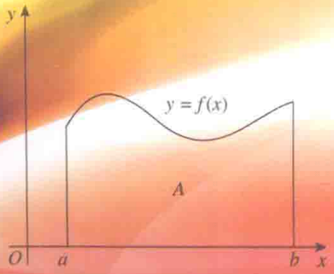
高校核心课程学习指导丛书

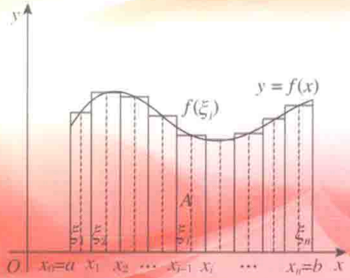
微积分学习指导

上册

WEIJIFEN
XUEXI ZHIDAO

陈祖墀／主审
段雅丽　叶　盛　顾新身／编著





中国科学技术大学出版社

高校核心课程学习指导丛书

微积分学习指导

上册

WEIJIFEN
XUEXI ZHIDAO

陈祖墀 / 主审
段雅丽　叶　盛　顾新身 / 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书基本上按照《微积分学导论》(上册)的章节对应编写,包括极限与连续、单变量函数的微分学、单变量函数的积分学、微分方程等.每节包括知识要点、精选例题和小结三部分,尤其对基本概念和基本定理给出详细的注记,是微积分学课程教学内容的补充、延伸、拓展和深入,对教师教学中不易展开的问题和学生学习、复习中的疑难问题进行了一定的探讨.

本书可作为理工科院校本科生学习微积分的辅导书及习题课的参考书,也可作为考研的复习指南.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导.上册/段雅丽,叶盛,顾新身编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2014.8

ISBN 978-7-312-03555-5

Ⅰ.微… Ⅱ.①段…②叶…③顾… Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 186504 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
http://press.ustc.edu.cn

印刷 合肥市宏基印刷有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 710 mm×960 mm 1/16

印张 17.75

字数 318 千

版次 2014 年 8 月第 1 版

印次 2014 年 8 月第 1 次印刷

定价 32.00 元

序

微积分课程是大学生, 特别是理工科大学生最重要的基础课程之一, 它对后续课程有直接的影响. 学好微积分对刚入学的大学生有至关重要的作用.

数学大师陈省身先生说过, 数学是做出来的, 不是读出来的. 也就是说, 做数学题是提高数学素质的关键一步. 如何做题? 怎样把题目做好? 做题的思想是如何想出来的? 等等. 由段雅丽副教授、叶盛副教授和顾新身教授撰写的这本《微积分学习指导》全面地回答了这些问题. 他们在中国科学技术大学从事微积分课程的教学工作十余年, 具有丰富的教学经验, 对学生的要求有具体的了解, 从而写出的这本书深刻、生动、翔实, 贴近学生诉求, 解答了学生在解题中的诸多困惑. 特别是对很多题目给出了解题的思路和适用的方法, 让学生不但知其然, 还知其所以然. 另外, 紧扣微积分教材各章节内容, 对很多典型的题目给出多思多解, 还收编或改编了中国科学技术大学多年来的期末或期中考试题目, 并对其作了分析与解答.

我深信这本书将成为学生学习微积分过程中的良师益友.

陈祖墀

2014 年 4 月

中国科学技术大学数学科学学院

写在中科大校园樱花盛开的季节

前　言

微积分是一门非常重要的基础课, 为了帮助广大学生学好微积分这门课程, 我们根据多年的教学经验, 编写了这本与教材相配套的辅导书, 基本上按照《微积分学导论》(上)和《微积分》(上)的章节对应编写. 每节包括知识要点、精选例题和小结三部分. 知识要点部分对基本概念和基本定理作了简述和分析, 给出详细的注记, 包括举反例、作对比等, 对有些定理作了相应拓展. 在精选例题部分, 选择了有代表性的典型例题, 阐述了解题方法、解题思路与运算技巧, 几乎每道题都以"分析"或"注记"的形式给出解题思路或拓展性的解读; 注记中给出了题型归类、方法指导或题目延伸等, 有的是一题多解, 有的是一题在不同条件下的解读, 有的综合多个知识点, 涉及多个章节的内容, 由简到难, 多方面分析, 意在培养学生分析问题、解决问题的能力; 同时, 有的例题后面还有相关的思考题, 以培养学生的独立思考能力, 更好地巩固所学知识, 提高实际解题能力. 小结部分对每节题型或知识点作提纲性的总结.

本书是微积分教学的重要辅导书, 对教师教学中不易展开的问题和学生学习中的疑难问题进行了一定的探讨. 例题中选编或改编了一些中国科学技术大学非数学专业本科生期中或期末试题及全国硕士研究生入学考试数学试题, 进行归纳分类, 给出分析与解答, 开阔思路, 使学生所学知识融会贯通. 另外, 整本书的例题序号按自然数编排, 这样视觉上直观、简洁, 并且便于老师与学生或读者之间的交流.

本书可作为理工科院校本科生学习微积分的辅导书及习题课的参考书, 也可作为考研的复习指南.

对在编写过程中所有给予帮助的同事们和朋友们表示由衷的感谢, 特别感谢陈祖墀教授, 他为我们编写此书提供了指导性建议和意见, 并给予了鼓励与帮助.

由于时间仓促、水平有限, 本书错漏和不当之处在所难免, 还望读者指正.

编著者
2014 年 4 月
中国科学技术大学数学科学学院

目　次

第 1 章　极限与连续

1.1　预备知识

首先, 我们介绍一些基础而重要的等式和不等式 (证明略), 以供读者查阅使用.

1. 合比与分比的关系

设所有分母 a_i 不为零且同号 (同大于零或同小于零), 则有

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_i}\right\}_{i=1}^{n} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \max\left\{\frac{b_i}{a_i}\right\}_{i=1}^{n},$$

其中等号成立当且仅当分比 $\left\{\frac{b_i}{a_i}\right\}_{i=1}^{n}$ 全相等.

2. 乘积的变差

$$AB - ab = A(B-b) + b(A-a).$$

3. 三角不等式

对任给的两个实数 a, b 都有

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$$

4. 阿贝尔 (Abel) 分部求和及其估算

记 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 则有:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$;

(2) 若对于 $k=1,2,\cdots,n$ 皆有 $|A_k| \leqslant L$, 且数列 $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ 是单调的, 那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant L(|b_1| + 2|b_n|);$$

(3) 若对于 $k=1,2,\cdots,n$ 皆有 $m \leqslant A_k \leqslant M$, 且 $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ 是非负单调递减的, 那么

$$mb_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant Mb_1.$$

5. 余弦 (正弦) 和式

当 x 不是 2π 的整数倍时, 有

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}; \quad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

6. 伯努利 (Bernoulli) 不等式

假设 $-1 < h \neq 0$, 则有:

(1) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $(1+h)^\alpha < 1 + \alpha h$;

(2) 当 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < 0$ 时, $(1+h)^\alpha > 1 + \alpha h$.

7. 加权均值不等式

假设 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, $\lambda_i > 0$ $(i = 1,2,\cdots,n; n \geqslant 2)$, 则对任给的 n 个正数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 都有

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{x_i}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i,$$

其中等号成立当且仅当 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 全相等.

(当 λ_i 皆为 $\dfrac{1}{n}$ 时, 上式便是平均值不等式.)

8. 赫尔德 (Hölder) 不等式

设 $x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n;\ y_1,\ y_2,\ \cdots,y_n$ 为两组不全为零的非负实数 $(n \geqslant 2)$, $p > 1, q > 1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}},$$

其中等式成立当且仅当存在常数 $\lambda > 0$, 使得对于 $i=1,2,\cdots,n$ 皆有 $x_i^p = \lambda y_i^q$.

(当 $p=q=2$ 时, 即柯西 (Cauchy)—施瓦茨 (Schwarz) 不等式.)

9. 闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式

设 $x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n;\ y_1,\ y_2,\ \cdots,y_n$ 为两组不全为零的非负实数 $(n \geqslant 2)$, $p>1$, 则有

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} ,$$

其中等式成立当且仅当存在常数 $\lambda > 0$, 使得对于 $i=1,2,\cdots,n$ 皆有 $x_i = \lambda y_i$.

(当 $p=2$ 时, 就是通常的三角不等式.)

注记 1. 前五条有中学知识范围内的初等证明.

2. 写出函数 $f(h)=(1+h)^\alpha$ 在 $h=0$ 处的一阶带拉格朗日 (Lagrange) 余项的泰勒 (Taylor) 展式, 并以此可以证明结论 6 (伯努利不等式).

3. 结论 6(1) 与结论 7 ($n=2$ 情形) 等价. 实际上, 结论 6(1) 可改写为: 当 $0<1+h\neq 1$ 时

$$1^{1-\alpha}(1+h)^\alpha < (1-\alpha)\cdot 1 + \alpha\cdot(1+h);$$

而结论 7($n=2$ 情形) 可写成: 当 $0<\alpha<1$, $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1 \neq x_2$ 时

$$x_1^{1-\alpha} x_2^\alpha < (1-\alpha)\cdot x_1 + \alpha\cdot x_2 \iff (1+h)^\alpha < 1+\alpha h ,$$

其中 $h=\dfrac{x_2}{x_1}-1$.

4. 在结论 7 (加权均值不等式) 中, $n=2$ 情形蕴含一般的 $n \geqslant 2$ 情形 (数学归纳法).

5. $\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 中是凹函数, 可用此事实证明结论 7.

6. 由结论 7 ($n=2$ 情形) 证结论 8 (赫尔德不等式), 由结论 8 证结论 9 (闵可夫斯基不等式). 关于结论 8 与结论 9, 读者还可参考书末综合练习题中积分意义上两相应不等式的证明方法.

1.2 数列极限

知识要点

◇ **数列极限的定义**

(**ε-N 定义**) 设有数列 $\{a_n\}$ 及实数 a, 若对任给的 $\varepsilon>0$, 总存在自然数 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N$ 时, 都有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 或称 a 是 $\{a_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad 或 \quad a_n\to a \quad (n\to\infty).$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \Longleftrightarrow 对\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N},使得当n>N时,恒有|a_n-a|<\varepsilon.$$

注记 1. 收敛性的定义中, 至关重要的是**正数 ε 的任意性**、与之相关的合乎要求的**自然数 N 的存在性**, 至于 $N=N(\varepsilon)$ 的大小以及它是否是合乎要求的最小的自然数都无关紧要.

2. 收敛性的定义中, 作如下改变, 仍然得到等价的定义. 比如将“对任给的 $\varepsilon>0$”换为“对任给的 $0<\varepsilon<1$”, 或“对任给的 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$ (n 是正整数)”; 又比

如将“$|a_n - a| < \varepsilon$ ”中的“$< \varepsilon$”换为“$\leqslant \varepsilon$”, 或将“ε”换为“$\dfrac{1}{3}\varepsilon$” “2ε”“ε^3”“$\sqrt{\varepsilon}$”或“$\ln(1+\varepsilon)$”等, 也都与原定义等价.

3. 增加、减少或改变数列的有限项不影响一个数列的敛散性.

4. $\{a_n\}$ 不以 a 为极限 (可能收敛但收敛值不等于 a) 描述为: 对实数 a, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall\, N \in \mathbb{N}$, 总存在 $n_0 > N$, 满足

$$|a_{n_0} - a| \geqslant \varepsilon_0.$$

记为 $a_n \not\to a(n \to \infty)$.

5. 如果数列 $\{a_n\}$ 不以任意实数 a 为极限, 即 $\{a_n\}$ 没有极限, 此时称 $\{a_n\}$ 为**发散数列**, 即对 $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\forall\, N \in \mathbb{N}$, 总存在 $n_0 > N$, 满足

$$|a_{n_0} - a| \geqslant \varepsilon_0.$$

特别地, 若对任给的 $M > 0$, 总存在自然数 N_M, 使得只要 $n > N_M$ 就有 $|a_n| > M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散到无穷, 或称当 $n \to \infty$ 时 $\{a_n\}$ 是**无穷大量**, 并记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (类似地定义 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

◇ 收敛数列的性质

1. 有界性

收敛数列 $\{a_n\}$ 一定是有界的, 即存在 $M > 0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}$, 成立 $|a_n| \leqslant M$.

注记　有界性只是数列收敛的必要条件, 但不是充分条件, 即“有界数列未必收敛, 无界数列一定发散”.

2. 极限唯一性

收敛数列的极限是唯一的.

3. 四则运算性

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛, 则有:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\ (\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0)$.

4. 线性性质

若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆收敛, 则 a_n 与 b_n 的线性组合也收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty}(c_1a_n+c_2b_n)=c_1\lim_{n\to\infty}a_n+c_2\lim_{n\to\infty}b_n,$$

其中 c_1 与 c_2 是两个常数.

5. 保序性

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛.

(1) 如果当 n 充分大时 $a_n\geqslant b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 则当 n 充分大时 $a_n>b_n$.

特别地:

(1) 如果当 n 充分大时 $a_n\geqslant 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant 0$;

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$, 则当 n 充分大时 $a_n>0$;

(3) 如果当 n 充分大时 $b\leqslant a_n\leqslant c$, 则 $b\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant c$;

(4) 如果 b 和 c 两个实数满足 $b<\lim\limits_{n\to\infty}a_n<c$, 则当 n 充分大时 $b<a_n<c$.

注记 这就是数列极限的**最终保序性**, 即如果收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限值落入实数集的某个开区间内, 则当 n 足够大以后, 所有 a_n 都将落入这个开区间内; 另一方面, 如果当 n 充分大时, 数列 $\{b_n\}$ 的各项全都在实数集的某个闭区间上, 则在 $\{b_n\}$ 收敛的情形下, 其极限值也必然落在这个闭区间上.

6. 夹逼性

若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $|a_n|\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 则 $\{a_n\}$ 也收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (这是收敛性判别法之一的夹逼定理的简单情形).

7. 子列收敛性

数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a\iff\{a_n\}$ 的所有子列皆收敛于 a.

注记 极限的四则运算性蕴含线性性质, 之所以把线性性质从四则运算性中单列出来, 是因为线性性质是基本而重要的. 求导运算、(不) 定积分运算也都具

有线性性质, 但它们的线性性质均来自于极限的线性性质.

◇ 判别数列收敛的方法

1. 利用数列收敛的 ε-N 定义

关键是如何找到 N, 一般有两种方法: 定义分析法和适当放大法.

(1) 定义分析法

通过解不等式, 从 $|a_n - a| < \varepsilon$ 中解出 n, 即可求得 N.

(2) 适当放大法

有时 $|a_n - a| < \varepsilon$ 比较复杂, 不便解出 n, 可考虑

$$|a_n - a| \leqslant f(n) < \varepsilon,$$

$f(n)$ 要形式简单, 易从 $f(n) < \varepsilon$ 解出 n.

另外, 并不要求对所有的 n 都满足 $|a_n - a| \leqslant f(n)$, 只要 $n > N_1$ (N_1 是某个自然数) 时满足即可, 而从 $f(n) < \varepsilon$ 解出 $n > N_2$, 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

2. 夹逼定理

如果数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 都收敛于 l, 且从某项 a_n 开始, 总有

$$b_n \leqslant a_n \leqslant c_n,$$

则数列 $\{a_n\}$ 也收敛于 l.

3. 单调有界判别法

单调递增 (减) 有上 (下) 界的数列必然收敛.

4. 柯西收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ 对一切正整数 p 都成立.

从柯西收敛准则得: 数列 $\{a_n\}$ 发散 $\Longleftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 有自然数 $n' > N . n'' > N$, 满足 $|a_{n'} - a_{n''}| \geqslant \varepsilon_0$.

注记 某些情况下, 斯托尔兹 (Stolz) 定理也是计算数列极限值或判断数列是否收敛的有效方法 (在例题中参见该定理及其证明).

精选例题

例 1 若数列 $\{a_n\}$ 的奇偶子列分别满足

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = a \quad 和 \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k} = a,$$

试证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证明 由 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$, 即对 $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得当 $k > N_1$ 时, 有 $|a_{2k+1} - a| < \varepsilon$;

再由 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 则对上面的 ε, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 使得当 $k > N_2$ 时, 有 $|a_{2k} - a| < \varepsilon$. 取

$$N = 2\max\{N_1, N_2\} + 1,$$

则当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

注记 这实质是等价命题, 即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_{2k} = a 且 \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = a.$$

例 2 设 $a_n \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 试证:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a}$.

证明 两式证法类似, 选证式 (2). 由极限的保号性知 $a \geqslant 0$.

当 $a = 0$ 时, 用数列极限的 ε-N 定义来证.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $0 \leqslant a_n < \varepsilon^3$. 因而当 $n > N$ 时, $0 \leqslant \sqrt[3]{a_n} < \varepsilon$, 故由定义, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = 0$.

当 $a > 0$ 时, 由分母有理化及适当放大得不等式

$$|\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{a}| = \left|\frac{(\sqrt[3]{a_n})^3 - (\sqrt[3]{a})^3}{\sqrt[3]{a_n^2} + \sqrt[3]{a_n}\cdot\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}\right| \leqslant \frac{|a_n - a|}{\sqrt[3]{a^2}}.$$

令 $n\to\infty$, 由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a})=0 \quad 即 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}.$$

注记 一般地, 设 $a_n\geqslant 0, \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$, 其中 k 为正整数.

例 3 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+8}{\sqrt{4n^4+3n}}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^{n+3}}{\sqrt[3]{27^n-9^{n+1}}}$.

分析 先对数列通项实施恒等变形, 再利用极限的四则运算及例 2 的结论.

解 (1)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n+8}{\sqrt{4n^4+3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{5}{n}+\dfrac{8}{n^2}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n^3}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{n}+\dfrac{8}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\dfrac{3}{n^3}}}=\frac{3}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}.$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^{n+3}}{\sqrt[3]{27^n-9^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+8\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{\sqrt[3]{1-9\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+8\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{1-9\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}=1.$$

例 4 试证: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(a>0)$.

证明 (1) 由平均值不等式, 当 $n\geqslant 3$ 时 (下述表示中有 $n-2$ 个 1)

$$1<\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot 1\cdots 1}<\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+1+\cdots+1}{n}=\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{n-2}{n}.$$

令 $n\to\infty$, 并利用夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \quad \left(\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0\right).$$

(2) 当 $a\geqslant 1$ 且 $n\geqslant a$ 时

$$1\leqslant\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{n}.$$

令 $n\to\infty$, 并利用 (1) 的结论和夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a\geqslant 1).$$

当 $0<a<1$ 时, $\dfrac{1}{a}>1$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0).$$

例 5 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_n<2$, $a_{n+1}(2-a_n)\geqslant 1$, 证明 $\{a_n\}$ 是单调增数列, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证明 由已知, 得 $2-a_n>0$, $a_{n+1}\geqslant\dfrac{1}{2-a_n}$, 故有

$$a_{n+1}-a_n\geqslant\frac{1}{2-a_n}-a_n=\frac{(1-a_n)^2}{2-a_n}\geqslant 0\quad 即\quad a_{n+1}\geqslant a_n,$$

则 $\{a_n\}$ 是单调增有上界的数列, 所以数列 $\{a_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则对 $a_{n+1}(2-a_n)\geqslant 1$ 两边取极限 $(n\to\infty)$, 得

$$a(2-a)\geqslant 1\quad 即\quad (1-a)^2\leqslant 0,$$

因而必有 $a=1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

例 6 令 $a_0=\dfrac{1}{5}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)$, $n=0,1,2,\cdots$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限值.

证明 (提要) 易见, 偶子列 $\{a_{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ 的通项都满足 $0<a_{2k}<1$, 而奇子列 $\{a_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ 的通项都满足 $a_{2k+1}>1$. 又因为

$$a_0=\frac{1}{5},\quad a_1=3,\quad a_2=\frac{2}{3},\quad a_3=\frac{5}{4},\quad a_2-a_0>0,\quad a_3-a_1<0,$$

$$a_{n+2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)}\right)=\frac{1}{2}+\frac{a_n}{1+a_n},\quad n=0,1,2,\cdots,\tag{1}$$