高等职业教育"十二五"规划教材

数学建模教程

朱焕桃 张钟德 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十二五”规划教材

数学建模教程

主　编　朱焕桃　张钟德
副主编　杨　红
参　编　张　屏　周爱群　易美香
　　　　刘素蓉　祝文达　陈五立

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书包括数学建模、极限、导数、微分、积分、微分方程、线性规划、数学实验等内容，书后附有常用数学公式、积分表、习题参考答案等，供读者阅读．本书在教学理念、教材结构、教学内容、习题设计等方面都富有创新；本书起点较低，突出了主要的数学思想与方法，注重用数学解决实际问题，语言叙述清晰、内容丰富．本书概括了微积分的广泛应用实例，并发掘、编写了微积分的发展史、科学思想、方法智慧等素质教育内容，习题包括基础题、应用题、探究题等．习题注重学生思维能力、研究能力、应用能力的培养，从传统的算数学转型为用数学．本书是在研究国内外的高等数学、数学建模和高职高专课程的基础上，改革创新、努力建设精品教材、特色教材的结果．

本书可作为各高职院校的高等数学、数学建模等课程的教材，也可供数学建模爱好者阅读参考．

图书在版编目（CIP）数据

数学建模教程/朱焕桃，张钟德主编．—北京：北京理工大学出版社，2013.8
ISBN 978-7-5640-8054-9

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①朱…　②张…　Ⅲ.①数学模型-高等职业教育-教材
Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 178164 号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 /100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址 /http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /北京慧美印刷有限公司
开　　本 /710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 /22　　　　　责任编辑 /高　芳
字　　数 /409 千字　　　　　文案编辑 /高　芳
版　　次 /2013 年 8 月第 1 版　2013 年 8 月第 1 次印刷　　　　　责任校对 /周瑞红
定　　价 /43.00 元　　　　　责任印制 /王美丽

前　　言

近年来，我国高等职业教育发展迅速. 众所周知，高等职业教育具有高等教育和职业教育的双重属性，以培养生产、建设、服务和管理第一线的专业技能型高素质专门人才为主要任务. 在高职人才培养过程中，高等教育属性明确了高职数学课程开设的必要性，而职业教育属性说明高职数学必须面向工作实际、解决实际问题.

秉承"让每位学生成为处理或解决实际问题的高手"的办学理念，我们在实际数学教学中，都希望教给学生有用的数学知识和数学思考方法，以及怎样用数学去解决实际问题. 为达到上述教学目标，我们在确保高职高专应用型人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系的基础上，组织编写了本教材.

本书在结构体系、内容安排、习题选取方面体现高职高专的特色，力求贯穿以应用为目的，以基础够用为原则，减少理论证明，注重分析问题、解决问题能力的培养. 本书有以下特色：

一、新概念

除在高中学习的基础上进一步加强数学计算、图形认识、逻辑分析等数学知识外，更主要的目的是加强学生数学建模思想的教育和数学方法的训练，培养学生养成探究学习的习惯，全面提高素质教育.

二、新结构

本书以数学建模论述开篇，探讨全新的理论加实践的模块教育方式. 为解决数学"起点低"的高职教育现状，我们将理论知识以一般叙述方式展开，并适当弱化理论性与学科性，注重数学思想与方法，将数学知识、数学实验、数学建模、数学计算软件有机地融汇为一体. 各主要章节习题设计为三层：基础题、应用题、探究题三个部分.

三、重探究

为让学生在教学中主动参与，在实践中认识与发现规律，本书编写了课堂讨论和典型生活中的建模实例，设计了一部分生活中的建模问题；同时，各章节中设计了难度较深的应用题与探究题.

四、重应用

本书搜集、设计了工程技术、经济管理、社会生活、自然现象等广泛领域内的数

学建模问题来作为例题和探究题,对每一个知识重点在后面设计了 Matlab 数学实验,展现用现代先进技术解决难度较大的经典数学问题和现实中的数学问题,提高学生对数学学习的兴趣,培养学生解决实际问题的能力,激发学生探索数学世界的激情.

本书由朱焕桃、张钟德担任主编并统稿,杨红担任副主编,张屏、周爱群、易美香、刘素蓉、祝文达、陈五立参与编写并提供了大量资料.本书还参考吸收了有关教材及著作的成果,在此一并感谢.

由于编者水平有限,难免存在疏漏之处,敬请读者批评指正.

编　者

目　　录

第 1 章　数学建模概论

1.1　数学的作用与教育

1.1.1　数学的作用

著名数学家华罗庚指出："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，地球之变，生物之谜，日用之繁"无一能离开数学. 人类从蛮荒时代的结绳计数，到如今电子计算机指挥宇宙飞船航行，任何时候都受到数学的恩惠和影响. 高耸入云的建筑物，海洋石油钻井平台、人造地球卫星等，都是人类数学智慧的结晶. 随着计算机科学的迅速发展，数学兼有了科学与技术的双重身份，现代科学技术越来越表现为一种数学技术. 当代科学技术的突出特点是定量化，而定量化的标志就是运用数学思想和方法. 精确定量思维是对当代科技人员的共同要求，所谓定量思维指人们从实际中提炼数学问题，抽象为数学模型，用数学计算求出此模型的解或近似解，然后回到现实中进行检验，必要时修改模型以使之更切合实际，最后编制解题的计算软件，以便得到更广泛和更方便的应用. 高技术、高精度、高速度、高自动、高质量、高效率等特点，无一不是通过数学模型和数学方法并借助计算机的控制来实现的.

美国一名科学院院士指出："数学是一种关键、普遍、可以应用的技术.""数学对由研究到工业领域的技术转化，对加强竞争力是有重要意义的.""计算和建模重新成为中心课题，它们是数学科学技术转化的主要途径."数学产生计算机，计算机影响数学发展，使数学的作用更加突出.

把计算机技术与数学建模在知识经济中的作用比喻为如虎添翼是恰如其分的. 数学按其纯粹性的分布如图 1.1 所示.

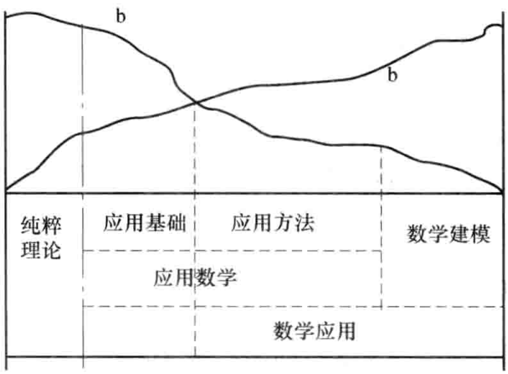

图 1.1

应用数学的基本使命是把纯数学获得的成果和方法应用于实践，具体地说是应用于科技和社会，以最终服务于人类. 但纯粹数学是量化的、符号化的和抽象化的东西，而客观世界不是以量的形式存在的，不是直接以逻辑符号形式存在的，即使抽象（无形）事物也不是以数学语言反映在人们脑子里的，这就决定了纯数学与纯实践之间虽然有“逻辑”把它们联系起来，但从形式上看，除此之外，似乎两者都是矛盾的. 应用数学的任务就是要把这一对“矛盾”的、完全不同的对象结合起来，而且是逻辑地结合，这一点谈何容易，它是应用数学（也是数学应用）面临的“二难”问题.

1.1.2 数学教育

小学—中学—大学：主要是教“算数学”，教数学问题的求解.

解决问题的步骤为：实际问题——建立模型——解决数学问题——应用，过去如何把实际问题转化为数学模型讲得甚少，数学建模却是解决实际问题最为关键的一步.

1.2 传统数学与数学建模的区别

1.2.1 数学教育应该培养学生两种能力

数学教育应该培养学生的两种能力是“算数学”（计算、推导、证明）和“用数学”（实际问题建模及模型结果的分析、检验、应用）；传统数学教学体系和内容偏重前者，忽略后者；数学建模引入教学是在不打乱现有体系下的教改实验，数学建模就是要培养学生“用数学”的能力，同时探索数学教学改革的途径，通过数学建模的训练，能够培养学生的创新精神，提高学生综合素质.

1.2.2 数学建模课程的特点

内容的实用性：教材的内容来自于实际.

知识的广泛性：依赖于各方面的基础知识.

内容的趣味性：有些问题就像是做游戏，引人入胜.

教学方式的多样性：教师讲授方式，小组讨论方式，学生报告方式，课堂教学方式，课外教学方式等.

1.2.3 教学目的

培养学生运用数学思想解决实际问题的综合能力.

（1）“双向翻译”能力.

(2) 运用数学思想进行综合分析的能力.

(3) 结合其他专业(特别是计算机和合适的数学软件,如 Matlab)解决问题的能力.

(4) 面对复杂事物的洞察力、想象力以及创造力.

(5) 提高文献资料的收集能力及撰写科技论文的文字表达能力.

(6) 团结协作的精神和进行协调的组织能力.

数学建模就是一种翻译,把我们平常生活里的现象、难题用数学语言说出来.就像中国人和英国人要交流,就要知道汽车对应着 car. 为什么要做这个翻译呢?因为生活太复杂了,不如数学符号那么简练,而且这么多年,数学家们用这些符号抽象了很多解决问题的方法,我们可以用,这样就比较容易找到生活中不容易找到的解决难题的点子了.

1.3　建立数学模型的方法和步骤

1.3.1　原型与模型

原型(Prototype)和模型(Model)是一对对偶体. 原型是指人们在现实世界里关心、研究或从事生产、管理的实际对象. 在科技领域通常使用系统(System)、过程(Process)等词汇,如机械系统、电力系统、生态系统、生命系统、社会经济系统,又如钢铁冶炼过程、导弹飞行过程、化学反应过程、污染扩散过程、生产销售过程、计划决策过程等. 本书所述的现实对象、研究对象、实际问题等均指原型. 模型则指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物.

这里特别强调构造模型的目的性. 模型不是原型原封不动的复制品,原型有各个方面和各种层次的特征,而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面和层次.一个原型,为了不同的目的可以有许多不同的模型. 如放在展览厅里的飞机模型应该在外形上逼真,但不一定会飞. 而参加航模竞赛的模型飞机要有良好的飞行性能,在外观上不必苛刻. 至于在飞机设计、试制过程中用到的数学模型和计算机模拟,则只要求在数量规律上真实反映飞机的飞行动态特性,并不涉及飞机的实体.所以模型的基本特征是由构造模型的目的决定的.

1.3.2　数学模型

1. 什么是数学模型

其实我们早在学习初等代数的时候就已经碰到过数学模型了. 当然其中许多问题是老师为了教会学生而人为设置的. 譬如你一定解过这样的“航行问题”:

甲乙两地相距 750 千米,船从甲到乙顺水航行需 30 小时,从乙到甲逆水航行需 50 小时,问船速、水速各为多少?

用 x,y 分别代表船速、水速,可以列出方程:

$$(x+y)\times 30=750$$
$$(x-y)\times 50=750$$

实际上，这组方程就是上述航行问题的数学模型. 列出方程，原问题已转化为纯粹的数学问题. 方程的解 $x=20$ 千米/小时，$y=5$ 千米/小时，最终给出了航行问题的答案.

当然，真正实际问题的数学模型通常要复杂得多，但是建立数学模型的基本内容已经包含在解这个代数应用题的过程中了. 那就是：根据建立数学模型的目的和问题的背景作出必要的简化假设（航行中设船速和水速为常数）；用字母表示待求的未知量（x，y 代表船速和水速）；利用相应的物理或其他规律（匀速运动的距离等于速度乘以时间），列出数学式子（二元一次方程）；求出数学上的解答（$x=20$，$y=5$）；用这个答案解释原问题（船速和水速分别为 20 千米/小时和 5 千米/小时）；最后还要用实际现象来验证上述结果.

一般地说，数学模型可以描述为：对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构.

2. 数学建模就是利用数学方法解决实际问题的一种实践

数学建模即通过对实际课题进行抽象、简化、假设、引进变量等处理过程后，将实际问题用数学方式表达，提炼出并建立起数学模型，然后运用先进的数学方法及计算机技术进行求解和仿真，最终对实际问题进行解释、改进的过程. 整个数学建模过程包括模型建立、求解、分析和检验等环节. 数学建模其实并不是什么新东西，可以说有了数学并需要用数学去解决实际问题，就一定要用数学的语言、方法去近似地刻画该实际问题，这种刻画的数学表述就是一个数学模型，其过程就是数学建模的过程. 数学模型一经提出，就要用一定的技术手段（计算、证明等）来求解并验证，其中大量的计算往往是必不可少的，高性能的计算机的出现使数学建模这一方法得到了飞速的发展，掀起了一个高潮.

从实际问题到数学模型，又从数学模型的求解结果回到现实对象，数学建模的全过程可以表示为如图 1.2 揭示的现实对象和数学模型的关系. 一方面，数学模型

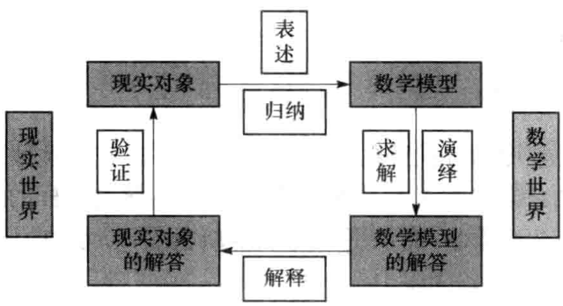

图 1.2

是将现象加以归纳、抽象的产物，它源于现实，又高于现实；另一方面，只有当数学建模的结果经受住现实对象的检验时，才可以用来指导实际，完成实践—理论—实践这一循环.

1.3.3　数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式分类，下面介绍常用的几种.

1. 按照模型的应用领域（所属学科）分

如人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、城市规划模型、水资源模型、再生资源利用模型、污染模型等. 范畴更大一些则形成许多边缘学科，如生物数学、医学数学、地质数学、数量经济学、数学社会学等.

2. 按照建立模型的数学方法（或所属数学分支）分

如初等模型、几何模型、微分方程模型、统计回归模型、数学规划模型等.

3. 按照模型的表现特征分

（1）确定性模型和随机性模型. 取决于是否考虑随机因素的影响. 近几年来随着数学的发展，又有所谓突变性模型和模糊性模型.

（2）静态模型和动态模型. 取决于是否考虑时间因素引起的变化.

（3）线性模型和非线性模型. 取决于模型的基本关系，如微分方程是否是线性的.

（4）离散模型和连续模型. 指模型中的变量（主要是时间变量）取为离散还是连续的.

虽然从本质上讲大多数实际问题是随机性的、动态的、非线性的，但是由于确定性、静态、线性模型容易处理，并且往往可以作为初步的近似来解决问题，所以建模时常先考虑确定性、静态、线性模型. 连续模型便于利用微积分方法求解析解，作为理论分析，而离散模型便于在计算机上做数值计算，所以用哪种模型要看具体问题而定. 在具体的建模过程中将连续模型离散化，或将离散变量视作连续的，也是常采用的方法.

4. 按照建模目的分

有描述模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等.

5. 按照对模型结构的了解程度分

有所谓白箱模型、灰箱模型、黑箱模型. 这是把研究对象比喻成一只箱子里的机关，要通过建模来揭示它的奥妙. 白箱主要包括用力学、热学、电学等一些机理相当清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题，这方面的模型大多数已经基本确定，还需深入研究的主要是优化设计和控制等问题了. 灰箱主要指生态、气象、

经济、交通等领域中机理尚不十分清楚的现象，在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做. 至于黑箱则主要指生命科学和社会科学等领域中一些机理(数量关系方面)很不清楚的现象. 有些技术工程问题虽然主要基于物理、化学原理，但由于因素众多、关系复杂和观测困难等原因也常作为灰箱或黑箱模型处理. 当然，白、灰、黑之间并没有明显的界限，而且随着科学技术的发展，箱子的“颜色”必然是逐渐由暗变亮的.

1.3.4 数学建模的基本方法

数学建模没有普遍适用的方法与技巧，但有一些普遍适用的思想方法与思维方式. 数学建模也可以说是一门艺术，具体的建模方法要靠自己在建模过程中不断体验、不断实践与总结.

一般说来建模方法大体上可分为机理分析法和测试分析法两种. 机理分析法是根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数量规律，建立的模型常有明确的物理现实意义. 测试分析法是将研究对象看作一个“黑箱”系统(意思是它的内部机理看不清楚)，通过对系统输入、输出数据的测量和统计分析，按照一定的准则找出与数据拟合得最好的模型.

面对一个实际问题用哪一种方法建模，主要取决于人们对研究对象的了解程度和建模的目的. 如果掌握了一些内部机理的知识，模型也要求具有反映内在特征的物理意义，建模就应以机理分析为主. 而如果对象的内部规律基本上不清楚，模型也不需要反映内部特性(例如仅用于对输出作预报)，那么就可以用测试分析.

对于许多实际问题还常常将两种方法结合起来建模，即用机理分析建立模型的结构，用测试分析确定模型的参数.

机理分析当然针对具体问题来做，不可能有统一的方法，因而主要是通过实例研究(Case studies)来学习. 测试分析有一套完整的数学方法. 我们所说的数学建模主要是指机理分析.

下面，我们主要给大家介绍一些数学建模过程中常用的一些数学思维方法.

数学建模过程是一种创新过程，在思考方法与思维方式上与其他课程有很大差别. 一般而言，数学的创新思维主要有类比思维、发散思维、猜测思维、归纳思维、逆向思维等等.

发散思维与猜测思维是创造性思维方式的重要组成部分. 面对新问题，我们应尽量打开自己的思路：不要轻易沿一条思路深入，不要轻易做出结论，尽量多一些想法，多一些猜测. 也就是说，在定下自己的思路前要思考、思考、再思考. 要注意不要轻易否定别人的意见，要有勇气怀疑一般的常识，要努力发现别人尚未察觉的事物与特征等.

帮助展开思路的常用方法有提问题法与关键词联想法.

当我们面临难题、束手无策时，可通过提出一系列问题来导出一些想法. 如我们经常可以从以下几个方面来提问题：

(1) 这个问题与什么问题相类似?

(2) 假如变动问题的某些条件将会怎样?

(3) 将问题分解成若干部分后再考虑又会怎样?

(4) 重新组合某些部分后又会怎样?

(5) 有无需要进一步完善的内容?

(6) 可否换一种数学工具来解决此问题?

关键词联想法是一种有效的发散思维方式,其主要步骤如下:

(1) 抓住问题或方案的关键词,不受任何约束地进行联想.

(2) 把联想到的内容用关键词的方式登记在卡片上,进一步激发产生新的想法,进一步想出新的主意.

(3) 再把积攒的卡片相互搭配,形成解决问题的初步思路与步骤.

1.3.5　数学建模的一般步骤(见图 1.3)

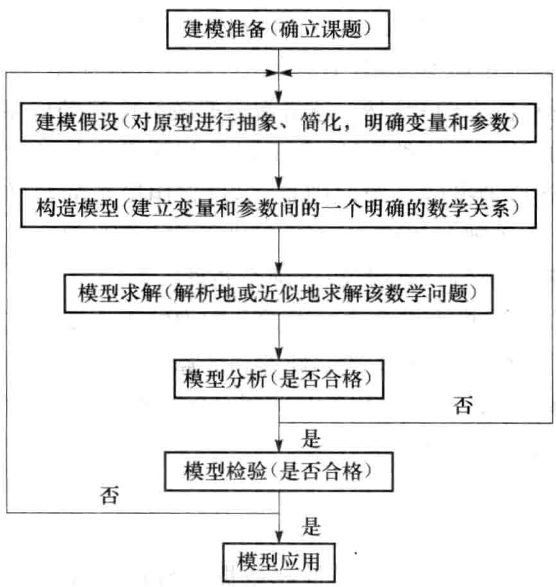

图 1.3

1. 建模准备

了解问题的实际背景,明确建模目的,搜集必要的信息,如现象、数据等,尽量弄清对象的主要特征,形成一个比较清晰的"问题",由此初步确定用哪一类模型.情况明才能方法对.在建模准备阶段要深入调查研究,虚心向实际工作者请教,尽量掌握第一手资料.

2. 建模假设

根据对象的特征和建模目的,抓住问题的本质,忽略次要因素,作出必要的、合

理的简化假设.对于建模的成败这是非常重要和困难的一步.假设做得不合理或太简单,会导致错误的或无用的模型;假设做得过分详细,试图把复杂对象的众多因素都考虑进去,会使你很难或无法继续下一步的工作.常常需要在合理与简化之间作出恰当的折中.通常,作假设的依据,一是出于对问题内在规律的认识;二是来自对现象、数据的分析,以及二者的综合.想象力、洞察力、判断力,以及经验,在建模假设中起着重要作用.如对一个一端挂有重物的细弦所形成的单摆运动建立数学模型,显然它规则的往返运动是主要因素,而重物的颜色及弦的粗细都可以忽略不计.再如,由 Kepler 和 Newton 发现的万有引力定律,把星球、物体简化成没有大小而只有质量的质点,再应用物理规律和数学推导而得到.万有引力定律正是发射卫星、宇宙飞船(登月飞船)等空间飞行器的重要依据(当然在真正设计、研究宇宙飞船及其飞行轨道时必须考虑其质量、形状结构等因素,从而必须研究修正的数学模型).

3. 构造模型

根据所作的假设,用数学的语言、符号描述对象的内在规律,建立包含常量、变量等的数学模型,如优化模型、微分方程模型、差分方程模型、图的模型等.这里除了需要一些相关学科的专门知识外,还常常需要较为广泛的应用数学方面的知识.要善于发挥想象力,注意使用类比法,分析对象与熟悉的其他对象的共性,借用已有的模型.建模时还应遵循的一个原则是:尽量采用简单的数学工具,因为你的模型总是希望更多的人了解和使用,而不是只供少数专家欣赏.

理想的数学模型要尽可能满足以下两个条件:

(1) 模型的可靠性.模型在允许的误差范围内能正确反映该实际问题的本质.

(2) 模型的可解性.模型易于数学处理和计算.

事实上,构造模型时,可靠性和可解性同时做到最佳是很少的,一般地,是在可解性的条件下有满意的可靠性.

4. 模型求解

构造数学模型之后,根据已知条件和数据,分析模型的特征和模型的结构特点,设计或选择求解模型的数学方法和算法,然后编写计算机程序或运用与算法相适应的软件包,并借助计算机完成对模型求解.

不同数学模型的求解一般涉及不同的数学分支的专门知识,那么,在建立模型时尽可能利用自己熟悉的数学知识.另一方面,也应该具有在必要时针对问题学习一些新知识的能力.因为现实世界中许多问题如果仅靠单一的知识是无法解决的,而且现在计算机科学技术的发展为我们提供了强有力的辅助工具,如 Matlab 计算软件、LINGO 优化软件、SPSS 统计软件等.掌握几种数学软件,可以大大增强我们的解题能力.

许多数学模型往往是很复杂、很难的,有些模型的求解对数学提出了很多挑战

性强、能推动数学发展的问题，从数学解决的角度来看，不一定能在短时间内求得完全的解决，特别是在不能解析地（完全地）解决时，就先考虑近似求解，它常常包含两方面的含义：数值近似求解或从工程、物理上进一步对模型作简化（例如忽略高阶量等手段），使得解析或数值求解成为可能. 因而，在模型求解时需要很强的洞察力，有运用数学进行推导、计算、简化、分析、证明的能力，特别是能始终紧密结合所面对的实际问题来进行数学分析.

5. 模型分析

根据建模的目的要求，对模型求解的数字结果或进行稳定性分析，或进行系统参数的灵敏度分析，或进行误差分析等. 通过分析，如果不符合要求，就修改或增减建模假设条款，重新建模，直到符合要求. 如果通过分析符合要求，还可以对模型进行评价、预测、优化等方面的探讨.

6. 模型检验

把求解和分析结果翻译回到实际问题，与实际的现象、数据比较，检验模型的合理性和适用性. 如果结果与实际不符，问题常常出在模型假设上，应该修改、补充假设，重新建模，如图 1.3 所示. 这一步对于模型是否真的有用非常关键，要以严肃认真的态度对待. 有些模型要经过几次反复，不断完善，一个理想的数学模型往往是一个对数学建模步骤多次循环的结果.

7. 模型应用

模型应用是数学建模的宗旨，也是对模型的最客观、最公正的检验. 因此一个成功的数学模型，必须根据建模的目的将其用于分析、研究和解决实际问题，并充分发挥其在生产和科研中的特殊作用. 一个研究对象的数学模型往往都不是一成不变的，需要在实践的检验中不断提高、发展和完善.

应当指出，并不是所有问题的建模都要经过这些步骤，有时各步骤之间的界限也不那么分明，建模时不要拘泥于形式上的按部就班.

1.3.6　数学建模与能力的培养

(1) 开设数学建模课的主要目的是为了提高学生的综合素质，增强应用数学知识解决实际问题的本领.

(2) 数学建模实践的每一步中都蕴含着能力上的锻炼，在调查研究阶段，需要用到观察能力、分析能力和数据处理能力等. 在提出假设时，又需要用到想象力和归纳简化能力.

(3) 在真正开始自己的研究之前，还应当尽可能先了解一下前人或别人的工作，使自己的工作成为别人研究工作的继续而不是别人工作的重复，你可以把某些已知的研究结果用作你的假设，去探索新的奥秘. 因此我们还应当学会在尽可能短