“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

高等数学

第七版 下册

同济大学数学系 编

高等教育出版社

“十二五”普通高等教

高等数学

第七版 下册

同济大学数学系 编

GAODENG SHUXUE

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是同济大学数学系编的《高等数学》第七版，从整体上说与第六版没有大的变化，内容深广度符合“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，适合高等院校工科类各专业学生使用。

本次修订遵循“坚持改革、不断锤炼、打造精品”的要求，对第六版中个别概念的定义，少量定理、公式的证明及定理的假设条件作了一些重要修改；对全书的文字表达、记号的采用进行了仔细推敲；个别内容的安排作了一些调整，习题配置予以进一步充实、丰富，对少量习题作了更换。所有这些修订都是为了使本书更加完善，更好地满足教学需要。

本书分上、下两册出版，下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容，书末还附有习题答案与提示。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/同济大学数学系编. --7版. --北京:高等教育出版社,2014.7

ISBN 978-7-04-039662-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①同… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第099714号

策划编辑 王 强 责任编辑 蒋 青 封面设计 王凌波 责任绘图 郝 林
版式设计 童 丹 责任校对 刘 莉 责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 高教社(天津)印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 23
字 数 410千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 1978年10月第1版
2014年7月第7版
印 次 2014年8月第2次印刷
定 价 31.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 39662-00

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第八章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

本章先引进向量的概念，根据向量的线性运算建立空间坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的有关内容.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

客观世界中有这样一类量，它们既有大小，又有方向，例如位移、速度、加速度、力、力矩等等，这一类量叫做向量（或矢量）.

在数学上，常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$（图 8 - 1）. 有时也用一个黑体字母（书写时，在字母上面加箭头）来表示向量，例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等.

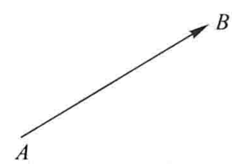

图 8 - 1

在实际问题中，有些向量与其起点有关（例如质点运动的速度与该质点的位置有关，一个力与该力的作用点的位置有关），有些向量与其起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，因此在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量（以后简称向量），即只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方. 当遇到与起点有关的向量时，可在一般原则下作特别处理.

由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做向量的模. 向量 $\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$ 和 $\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$ 和 $|\vec{a}|$.

模等于 1 的向量叫做单位向量. 模等于零的向量叫做零向量,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合,它的方向可以看做是任意的.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,任取空间一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,规定不超过 π 的 $\angle AOB$(设 $\varphi=\angle AOB$,$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 8-2),记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$,即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量,规定它们的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值.

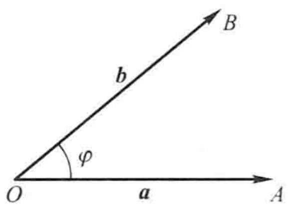

图 8-2

如果 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 如果 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 由于零向量与另一向量的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值,因此可以认为零向量与任何向量都平行,也可以认为零向量与任何向量都垂直.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共起点应在一条直线上. 因此,两向量平行,又称两向量共线.

类似还有向量共面的概念. 设有 k $(k\geqslant3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 k 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 k 个向量共面.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,连接 AC(图 8-3),那么向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则.

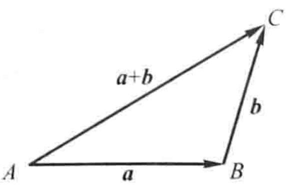

图 8-3

力学上有求合力的平行四边形法则,仿此,我们也有向量相加的平行四边形法则. 这就是:当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB、AD 为边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC(图 8-4),显然向量 $\overrightarrow{AC}$ 即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量的加法符合下列运算规律:

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为，按向量加法的规定（三角形法则），从图 8-4 可见：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

所以符合交换律. 又如图 8-5 所示，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 再加上 $\boldsymbol{c}$，即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，若以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得同一结果，所以符合结合律.

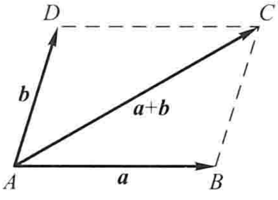

图 8-4

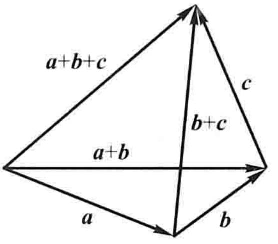

图 8-5

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\ (n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：以前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 8-6，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

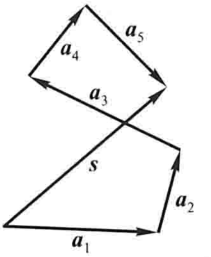

图 8-6

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 8-7(a)）.

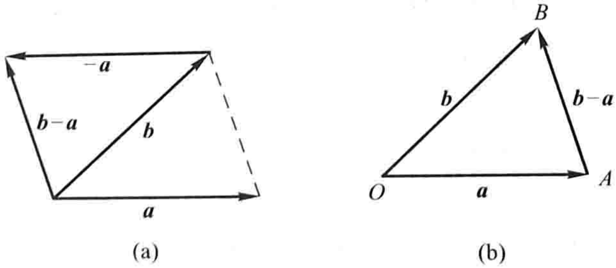

图 8-7

特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

显然,任给向量$\overrightarrow{AB}$及点 O,有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此,若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O,则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量$\overrightarrow{AB}$便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 8－7(b)).

由三角形两边之和大于第三边,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

2. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向可以是任意的.

特别地,当 $\lambda=\pm1$ 时,有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律:

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$

这是因为由向量与数的乘积的规定可知,向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$、$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$、$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是平行的向量,它们的方向也是相同的,而且

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|,$$

所以

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

(2) 分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}, \tag{1－1}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}. \tag{1－2}$$

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明,这里从略了.

向量相加及数乘向量统称为向量的线性运算.

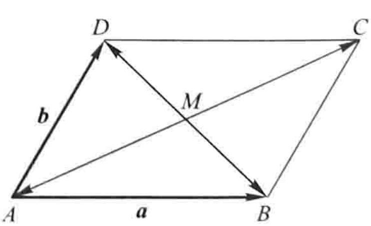

图 8－8

例 1　在平行四边形 $ABCD$ 中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$,这里 M 是平行四边形对角线的交点(图 8－8).

解　由于平行四边形的对角线互相平分,

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM},$$

即

$$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA},$$

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$,所以$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

前面已经讲过,模等于 1 的向量叫做单位向量. 设 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,那么按照向量与数的乘积的规定,由于$|\boldsymbol{a}|>0$,所以$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 的方向相同,即$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 又因$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 的模是

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}_a|=|\boldsymbol{a}|\cdot 1=|\boldsymbol{a}|,$$

即$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模也相同,因此,

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

我们规定,当 $\lambda\neq 0$ 时,$\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$. 由此,上式又可写成

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a.$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理 1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取$|\lambda|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值,即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,两式相减,便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$. 因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

定理证毕.

定理 1 是建立数轴的理论依据. 我们知道，给定一个点、一个方向及单位长度，就确定了一条数轴. 由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox（图 8－9），对于轴上任一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由于 $\overrightarrow{OP}\parallel\boldsymbol{i}$，根据定理 1，必有唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$（实数 x 叫做轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值），并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 于是

图 8－9

$$\text{点 } P\longleftrightarrow\text{向量 }\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\longleftrightarrow\text{实数 } x,$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此，定义实数 x 为轴上点 P 的坐标.

由此可知，轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}.$$

三、空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系或 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 坐标系（图 8－10）. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 8－11.

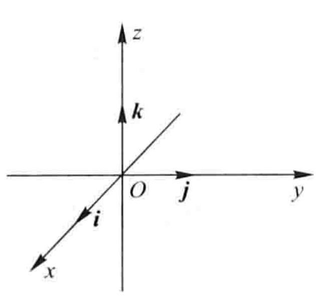

图 8－10

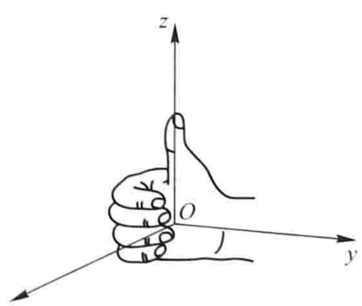

图 8－11

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴

及 x 轴所确定的坐标面,分别叫做 yOz 面及 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个卦限. 其中,在 xOy 面上方且 yOz 面前方、zOx 面右方的那个卦限叫做第一卦限,其他第二、第三、第四卦限,在 xOy 面的上方,按逆时针方向确定. 第五至第八卦限,在 xOy 面的下方,由第一卦限之下的第五卦限,按逆时针方向确定,这八个卦限分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 表示(图 8-12).

任给向量 $\boldsymbol{r}$,有对应点 M,使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$,如图 8-13 所示,有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式,$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$ 和 $z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量.

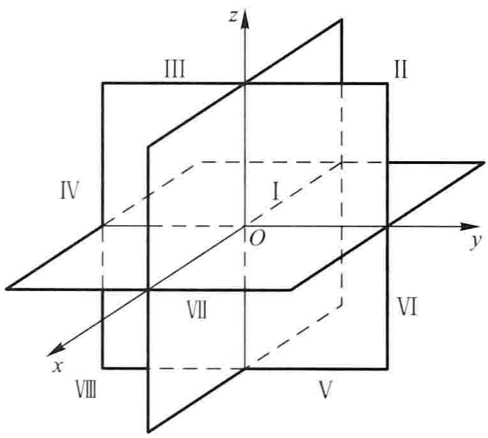

图 8-12

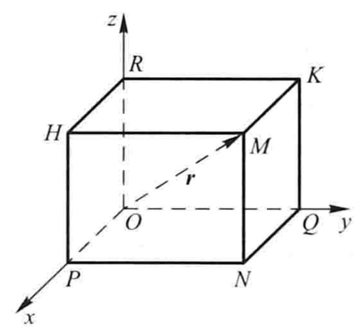

图 8-13

显然,给定向量 $\boldsymbol{r}$,就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$ 三个分向量,进而确定了 x、y、z 三个有序数;反之,给定三个有序数 x、y、z,也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M. 于是点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x、y、z 之间有一一对应的关系

$$M\longleftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\longleftrightarrow(x,y,z),$$

据此,定义:有序数 x、y、z 称为向量 $\boldsymbol{r}$(在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标,记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$;有序数 x、y、z 也称为点 M(在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标,记作 $M(x,y,z)$.

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明,一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 M,又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

坐标面上和坐标轴上的点,其坐标各有一定的特征. 例如:如果点 M 在 yOz 面上,那么 $x=0$;同样,在 zOx 面上的点,有 $y=0$;在 xOy 面上的点,有 $z=0$. 如果

点 M 在 x 轴上，那么 $y=z=0$；同样，在 y 轴上的点，有 $z=x=0$；在 z 轴上的点，有 $x=y=0$. 如点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

四、利用坐标作向量的线性运算

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下：

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律以及向量与数的乘法的结合律与分配律，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\quad(\lambda\text{ 为实数}),$$

即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

由此可见，对向量进行加、减及与数相乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了.

定理 1 指出，当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，坐标表示式为

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z),$$

这也就相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.\text{①}\qquad(1-3)$$

例 2　求解以向量为元的线性方程组

$$\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$.

---

① 当 a_x、a_y、a_z 有一个为零，例如 $a_x=0$，a_y、$a_z\neq0$，这时(1-3)式应理解为

$$\begin{cases}b_x=0,\\\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z};\end{cases}$$

当 a_x、a_y、a_z 有两个为零，例如 $a_x=a_y=0$，$a_z\neq0$，这时(1-3)式应理解为

$$\begin{cases}b_x=0,\\b_y=0.\end{cases}$$

解　如同解以实数为元的线性方程组一样，可解得

$$\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}.$$

将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式代入，即得

$$\boldsymbol{x}=2(2,1,2)-3(-1,1,-2)=(7,-1,10),$$

$$\boldsymbol{y}=3(2,1,2)-5(-1,1,-2)=(11,-2,16).$$

例 3　已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求点 M，使

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}.$$

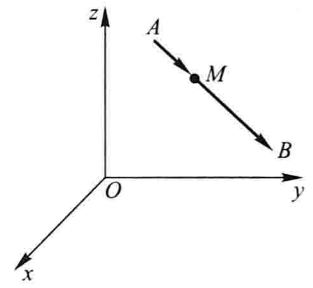

图 8－14

解　如图 8－14 所示. 由于

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$

从而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\,\overrightarrow{OB}).$$

将 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 的坐标（即点 A、点 B 的坐标）代入，即得

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right),$$

这就是点 M 的坐标.

本例中的点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，得线段 AB 的中点为

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

通过本例，我们应注意以下两点：(1) 由于点 M 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 有相同的坐标，因此，求点 M 的坐标，就是求 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. (2) 记号 (x,y,z) 既可表示点 M，又可表示向量 $\overrightarrow{OM}$，在几何中点与向量是两个不同的概念，不可混淆. 因此，在看到记号 (x,y,z) 时，须从上下文去认清它究竟表示点还是表示向量. 当 (x,y,z) 表示向量时，可对它进行运算；当 (x,y,z) 表示点时，就不能进行运算.

五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，如图 8－13 所示，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}.$$

由$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，有

$$|OP|=|x|,\ |OQ|=|y|,\ |OR|=|z|,$$

于是得向量模的坐标表示式

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设有点$A(x_1,y_1,z_1)$和点$B(x_2,y_2,z_2)$，则点A与点B间的距离$|AB|$就是向量$\overrightarrow{AB}$的模. 由

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}&=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),\end{aligned}$$

即得A、B两点间的距离

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 4　求证以$M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解　因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

所以$|M_2M_3|=|M_3M_1|$，即$\triangle M_1M_2M_3$为等腰三角形.

例 5　在z轴上求与两点$A(-4,1,7)$和$B(3,5,-2)$等距离的点.

解　因为所求的点M在z轴上，所以设该点为$M(0,0,z)$，依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}.$$

两边平方，解得

$$z=\frac{14}{9},$$

因此，所求的点为$M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

例 6　已知两点$A(4,0,5)$和$B(7,1,3)$，求与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}$.

解　因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(7,1,3)-(4,0,5)=(3,1,-2),$$

所以

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com