体运动将有不同的结论。但如果根据速度与加速度合成公式，我们就能很方便地由一个坐标系所描述的运动规律写出其它相对此坐标系作平动的任一坐标系所描述的运动规律，这对解决问题带来了极大的方便。

1.8) 相互作平动参照系中速度、加速度合成关系式导出的思路是什么？导出过程要注意什么问题？

答：思路是从两参照系对同一质点的位矢关系 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{r}'$出发，根据速度、加速度定义对位矢关系式求一次、二次导便得。要注意由于是研究相互作平动的坐标系，故各坐标轴的单位矢量皆常矢量，因而它们对时间求导为零。

1.9) 惯性与惯性运动是不是一回事？

答：不是一回事。惯性是物体机械运动的一个重要属性，不论物体是否运动，它均存在。而惯性运动则是指物体的匀速直线运动，是物体不受外力时（实际可认为合外力为零）的一种运动。

1.10）能否把牛顿第一定律当作第二定律的特例？为什么？

答：不能。因为第一定律还揭示了物体作机械运动时存在惯性这一极其重要的性质。

1.10）何谓惯性系？非惯性系？

答：牛顿运动定律成立的系统称惯性系，否则为非惯性系。

1.12）为什么说牛顿第二定律不适用于非惯性系？试举例说明。

答：因为我们定义惯性系与非惯性系的依据是看其是否对牛顿定律成立，也就是说在惯性系中，力与加速度是一一对应的。而在非惯性系中则不是这样。例如在火车内光滑桌面上放一只茶杯，当火车相对地作加速运动时，从火车上看茶杯将向后作加速运动但却找不到相对应的力。所以牛顿二定律在非惯性系中就不成立了。要想在非惯性系中应用牛顿二定律，必须引入一惯性力$-ma$。

1.13）应用牛顿第二定律解决问题时，大致步骤如何？其中关键步骤是什么？

答：大致步骤是：弄清题意、确定运动质点、对质点进行运动分析与受力分析、选择适当坐标系、建立坐标分量式（有时需加补充方程）、求解、讨论。其中关键步骤是受力分析。

1.14）三个守恒定律都是作为三个定理的特例得来的，为什么把特例又称定律？如何理解？

答：因三个定律表达了物体运动自身内在的规律，而三个定理则从因果关系方面描述了物体的运动，两者侧重面不同，表达的规律也就不同，因而虽作特例得来，但也独立地称定律。另外三个守恒定律也可通过实验独立得来，而不必借助三个定理导出.

1.15）$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\int_1^2 \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}$ 叫动能定理，但对

仅在保守力作用下质点作功的式子为：

$$\int_1^2 \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}=-(V_2-V_1)$$

为何不把上式称为势能定理？

答：动能定理是从牛顿定律推演来，它对任何力的功均成立，故它是一个表达运动规律的式子。而

$$\int_1^2 \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}=-(V_2-V_1)$$

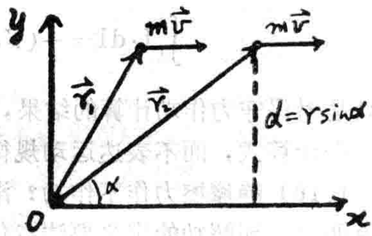
则只是对保守力作功计算的结果，因而从这个意义上讲它只是一个计算式，而不表达运动规律。

1.16）静摩擦力作不作功？滑摩擦力是否都作负功？举例说明之。理解功的定义要注意什么？

答：首先要明确功的定义对惯性系来讲是具有相对性的，因为从不同的惯性系看力虽然同，但位移不同。故回答上述问题可从两方面举例：1．从一个惯性系看不同的运动情况：静摩擦力可作正功、负功或不作功。例如从地面上看，传送带水平加速运动时，对置于其上的物体之静摩擦力作正功，减速运动时则作负功。人在地面上走，地对人脚之静摩擦力不作功。滑动摩擦力也可作正功，例如从地面观察：一木板平放，在其上置一物，当用力快速抽动木板时，物体相对木板向后运动，但相对地看，其所受滑动摩擦力与物体运动方向一致，故作正功。2.从不同惯性系观察同一运动。例如水上一静止船，一人从船头走向船尾，设船作匀速运动（相对地），则人脚对船的静摩擦力从与船相对静止的惯性系上看不作功，但从地面看则作正功。而对于一人拉一物在地面作匀速直线运动的情况，从地面看，则地对物的滑动摩

擦力作负功，而从与物体相对静止的坐标系看，则摩擦力不作功。因而理解应用功的定义时要注意两点：第一：要明确是哪一个力（或哪几个合力）对哪一物体的功。第二：要明确是从哪一坐标系来计算功。

1.17）一个运动质点，它的动量守恒其动量矩是否守恒？反过来呢？举例说明之。



思考题1.17图

答：一个质点相对一惯性系动量守恒，则相对此惯性系中任一点的动量矩必守恒。如题1.17图所示：

对点0的动量矩为：

值：$|\mathbf{r}\times m\mathbf{v}|=rmv\sin\alpha=mvd=$常量

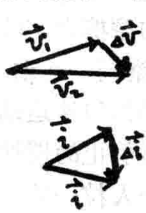
方向：始终垂直纸面向下。

反之，动量矩守恒，动量不一定守恒。例如作匀速回运动的质点，动量矩守恒动量不守恒。

1.18）在导出动能定理时，应用了关系式：

$$\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}=vdv$$

有人说："这结论不对，因为$d\mathbf{v}\perp\mathbf{v}$，所以由矢量运算规则有$\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}=vdv\cos 90^\circ=0$。"这说法对不？为什么？



思考题1.18

答：不对，因为一般$\mathbf{v}$是方向变数值也变，故由题图可看出，当$\triangle\mathbf{v}\to 0$时$d\mathbf{v}$不与$\mathbf{v}$垂直。例如一般曲线运动，质点不仅存在法向加速度，而且存在切向加速速

度，即合加速度不与速度垂直。只有当 v 值不变时，例如匀速园周运动，才与 $\mathbf{v}$ 垂直。又如单位矢量 $\mathbf{i}$，则因 $|\mathbf{i}|$ 不变，，所以有 $d\mathbf{i}\perp\mathbf{i}$。

1.19）在使用质点的动量定理、动量矩定理、动能定理及相应三个守恒定律时，对坐标系是否一定要求惯性系？为什么？

答：要求惯性系，因为这些定理定律都是以牛顿二定律为基础导出的，而牛顿二定律要求惯性系。

1.20）根据什么提出势能的概念？为什么说势能零点的选取是任意的？一般应按什么原则选取？

答：根据保守力的功仅与质点所在初终位置有关而提出势能概念。因为保守力的功只给出二位函数的差值，而每一位函数加上任意一个相同的常数其差值保持不变，故而零势能点的选取可任意。一般以数学形式表达自然简明、解题方便为原则。例如引力势能如定 $r\to\infty$ 点为零点，则质点在某点之势能为 $\left(-\frac{KMm}{r}\right)$，如定弹簧水平位置时自然长状态质点所在处为坐标原点是零势能点，则弹力势能为 $\frac{1}{2}kx^2$。

1.21）$\mathbf{F}=-\nabla V$ 的物理意义如何？

答：$\mathbf{F}$ 表示质点在某点所受的保守力，∇V 表示质点在该点的势能梯度。整个式子是说明质点在保守力场中某点的保守力与势能之关系的规律，是即力与势能梯度值成正比但反向，或力大处势能变化大，而力的方向始终沿势能减小最快的方向。

1.22）力对一点之矩与力对轴之矩有何关系？为何提出力对一点之矩的概念？

答：力对一点之矩与力对轴之矩都是矢量，某力对某轴之矩是该力对轴上任意一点之矩沿轴方向的投影分量。力对一点之矩的提出，是在研究质点绕某点运动时状态变化的原因时提出的。

1.23）有心力与向心力，是否是一回事？

答：不是一回事。

有心力是指质点在运动中所受力作用线始终通过某一点的这种力。它可指向也可背向这个点；在有心力作用下质点一般不是园形轨道；向心力则是指作园周运动的质点所受的合外力在指向园心方向的分量，而质点所受的合外力一般并不具备有心力的特点。但当质点只受一时时指向园心的力而作匀速园运动时，则此向心力也即有心力了。

1.24）$r^2\dot{\theta}=h$ 中的几何意义是什么？

答：由 $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=2h$ 可知：$h=2\frac{dA}{dt}$。故 h 几何意义是在有心力作用下运动质点矢径掠面速度的二倍。

1.25）为什么说一个运动质点若其动量矩守恒，则它必在一平面上运动？

答：动量矩守恒即 $\mathbf{r}\times m\mathbf{v}=\mathbf{c}$。其中 $\mathbf{c}$ 为常矢量，由二矢量矢乘定义可知 $\mathbf{c}$ 是垂直于 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{v}$ 所组成的平面，因而必垂直于 $\mathbf{v}$，但 $\mathbf{c}$ 是常矢，即时时刻刻它的方向、值皆不变，故 $\mathbf{v}$ 必时时在垂直于 $\mathbf{c}$ 之平面内，即质点在垂直于 $\mathbf{c}$ 平面内运动。

第一章　质点力学习题解答

1.1）　已知质点的位置矢量 $\mathbf{r}$：

$$\mathbf{r}_1 = 16t\,\mathbf{i} + 25t^2\,\mathbf{j} + 33\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 = 10\sin 15t\,\mathbf{i} + 35t\,\mathbf{j} + e^{6t}\mathbf{k}$$

求它们的速度及加速度。

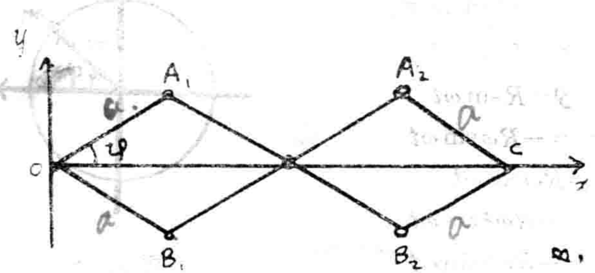
〔解〕　$\mathbf{v}_1 = \dfrac{d\mathbf{r}_1}{dt} = 16\mathbf{i} + 50t\,\mathbf{j}$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = 50\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 150\cos 15t\,\mathbf{i} + 35\mathbf{j} + 6e^{6t}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = -2250\sin 15t\,\mathbf{i} + 36e^{6t}\mathbf{k}$$

1.2）　一铰链机构由长为 a 的杆 OA_1、OB_1、CA_2、CB_2 及长为 $2a$ 的杆 A_1B_2、A_2B_1 构成。求铰链 c 沿 x 轴运动时，铰链 A_1、A_2 的轨迹。

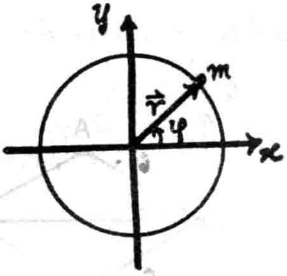


题1.2图

〔解〕思路：写出任一时刻 A_1、A_2 以 φ 为参变量的直角坐标系的分量式，再消去 φ 即得轨迹方程。

对 A_1：
$$x_1=a\cos\varphi$$
$$y_1=a\sin\varphi$$
而式平方相加，便得 A_1 轨迹：
$$x_1^2+y_1^2=a^2$$
对 A_2：
$$x_2=3a\cos\varphi$$
$$y_2=a\sin\varphi$$
或：
$$\frac{x_2}{3a}=\cos\varphi$$
$$\frac{y_2}{a}=\sin\varphi$$
两式平方相加，便得 A_2 轨迹：
$$\frac{x_2^2}{(3a)^2}+\frac{y_2^2}{a^2}=1$$

1.3) 一质点作匀速园周运动，其角速度为 ω。半径为 R。试用直角坐标系和平面极坐标系分别表出质点的坐标、速度、加速度及轨迹。



题 1.3图

〔解〕直角坐标系：
$$x=R\cos\omega t$$
$$y=R\sin\omega t$$
$$\dot{x}=-R\omega\sin\omega t$$
$$\dot{y}=R\omega\cos\omega t$$
$$\ddot{x}=-R\omega^2\cos\omega t$$
$$\ddot{y}=-R\omega^2\sin\omega t$$
对前两式平方相加，得轨迹：

$$x^2+y^2=R^2$$

平面极坐标系：

$$r=R=\text{常量}$$

$$\varphi=\omega t$$

$$v_r=\dot{r}=0$$

$$v_\theta=r\dot{\theta}=R\omega$$

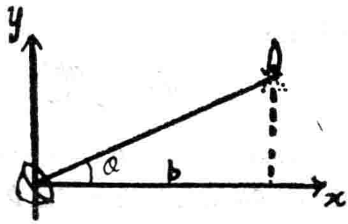
$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-R\omega^2$$

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0$$

轨迹方程：

$$r=R=\text{常量}$$

1.4） 雷达在距离火箭发射台 b 处，观察铅垂上升的火箭发射，测得 θ 角的规律为 $\theta=kt$，k 为常数。试求出火箭的运动方程、速度及加速度。



题 1.4图

〔解〕由题知：火箭作直线运动，故选直角坐标系。

火箭运动方程：

$$y=b\,\mathrm{tg}\theta=b\,\mathrm{tg}kt.$$

速度：

$$v=\frac{dy}{dt}=bk\sec^2kt$$

加速度：

$$a=\frac{dv}{dt}=2bk^2\sec^2kt\cdot\mathrm{tg}kt$$

1.5） 已知 $r=at$，$\theta=\dfrac{b}{t}$，求质点的径向加速度 a_r 及横向加速度 a_θ。

〔解〕思路：因为

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\quad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$$

所以，只要由题给运动方程，求出 $\dot{r}$、$\ddot{r}$ 及 $\dot{\theta}$，$\ddot{\theta}$ 代入即可。

由题给 $r=at$，$\theta=\dfrac{b}{t}$，有：

$$\dot{r}=a,\qquad \ddot{r}=0$$

$$\dot{\theta}=-\frac{b}{t^2}\qquad \ddot{\theta}=\frac{2b}{t^3}$$

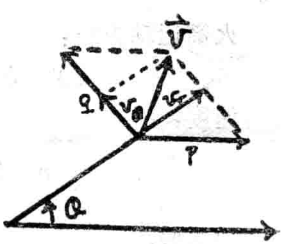
所以有：

$$a_r=-\frac{ab^2}{t^3}\qquad a_\theta=0。$$

1.6） 一质点 p 在一平面内运动。已知它的速度沿某一定方向 ox 的分量为一定值 p，沿与径向垂直方向的分量为一定值 q。求质点的运动轨道方程。

〔解〕：思路：由题意本题应用极坐标。写出极坐标的速度分量式，再积分消 t，便得轨道方程。

要注意：题中所说速度沿某一定方向 ox 的分量，不等于速度在 ox 方向的投影。而只是说明：



题 1.6 图

$$\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{v}。$$

只有在正交坐标系中，投影才与分量值相等。如图中有：

$$\mathbf{v}_r+\mathbf{v}_\theta=\mathbf{v}$$

而 $\mathbf{v}$ 在径向与横向的投影，也分别为 v_r 与 v_θ。

由图知：

$$v_r=\frac{dr}{dt}=p\cos\theta \tag{1}$$

$$v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}=q-p\sin\theta \tag{2}$$

（1）÷（2）消 t 得：

$$\frac{dr}{r}=\frac{p\cos\theta}{q-p\sin\theta}d\theta=-\frac{d(q-p\sin\theta)}{(q-p\sin\theta)} \tag{3}$$

对（3）式积分

$$\ln r=-\ln(q-p\sin\theta)+c$$
$$\ln r+\ln(q-p\sin\theta)=c$$
$$\ln[r(q-p\sin\theta)]=c$$
$$r(q-p\sin\theta)=e^c=c_1$$

故：

$$r=\frac{c_1}{q-p\sin\theta}=\frac{c_1/q}{1-\dfrac{p}{q}\sin\theta}=\frac{k_1}{1-k_2\sin\theta}$$

1.7） 矿山升降机作加速度运动时，其变加速度为：

$$a=c\left(1-\sin\frac{\pi t}{2T}\right)$$

式中 c 及 T 为常数。试求运动开始 t 秒后，升降机的速度及位移。设 $t=0$ 时速度为零。

〔解〕此题是积分问题。由题意升降机作直线运动，故

设 $t=0$ 时，升降机的位置在坐标原点，即 $x_0=0$。

$$a=\frac{dv}{dt}=c\left(1-\sin\frac{\pi t}{2T}\right)$$

$$v=c\left[\int\left(1-\sin\frac{\pi t}{2T}\right)dt\right]+c_1$$

$$=c\left[t+\frac{2T}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2T}\right]+c_1$$

因为 $t=0$ 时，$v_0=0$，所以有：

$$c_1=-\frac{2TC}{\pi}$$

$$v=\frac{dx}{dt}=c\left[t+\frac{2T}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2T}\right]-\frac{2TC}{\pi}$$

$$x=c\int\left[t+\frac{2T}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2T}\right]dt-\frac{2Tc}{\pi}\int dt+c_2$$

$$=c\left[\frac{t^2}{2}+\left(\frac{2T}{\pi}\right)^2\sin\frac{\pi t}{2T}-\frac{2T}{\pi}t\right]+c_2$$

因为 $t=0$ 时，$x_0=0$，所以有：

$$c_2=0.$$

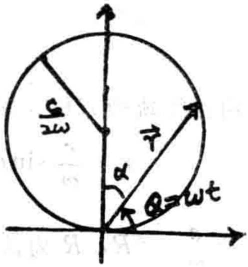
故 t 时刻升降机的速度及位移为：

$$v=c\left[t+\frac{2T}{\pi}\left(\cos\frac{\pi t}{2T}-1\right)\right]$$

$$x=c\left[\frac{t^2}{2}+\frac{2T}{\pi}\left(\frac{2T}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2T}-t\right)\right]$$

1.8） 已知一质点作平面运动，其速度为常数 c，矢径的角速度为常数 ω。求质点的运动方程及轨道。设 $t=0$，时，$r=0$，$\theta=0$。

〔解〕思路：由题给速度是常数，矢径角速度为常数，故可利用平面极坐标，写出速度与分量速度的关系式，再积分便得运动方程；消去参变量便得轨道。



题 1.8 图

在平面极坐标中，$v_r=\dot{r}, v_\theta=r\dot{\theta}=r\omega$，所以有：

$$c^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\omega^2$$

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{c^2-r^2\omega^2}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{c^2-r^2\omega^2}}=dt$$

因为

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c\ \text{（积分常数）}$$

所以，上式积分为：

$$\arcsin\frac{\omega r}{c}=\omega t+c_1$$

或

$$\sin(\omega t+c_1)=\frac{\omega}{c}r$$

因为当 $t=0$ 时，$r=0$，（$\theta=0$），所以有：

$$c_1=0.$$

故运动方程为：