普通高等教育"十二五"规划教材

医用高等数学

葛 琳 熊安明 刘 智 主编

科 学 出 版 社

普通高等教育“十二五”规划教材

医用高等数学

葛　琳　熊安明　刘　智　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本教材包含一元函数微积分、多元函数微积分、概率论基础、线性代数初步等几个部分.一元函数微积分部分以极限、连续、微分、积分为主线展开讨论,(常)微分方程本质上也是一元函数的积分;多元函数微积分部分在简单介绍空间解析几何知识的基础上,以二元函数为对象,介绍极限与连续、偏导数与全微分、极值、二重积分等知识;概率论部分,在介绍了事件与概率等基本概念之后,以古典概型为基础,讲述概率的加法与乘法公式,进而讨论了常见随机变量的概率分布及其数字特征;线性代数部分,主要讲述行列式的性质与运算、矩阵的初等变换、线性方程组的解等内容.

本教材可供基础、临床、预防、口腔等医学类专业及药学各专业使用,也可供相关教学及研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学/葛琳,熊安明,刘智主编.—北京:科学出版社,2014.2
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-039710-2

Ⅰ.医… Ⅱ.①葛… ②熊… ③刘… Ⅲ.医用数学-高等学校-教材
Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第020645号

责任编辑：高 嵘 / 责任校对：董艳辉
责任印制：高 嵘 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)
2014年4月第 一 版 印张：17
2014年4月第一次印刷 字数：330 000

定价：32.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《医用高等数学》编委会

主　编　葛　琳　熊安明　刘　智

副主编　刘　涛　洪俊田

编　委　（按姓名笔画排序）

王松建　王剑波　刘　涛　刘　智

刘启贵　张　玲　张　璞　胡冬梅

钟丽华　洪俊田　葛　琳　曾德辉

管运青　熊安明

Foreword 前 言

医用高等数学是基础、临床、预防、口腔等医学专业及药学各专业必修的一门基础课,但各医学院校的专业培养目标不尽相同,课程设置也有较大的差别.本教材面向医学数学教材建设与改革的方向,立足于医学教学与医学实践的需要,在大量调查的基础上,与相关医学院校有多年医学数学教学经验的教师进行了深入、广泛的讨论,在内容体系的安排上尽可能科学合理.

全书共分九章,第一章至第六章,按 48 教学时数编写,属于基础部分.第七章至第九章相对独立.全书总教学时数大约 72 学时,能满足不同教学层次的需求.内容包含一元函数微积分、多元函数微积分、概率论基础、线性代数初步等几个部分.一元函数微积分部分以极限、连续、微分、积分为主线展开讨论,(常)微分方程本质上也是一元函数的积分;多元函数微积分部分在简单介绍空间解析几何知识的基础上,以二元函数为对象,介绍极限与连续、偏导数与全微分、极值、二重积分等知识;概率论部分,在介绍了事件与概率等基本概念之后,以古典概型为基础,讲述概率的加法与乘法公式,进而讨论了常见随机变量的概率分布及其数字特征;线性代数部分,主要讲述行列式的性质与运算、矩阵的初等变换、线性方程组的解等内容.

教材在文字表达上力求精练准确,通俗易懂,尽量避免过分数学化的语言.从应用角度出发,对教材中定理、性质的讲述理解重于证明,以求达到数学上的逻辑性与医学上的应用性二者之间的相对平衡.每节之后附有适量难度稍大的思考与讨论,可以启发读者的思维.每章之后提供大量的习题并附参考答案,方便读者自学.

由于时间仓促,编者水平有限,难免有不当之处,恳请读者批评指正.

编者

2013 年 9 月

Contents

目　录

第一章 函数与极限

函数描述变量之间的关系，它是对运动变化的客观事物间数量关系的抽象概括. 极限刻画变量的变化趋势，采用极限方法研究函数是高等数学与初等数学的本质区别. 本章主要内容包括函数、极限和函数连续性等基本概念，以及它们的主要性质.

第一节 函　　数

一、函数的概念

1. 常量与变量

在某一变化过程中可能会遇到各种不同的量，其中有的量始终保持同一数值，称为**常量(constant)**；有的量可以取不同的数值，称为**变量(variable)**.

一个量是常量还是变量是相对的，即它取决于具体的变化过程. 例如，重力加速度这个物理量，如果研究的是某地自由落体的运动属性，则视它为常量；如果研究的是这个物理量本身(与地球位置的关系)，则视它为变量.

2. 函数的概念

设 x, y 是同一变化过程中的两个变量，如果对于变量 x 的每一个允许的取值，按照一定的规律，变量 y 总有一个确定的值与之对应，则称 y 为 x 的**函数(function)**. 记为

$$y = f(x).$$

变量 x 称为**自变量(independent variable)**，变量 y 称为**因变量(dependent variable)**.

自变量 x 允许值的集合称为函数的**定义域(domain of definition)**，如果 x_0 是函数定义域中的一点，也说成函数 $f(x)$ 在 x_0 有定义，且把它对应的因变量的值称为函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$，即 $y\big|_{x=x_0} = f(x_0)$，所有函数值的集合称为函数的**值域(domain of functional value)**.

对应法则和定义域是函数概念中的两大要素，只有当二者完全相同时才认为两个函数是相同的函数. 根据具体的情况，对应法则即函数关系，可以使用解析式、图像、表格等表示.

二、初等函数　分段函数

1. 基本初等函数

幂函数(power function)

$$y = x^a \ (a \in \mathbf{R});$$

指数函数(exponential function)

$$y = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1);$$

对数函数(logarithmic function)

$$y = \log_a x \ (a > 0,\ a \neq 1);$$

三角函数(trigonometric functions)

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \tan x,\ y = \cot x \text{ 等};$$

反三角函数(inverse trigonometric functions)

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \arctan x,\ y = \operatorname{arccot} x \text{ 等}.$$

这五种基本初等函数再加上常数函数 $y=C$ (C 为常数)统称为**基本初等函数(basic elementary function)**.

2. 复合函数

设 $y = f(u)$ 是变量 u 的基本初等函数，而 $u = \varphi(x)$ 是变量 x 的基本初等函数，如果变量 x 取某些值时，相应的 u 使 y 有定义，则称 y 是 x 的**复合函数(composite function)**，记为

$$y = f[\varphi(x)].$$

变量 u 称为**中间变量(intermediate variable)**.

例 1　设 $y = \lg u, u = \arccos v, v = x+1$，写出 y 关于 x 的复合函数.

解　通过对 u，v 依次进行变量代换知，y 关于 x 的复合函数是 $y = \lg \arccos(x+1)$，其定义域为$[-2, 0)$.

例 2　设

$$f(x) = x^2,\quad g(x) = \frac{1}{x+1},$$

试求 $f[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$g[g(x)]$.

解　$f[f(x)]=[f(x)]^2=x^4$；

$$f[g(x)]=[g(x)]^2=\left(\frac{1}{x+1}\right)^2;$$

$$g[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{x^2+1};$$

$$g[g(x)]=\frac{1}{g(x)+1}=\frac{x+1}{x+2}.$$

注意：如果两个函数复合而成的函数的定义域为空集，则此复合函数无意义（或称它们不能复合）. 例如，$y=\ln u$，$u=\sin x-1$，因任意 x 都使得 $u=\sin x-1\leqslant 0$，$\ln u$ 无意义，它们不能复合.

例 3　将下列复合函数分解为简单函数.

(1) $y=\ln\sin(x^2-1)$；　　(2) $y=a\sin(bx+c)+\dfrac{b}{1+e^{ax}}$.

解　(1) 函数由 $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=x^2-1$ 复合而成，由 $\sin v>0$ 知，

$$2k\pi<x^2-1<(2k+1)\pi,$$

即

$$\sqrt{2k\pi+1}<x<\sqrt{(2k+1)\pi+1}\quad(k=0,1,2,3,\cdots).$$

(2) 整体上不是一个复合函数，它是 $y=y_1+y_2$ 两个复合函数的和.

函数 $y_1=a\sin(bx+c)$，由 $y_1=a\sin u_1$，$u_1=bx+c$ 复合而成.

函数 $y_2=\dfrac{b}{1+e^{ax}}$，由 $y_2=\dfrac{b}{u_2}$，$u_2=1+e^v$，$v=ax$ 复合而成.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或复合所得到的仅用一个解析式表达的函数，称为**初等函数(elementary function)**.

例如，$y=x^3+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$y=x\tan x+\sin(e^x+1)$ 等都是初等函数.

4. 分段函数

有些函数，自变量 x 在定义域的不同区间段内取值时，需要用到不同的解析式，这种需要由几个初等函数才能表达的函数称为**分段函数(piecewise function)**.

例如，绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0,\\ -x & x<0;\end{cases}$$

符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0,\\ 0 & x=0,\\ -1 & x<0.\end{cases}$$

它们都不能用一个解析式描述.

分段函数一般不属于初等函数.求值时要注意根据自变量的值选择相应的解析式.

例 4 设函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0 & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$,$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\varphi(-2)$.

解

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2};$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\varphi(-2)=0.$$

三、函数的几种特性

1. 有界性

设 I 是函数 $f(x)$的某个定义区间,如果存在一个正数 M,使对所有的 $x\in I$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内**有界(bounded)**,否则称函数 $f(x)$ 在 I 内**无界(unbounded)**(注:定义区间是指包含在定义域内的区间).

例如, $\tan x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{4},+\dfrac{\pi}{4}\right)$内有界,但在$\left(-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right)$内无界.

2. 单调性

设 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 的某定义区间(a,b) 内的任意两点,且 $x_1<x_2$.若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在(a,b) 内是**单调递增的(monotone increasing)**;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在(a,b) 内是**单调递减的(monotone decreasing)**.

例如,2^x 在$(-\infty,+\infty)$内是单调递增的;x^2 在$(-\infty,0)$内是单调递减的,

在$(0, +\infty)$内是单调递增的.

3. 奇偶性

设函数$f(x)$的定义域关于原点对称. 对于定义域内的任意x，如果$f(-x)=f(x)$恒成立，则称$f(x)$为**偶函数(even function)**；如果$f(-x)=-f(x)$恒成立，则称$f(x)$为**奇函数(odd function)**.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于y轴对称.

例如，x^2-x^4，2^x+2^{-x}，$\cos x$都是偶函数；x^3-x^5，2^x-2^{-x}，$\sin x$都是奇函数；但x^3-x^4，2^x+x^2，$\arccos x$都是非奇非偶函数.

4. 周期性

设x是函数$f(x)$定义域内的任意一点，如果存在一个正数l，使得$f(x+l)$也有定义，且等式$f(x+l)=f(x)$恒成立，则称$f(x)$为**周期函数(periodic function)**，满足这个等式的最小正数l称为函数的**最小正周期**.

例如，$\sin x$，$\cos 2x$都是周期函数，它们的最小正周期为2π，π.

注意：有界性与单调性是函数的局部特性，而奇偶性与周期性是其整体特性.

思考与讨论

1. 下面各组函数是否为相同的函数，为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$；

(3) $f(x)=e^{\ln x}$，$g(x)=x$；

(4) $f(x)=\arcsin x$，$g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$.

2. 下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=\arctan(\sin x)$； (2) $f(x)=\lg^2 x$；

(3) $f(x)=\ln\cos x$.

3. 下列函数哪些是周期函数，对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\arctan(\tan x)$； (2) $y=x\cos x$；

(3) $y=\sin\dfrac{1}{x}$； (4) $y=\sin^2 x$.

第二节 极　　限

一、极限的概念

实际问题会出现这种情况：函数在某点不一定有定义，但自变量无限靠近该点时，函数的变化趋势却存在一定规律性，这种函数变化趋势的问题，就是极限概念所要描述和解答的问题.

对于函数 $y=f(x)$，自变量 x 的变化趋势包括其绝对值无限增大（记为 $x\to\infty$）和其值无限靠近某个常数（记为 $x\to x_0$）两种情形，下面分别讨论这两种情况下函数 $y=f(x)$ 的变化趋势. 并且讨论数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋向正无穷大（$n\to\infty$）时，a_n 的变化趋势.

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的变化趋势，如下表.

x	±1	±10	±100	$\pm1\ 000$	$\pm10\ 000$	$\pm100\ 000$	…	$\to\infty$
$f(x)$	±1	±0.1	±0.01	±0.001	$\pm0.000\ 1$	$\pm0.000\ 01$	…	$\to0$

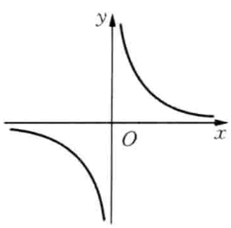

图 1-1

可以看出，当 $|x|$ 无限增大（即 $x\to\pm\infty$）时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无限趋向 0. 如图 1-1，观察 $|x|$ 无限增大时曲线的走向，也说明了这点.

定义 1　设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋向某一常数 A，就称当 x 趋向无穷大时，函数 $f(x)$ 以 A 为**极限(limits)**（或收敛于 A），记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

上述变化趋势用极限表示就是 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. 如果 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 不趋向某个常数，就称 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限不存在（或称发散）. 极限不存在通常有两种情形：一是函数值在某个范围内波动，如函数 $y=\sin x$，当

$x\to\infty$ 时，函数值在 -1 与 $+1$ 之间波动；一是函数值趋向无穷大，如函数 $y=x^2$，当 $x\to\infty$ 时，y 无限增大. 这种情况我们通常记为

$$\lim_{x\to\infty} x^2=\infty \quad 或 \quad x^2\to\infty(x\to\infty).$$

$|x|$ 无限增大即 $x\to\infty$，包含 $x\to\pm\infty$ 两种情形，某些函数不可以笼统地讨论. 例如，观察函数 $\arctan x$ 的变化情况，我们发现

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

仅当自变量 x 沿 x 轴正方向无限增大（或沿 x 轴负方向绝对值无限增大）时，函数 $f(x)$ 无限趋向某常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 的**单侧极限（one-side limit of $f(x)$）**，即

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

还是以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为例，观察自变量 x 在 x 轴上从 $x=1$ 的左右两个方向趋向 1（记为 $x\to1$）时，函数的变化趋势，如下表.

x	0.9	0.99	0.999	…	→	1	←	…	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.11	1.010	1.001	…	→	1	←	…	0.999	0.990	0.909

自变量 x 无论是从左边还是从右边趋向 1，其函数值都趋向常数 1.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义（该点本身可以没有定义），当自变量 x 以任何方式无限趋向定点 x_0 时，如果函数无限趋向某常数 A，就称当 x 趋向 x_0 时，函数以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

上述变化趋势记为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1$. 如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不趋向一个常数，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在. 例如，通过观察，我们发现

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty \quad 或 \quad \tan x\to\infty\left(x\to\frac{\pi}{2}\right).$$

当自变量 x 从 x_0 的左侧（$x<x_0$）趋向 x_0 时，若函数 $f(x)$ 趋向某一常数

A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限(left-hand limit of $f(x)$)**;当自变量 x 从 x_0 的右侧($x>x_0$)趋向 x_0 时,若函数 $f(x)$ 趋向某一常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限(right-hand limit of $f(x)$)**. 左、右极限分别记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A,\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A,$$

或

$$f(x_0^-)=A,\quad f(x_0^+)=A.$$

显然,当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$极限存在的充分必要条件是左、右极限都存在并且相等.

例 1 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时的极限.

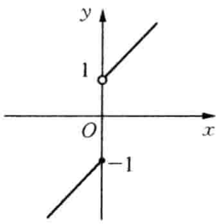

图 1-2

解 如图 1-2,这是分段函数,$f(x)$在点 $x=0$ 的左、右极限分别为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1.$$

左、右极限都存在,但不相等,所以当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$的极限不存在.

例 2 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1-x, & x>0\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时的极限.

解 如图 1-3,函数 $f(x)$在点 $x=0$ 时没有定义,但这不影响该点的极限. 由于

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+x)=1,$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-x)=1.$$

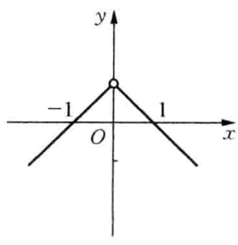

图 1-3

左、右极限都存在且相等,因此当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 的极限

存在，即$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

3. 数列的极限

数列(sequence)是按自然数顺序排列的一列数：

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

数列中的每一个数称为数列的项，其中的第 n 项 a_n 一般都是自然数 n 的函数，称为数列的**通项(general term)**，数列简记为$\{a_n\}$. 以下是几个数列的例子.

(1) $\left\{\dfrac{2^n-1}{3^n}\right\}$: $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{27}, \cdots, \dfrac{2^n-1}{3^n}, \cdots$;

(2) $\left\{2+\dfrac{1}{n^2}\right\}$: $3, \dfrac{9}{4}, \dfrac{19}{9}, \cdots, 2+\dfrac{1}{n^2}, \cdots$;

(3) $\{2n\}$: $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$;

(4) $\left\{(-1)^n\dfrac{n+1}{n}\right\}$: $-2, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{4}{3}, \cdots, (-1)^n\dfrac{n+1}{n}, \cdots$.

数列是自然数 n 的函数，其极限完全类似于函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$时的情况.

假定数列$\{a_n\}$在 n 大于某自然数时有定义，当 n 趋向无穷大时，如果 a_n 无限趋向于某常数 A，则称 A 为**数列$\{a_n\}$的极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad 或 \quad a_n \to A(n\to\infty).$$

例如，通过观察上述 4 个数列，(1)、(2)的极限存在：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=0; \quad \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2.$$

(3)、(4)的极限不存在，其中(3)可以记为

$$\lim_{n\to\infty} 2n=+\infty.$$

二、无穷小量及其性质

1. 无穷小量与无穷大量的概念

定义 3　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的极限为零，那么称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的**无穷小(infinitesimal)**.

例如，$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以函数 $x-1$ 为当 $x\to 1$ 时的无穷小.

定义 4　当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，如果 $|f(x)|$ 越来越大，就称函数 $f(x)$