普通高等教育“十二五”规划教材

工 科 数 学 精 品 丛 书

丛书主编 李德宜 等

工程数学

复变函数与积分变换

（第二版）

尹水仿 李寿贵 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书
丛书主编　李德宜　等

工程数学

复变函数与积分变换

（第二版）

尹水仿　李寿贵　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书(第二版)根据教育部非数学类课程“复变函数与积分变换”教学基本要求,结合编者多年讲授本课程的基础上编写而成.对第一版教材内容、体系作了适当的调整与优化,使其具有更好的可读性.主要内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换、*Z* 变换和小波变换简介.

本书内容精炼、结构合理、推理简明、深入浅出、通俗易懂,具有鲜明的应用特点,可作为高等学校理工科相关专业“复变函数与积分变换”课程的教材,也可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.复变函数与积分变换/尹水仿,李寿贵主编.—2版.—北京:科学出版社,2014.7

(工科数学精品丛书)

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-041372-7

Ⅰ.①工… Ⅱ.①尹… ②李… Ⅲ.①工程数学—高等学校—教材②复变函数—高等学校—教材③积分变换—高等学校—教材 Ⅳ.①TB11 ②O174.5 ③O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第150555号

责任编辑:王雨舸/责任校对:蔡 莹

责任印制:高 嵘/封面设计:苏 波

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年4月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2014年8月第 二 版 印张:16 1/4

2014年8月第一次印刷 字数:310 000

定价:33.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书

《工程数学·复变函数与积分变换(第二版)》编委会

主　编　尹水仿　李寿贵

副主编　刘云冰　冯育强　肖自碧　马建清

编　委　尹水仿　李寿贵　刘云冰　冯育强

肖自碧　马建清　咸艳霞　张　青

胡　佳　喻　敏　余长春　丁咏梅

《工科数学精品丛书》序

工科学生毕业多年后时常感言，数学知识很多似乎没有派上用处，但数学训练、数学思想和精神，却无时无刻不在发挥着积极的作用，成为取得成功的最重要因素之一.

数学是一门高度抽象的学科，但是它非人类精神纯粹自由创造和想像，而是源于自然和工程问题. 系统传授数学知识当然是工科数学教学的基本任务与责任，同时，掌握了数学的思想方法和精神实质，就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论，显示出无穷无尽的威力. 工科数学创新教学，增强数学应用背景的讲授，拓宽学生的知识面，了解数学学科在科学研究领域的重要性，为学生打开数学与应用的窗口等，能培养学生的创新意识与精神，提高数学思维与素养，真正达到工科数学教学的目的.

工科数学精品教材的编写与成熟，在开放的视野与背景下，得到认同，自然成为纸质教材与数字出版的精品，从而得到广泛认可和使用.

在学会、领导和专家的关怀和指导下，本区域若干所全军重点、一本和省重点高校，其工科数学教材，在科学出版社出版和再版. 10 余年以来，教学和教材理念从素质教育，到分类分层教学改革，到数学思想、方法与创新教育，历经各校几届领导和责任教授的共同努力，逐渐成熟，成为具有较高质量的核心精品.

教材转型与数字出版呼之欲出，大趋势赫然在前，教材又重新经历新的考验.《工科数学精品丛书》正是按此理念和要求，直面开放的视野与背景，将改革与创新的成果汇集起来，重新审视和操作，精益求精，以赢得内容先机，修订版和新编教材均是如此.

修订和新编的核心理念，一是体现数学思维，将数学思想和方法(如数学建模)融入教材体系、内容及其应用；二是深化改革与创新，面向开放和数字出版的大平台，赢得内容先机，营造精品.

《工科数学精品丛书》为工科数学课程教材：高等数学、线性代数、概率论与数理统计、数学建模、数学实验、复变函数与积分变换、数值分析、数学物理方程、离散数学、模糊数学、运筹学等. 上述各课程大多为省级精品课程.

丛书注重质量，讲究适用和教学实践性，体系相对完整与系统，加强应用性，按照先进、改革与创新等编写原则和基本要求安排教材框架、结构和内容.

丛书具有明确的指导思想：

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求,知识体系相对完整,结构严谨,内容精炼,循序渐进,推理简明,通俗易懂.

(2) 注重教学创新,加强教学知识与内容的应用性,注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性.增强数学应用背景的介绍,拓宽学生的知识面,了解数学学科在科学研究领域的重要性,为学生打开数学与应用的窗口,培养学生的创新意识与精神,提高数学思维与素养,真正达到工科数学教学的目的.

(3) 融入现代数学思想(如数学建模),分别将 Mathematic、Matlab、Sas、Sps 等软件的计算方法,恰当地融入课程教学内容中,培养学生运用数学软件的能力.

(4) 强化学生的实验训练和动手能力,可将实验训练作为模块,列入附录,供教学选用或学生自学自练,使用者取舍也方便.

(5) 教材章后均列出重要概念的英文词汇,布置若干道英文习题,要求学生用英文求解,以适应教育面向世界的需要,也为双语教学打下基础.

(6) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题,形式多样.书后配测试题,书末提供解题思路或参考答案.

丛书为科学出版社普通高等教育"十二五"规划教材.

《工科数学精品丛书》编委会

2014 年 3 月

第二版前言

“复变函数与积分变换”课程是面向高等学校理工科学生继“高等数学”课程之后的又一门重要的数学基础课. 本书第一版自2009年出版以来，得到了广大读者的关注，在使用过程中，广大读者向我们提出了许多宝贵的意见和建议，在此深表感谢!

为了使本书的体系结构更加科学合理，更好地适合当前的教学需要，汲取使用本书第一版的读者提出的意见和建议，决定对本书进行修订.

在本次修订中，我们更正了第一版中的一些不足与错误，对第一版中所用的“名词”、“术语”及“符号”作了进一步的统一规范，对全书的例题和习题作了适当调整，适当增加了题量，并对习题答案作了进一步审核. 对第一版中我们认为写得不够清楚或表达不够准确和严谨的地方作了认真的修改，使得本书第二版更加严谨、更加规范.

本次修订在指导思想和内容上，我们重点注重到以下方面：

(1) 为了更好地与中学数学教材内容衔接，对"复数的几何表示和运算"作了更为详细的介绍.

(2) 为了使内容体系更加紧密，更加具有系统性，我们将第一版中的第一章复数及平面区域和第二章复变函数合并为一章.

(3) 对第一版中“初等函数”一节调整了个别内容的先后次序，并增加了“幂函数”，使得该部分内容更全面，且重点更加突出.

(4) 在“留数”一章中增添了“函数在无穷远点的性态”和“函数在无穷远点的留数”等内容，使得内容更加完整.

本版修订工作仍由第一版中相关编写人员完成. 肖自碧副教授为本版修订作了大量的工作.

限于编者水平，书中仍难免存在不足，欢迎广大读者批评指正.

编者

2014年6月

第一版前言

随着科学技术的迅速发展,复变函数与积分变换的理论和方法已广泛应用于许多工程技术和科学研究领域."复变函数与积分变换"课程是面向高等院校理工科学生继"高等数学"课程之后的又一门数学基础课.通过对本课程的学习,使学生掌握复变函数与积分变换的基本理论及工程技术中常用的数学方法,为学习有关的后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础.为了更好体现本课程的实用性和工科学生学习的特点,同时,为了满足教学改革和课程建设的需要,我们编写了这本教学用书.

本书的编写遵照国家教育部制定的对本课程的教学基本要求,并结合编者多年讲授本课程的基础上编写而成.编写本书,我们注意到以下几方面:

1. 吸取了国内同类教材的优点,保持本课程传统的知识体系.考虑到理工科学生学习本课程的目的主要在于后续课程的应用,编写中侧重于对基本概念和解题方法的讲解.基本概念的引入尽可能简化,并淡化了一些理论证明.本书每一章都安排了适量的例题与习题,并注意到例题和习题选择上的典型性与多样性.

2. 在内容的安排上力求由浅入深,循序渐进,使之能更好地适合工科学生阅读.为了更好地便于学生自学,在注意编写的科学性和严谨性及知识的系统性的同时,力求叙述简洁,内容精练,推理简明,通俗易懂.

3. 为了适应双语教学的需要,教材的每一章后都附有相应重要概念的英语词汇,习题中编有若干英文习题,并要求学生用英文求解,以提高学生阅读数学外文资料的能力,并为学生日后用英文撰写学术论文打下基础.

4. 为了扩大学生的视野,使学生了解复变函数与积分变换的发展背景,在每一章后对复变函数与积分变换发展过程中做出过伟大贡献的一些著名数学家做了简介,在书末还附有复变函数的发展简史.

5. 随着工程技术和科学研究的发展,对数学应用的要求也在不断的增加.为了满足这种需求,本书尝试编写了 z 变换和小波变换应用简介,以适应后续课程学习的需要.

本书由尹水仿、李寿贵主编，刘云冰、冯育强、肖自碧、马建清任副主编，李寿贵提出编写思路及本书的整体框架，尹水仿拟出编写大纲. 各章编写人员为：冯育强(第一章、第十一章)，尹水仿(第二章、第三章)，李寿贵(第四章)，马建清(第五章、第六章)，肖自碧(第七章、第十章)，刘云冰(第八章、第九章). 各章后的数学家简介及书末的复变函数简史由尹水仿、李寿贵收集整理，并做了全书的统稿工作. 咸艳霞、张青、胡佳、喻敏、余长春、丁咏梅参与了编写的整理工作和习题与答案的编写. 最后由尹水仿、李寿贵统筹定稿.

由于编者水平有限，书中不妥及错误之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

2009.5

目　录

第一章　复数与复变函数

复变函数的定义域和值域均取自复数域.因此,在展开主要内容之前,有必要系统地学习复数的概念及相关性质.

第一节　复数及其代数运算

一、复数的概念

定义 1.1　形如 $z = x + \mathrm{i}y$ 或 $z = x + y\mathrm{i}$ 的数称为**复数**,其中 x, y 为两个实数,分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**,并记为 $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. i 称为**虚数单位**,满足

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

显然,当虚部 $y = 0$ 时,复数 z 就是实数;当实部 $x = 0$ 且虚部 $y \neq 0$ 时,复数 $z = \mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**;两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ **相等**,当且仅当 z_1, z_2 实部、虚部分别对应相等,即 $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$;称复数 $x - \mathrm{i}y$ 为复数 $x + \mathrm{i}y$ 的**共轭**,记为 $\bar{z}$.

二、复数的四则运算

记 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,则两个复数的和、差与乘积的定义如下

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2) \tag{1-1}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1-2}$$

当 $z_2 \neq 0$ 时,可以定义除法

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1-3}$$

三、复数的运算性质

由复数四则运算的定义,不难验证以下的复数的运算性质:

(1) **封闭性**,即复数的四则运算的结果仍是一个复数;

(2) **加法交换律**,即 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

(3) **加法结合律**,即 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

(4) **乘法对加法的分配律**,即 $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$;

(5) **乘法交换律与结合律**,即 $z_1 z_2 = z_2 z_1$ 及 $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

(6) **共轭运算的性质**

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\, \overline{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

$$\overline{(\overline{z})} = z$$

$$z + \overline{z} = 2x$$

$$z - \overline{z} = 2y\mathrm{i}$$

(读者自行证明)

例 1.1 设 z_1, z_2 是两个复数,证明:如果 $z_1 + z_2$ 及 $z_1 z_2$ 都是实数,那么 z_1, z_2 或者都是实数,或者是共轭复数.

证 设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,则

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \quad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

由题设知

$$y_1 + y_2 = 0 \quad 及 \quad x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0$$

(1) 当 $y_1 = 0$ 时,$y_2 = 0$,这时 z_1, z_2 为实数;

(2) 当 $y_1 \neq 0$ 时,$y_1 = - y_2$,从而由第二式得 $x_1 = x_2$,这时 z_1 和 z_2 为共轭复数.

证毕.

注 当 $z_1 = \overline{z}_2$ 时,$z_1 z_2 = x_1^2 + y_1^2$.

例 1.2 设 $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$,求 $\overline{z}$ 及 $z\overline{z}$.

解
$$z = \frac{(1-2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})} = \frac{-5-10\mathrm{i}}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}$$

所以

$$\overline{z} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}, \quad z\overline{z} = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

第二节 复数的几何表示

一、复平面

一个复数 $x + \mathrm{i}y$ 可完全由一对有序数组 (x, y) 所确定. 因此,我们在平面上可

建立直角坐标系，使得复数 $x+\mathrm{i}y$ 与平面上的点 (x, y) 一一对应(图 1-1). 由于实数 x $(y=0)$ 对应于横坐标轴上的点，纯虚数 $\mathrm{i}y$ $(x=0, y\neq 0)$ 对应于纵坐标轴上的点，故将平面直角坐标系中的横坐标轴改称实轴，纵坐标轴改称虚轴，并称这个平面为复平面，或 z 平面.

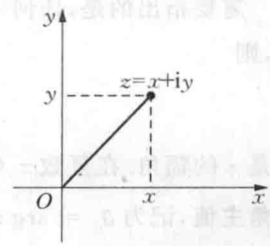

图 1-1

二、复数的点表示

引入复平面后，复数与平面之间建立了一一对应，从而复数的许多结果得到了几何直观的解释. 为方便起见，复数 z 和复平面上的点 z 可等同叙述，如

$$\{z \mid \operatorname{Im} z>0\} \quad 与 \quad \{z \mid 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1\}$$

分别表示上半平面和以 0, 1, 1+i, i 为顶点的正方形.

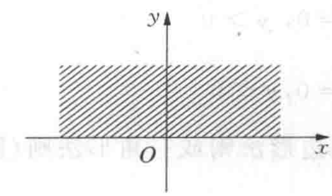

图 1-2　$\operatorname{Im} z>0$

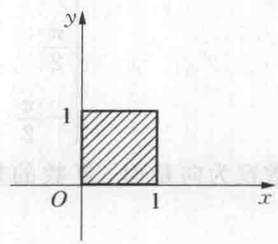

图 1-3　$0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$

三、复数的向量表示

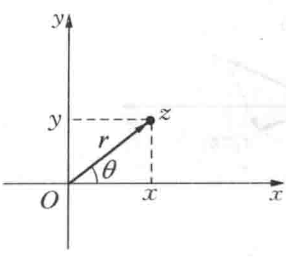

图 1-4

如果把复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部和虚部作为平面向量在两坐标轴上的投影，则复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用平面向量 $\overrightarrow{Oz}=\{x, y\}$ 表示(图 1-4). 向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的模称为复数 z 的模，记为

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1-4}$$

它是点 z 到原点的距离，即向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度. 由模的定义易得

$$|x| \leqslant |z|, \quad |y| \leqslant |z|, \quad |z| \leqslant |x|+|y|, \quad z\bar{z}=|z|^2 \tag{1-5}$$

定义 1.2　当 $z\neq 0$ 时，以实轴正向为始边，以复数 z 对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 为终边的角称为**复数 z 的辐角**，记为 $\operatorname{Arg} z$. 令 $\operatorname{Arg} z=\theta$，则由向量的性质可得

$$x=|z|\cos\theta, \quad y=|z|\sin\theta, \quad \tan\theta=\frac{y}{x} \tag{1-6}$$

需要指出的是,任何一个不为0的复数均有无穷多个辐角,若 θ_1 为 z 的一个辐角,则

$$\mathrm{Arg}z = \theta_1 + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \tag{1-7}$$

都是 z 的辐角. 在复数 z ($\neq 0$)的辐角中,满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为复数 z 的**辐角主值**,记为 $\theta_0 = \arg z$. 当 $z = 0$ 时,$\overrightarrow{Oz}$ 表示零向量,其辐角不定.

非零复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的辐角主值 $\arg z$ 可以由下式确定

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } x > 0 \\ \pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } x < 0,\ y > 0 \\ -\pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } x < 0,\ y < 0 \\ \pi & \text{当 } x < 0,\ y = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x = 0, y < 0 \end{cases} \tag{1-8}$$

将复数视为向量时,复数的加减法遵循平行四边形法则或三角形法则(图1-5).

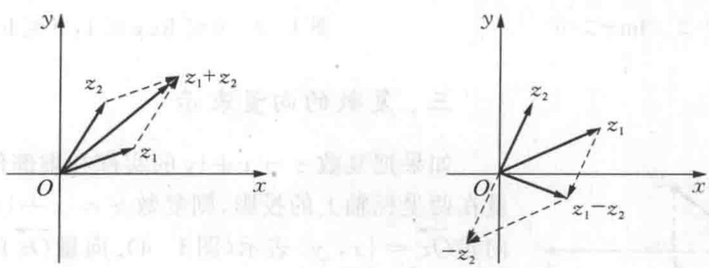

图 1-5

从三角形法则,可以得到以下的三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{1-9}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big| \tag{1-10}$$

四、复数的乘方与开方

设 z 为一个复数,由(1-4)和(1-6)式可知,z 可以表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1-11}$$

其中 r 表示复数 z 的模，θ 为复数 z 的辐角，(1-11)式称为复数 z 的**三角表达式**.

利用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \tag{1-12}$$

我们可以把复数 z 表示为

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1-13}$$

这称为复数的**指数表达式**，易知此时 $\bar{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

利用复数的指数表达式，我们很容易计算出复数 z 的乘除法公式和乘方公式：

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \quad 或 \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \tag{1-14}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}[\cos(\theta_2-\theta_1) + \mathrm{i}\sin(\theta_2-\theta_1)] \quad 或 \quad z_1 z_2 = \frac{r_2}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)} \ (r_1 \neq 0) \tag{1-15}$$

$$z^n = \underbrace{z\cdots z}_{n个} = \underbrace{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdots r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdots r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}_{n个} = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{1-16}$$

或

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1-17}$$

如果定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$，那么当 n 为复整数时，(1-16)和(1-17)式也是成立的.

由(1-11)和(1-17)式，当 $r=1$ 时可以导出著名的棣莫弗公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \tag{1-18}$$

将此式的左端展开，再分为实部和虚部，就可以得到 n 倍角公式. 例如，令 $n=3$，由于

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 = [\cos^2\theta - \sin^2\theta + \mathrm{i}(\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta)](\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + \mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

所以有

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

再来考虑开方运算. 对于一个复数 z_1，如果有另一个复数 z_2 及一个正整数 n，使得 $z_2^n = z_1$，则 z_2 称为 z_1 的一个 n 次方根. 下面给出求 z_1 的 n 次方根公式.

设已知