



ZHONGXUE SHUXUE SIWEI JIAOXUE
YANJIU

中学数学思维教学 研究

罗敏娜◎著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

辽宁省教育厅

专著出版基金资助



ZHONGXUE SHUXUE SIWEI JIAOXUE
YANJIU

中学数学思维教学 研究

罗敏娜◎著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学数学思维教学研究 / 罗敏娜著. —北京: 北京师范大学出版社, 2012.6

ISBN 978-7-303-14025-1

I. ①中… II. ①罗… III. ①中学数学课—教学研究
IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 017688 号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com.cn>
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn

北京新街口外大街 19 号

邮政编码: 100875

印刷: 北京京师印务有限公司

经销: 全国新华书店

开本: 170 mm × 230 mm

印张: 10.5

字数: 189 千字

版次: 2012 年 6 月第 1 版

印次: 2012 年 6 月第 1 次印刷

定 价: 20.00 元

策划编辑: 胡 宇 责任编辑: 岳昌庆 胡 宇

美术编辑: 毛 佳 装帧设计: 李尘工作室

责任校对: 李 菡 责任印制: 李 啸

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

内容提要

数学与我们的生活密切相关，数学思维渗透于社会和生活的每一个角落，无时无刻不在影响着我们的行为和思维模式。学会数学思维，对于培养学生创新能力至关重要。本书是研讨教与学两个方面的，通过丰富教学的案例，阐明数学教学只有真正运用了数学思维训练的方法才能获得最佳的教学效果。本书对中学数学教学实现数学素质培养的目标有一定的作用，对中学数学教育工作者也会有一定的启发。

前 言

数学是中学教学中的一门最基础的学科。如同其他学科一样，其教育意义不仅在于本学科知识的掌握和应用，更重要的是反映在它有力地促进人的素质发展方面。它是人的文化修养中最深刻、最有效的部分之一。无论数学作为科学皇后的尊贵，还是作为工具的质朴，都是根源于数学具有得天独厚的地位，十分有利于给人以思维的启迪。

数学教育作为培养人的思维能力的过程，完全不是贫乏和枯燥的。相反，它是丰富多彩的，充满活力的。事实上，形式化的东西需要以非形式化的东西作为它的研究对象，而环绕着逻辑思维，有着许多似真的、形象性的思维作为支撑，因而它将给人以全面的思维训练。数学思维是一项极富挑战性的、对 21 世纪新一代素质的提高具有深远意义的事业。

随着我国思维科学研究的不断深入以及数学教育改革的向前推进，数学思维的研究已成为数学教育理论研究中的一个重要课题。作者在阅读大量数学家关于数学思维的著作和论文等的基础上，结合中学数学教学的实际情况，对中学数学思维和数学教育进行综合分析和深入研究。主要解决的问题是中学数学思维的内在本质，中学数学教学中数学思维能力的培养问题，从而找出数学思维的培养方法，以促进数学教学，使之更好地适应当前素质教育的需要。

本书共分七章内容，从数学思维的内容、特点及其与数学教学相关等方面较系统地论述了数学思维的有关问题。从中可以领悟：（1）数学思维是数学学习的灵魂，数学思维是数学教学的本质和规律性的反映；（2）数学思维既是数

学教学的目的，也是数学教学的手段。数学教学只有真正运用了数学思维训练的方法才能获得最佳的教学效果。此书对中学数学教学实现数学素质培养的目标有一定的作用，对中学数学教育工作者会有一定的启发。

本书是在本人多年来为本科生、研究生及教育硕士授课教学讲稿的基础上，整理修改而成的，既是教学的一个小结，也是向师长们及同仁学习的结果，其中第6章由沈阳师范大学任坤编写。本书在编写过程中也得到李忠海教授的热情指导，在此表示感谢。

目 录

第 1 章 思维与数学思维	(1)
1.1 思维的概念及本质	(1)
1.2 思维规律在数学教学中的表现	(4)
1.3 数学思维的概念及特性	(8)
1.4 数学思维的功能	(10)
第 2 章 数学思维的基本类型	(20)
2.1 逻辑思维和直觉思维	(20)
2.2 集中思维和发散思维	(23)
2.3 具体思维和抽象思维	(25)
2.4 孤立思维和网络思维	(28)
2.5 惯性思维和求异思维	(30)
2.6 单一思维和综合思维	(32)
2.7 再现性思维与创造性思维	(34)
第 3 章 中学数学思维的品质	(37)
3.1 数学思维的广阔性	(37)
3.2 数学思维的深刻性	(40)
3.3 数学思维的批判性	(42)
3.4 数学思维的灵活性	(43)

3.5	数学思维的组织性	(45)
3.6	数学思维的创新性	(47)
第4章	中学数学思维方法概论	(49)
4.1	观察与实验	(49)
4.2	比较、分类与系统化	(52)
4.3	归纳、演绎与数学归纳法	(54)
4.4	分析法与综合法	(60)
4.5	抽象与概括	(62)
4.6	一般化与特殊化	(65)
4.7	类比与映射	(67)
4.8	联想与猜想	(69)
第5章	中学数学思维培养的理论与方法研究	(76)
5.1	中学数学思维学生发展的特点研究	(76)
5.2	中学数学思维培养的一般策略研究	(79)
5.3	中学数学思维培养的一般方法研究	(89)
5.4	中学数学创造性思维能力培养的特殊方法研究	(100)
第6章	中学数学问题解决的思维策略研究	(112)
6.1	中学数学思维策略研究	(112)
6.2	中学数学思维策略应用案例分析	(121)
第7章	以中学数学思维训练为核心的教学模式设计	(133)
7.1	体现思维能力培养的数学知识教学模式设计	(135)
7.2	体现思维能力培养的数学解题教学模式设计	(148)
主要参考文献		(160)

第1章

思维与数学思维

中学数学教学是以培养学生数学素质为根本目标，良好的思维素质是数学素质的核心内容，所以当今中学数学教育把发展学生良好的思维素质提高到了应有的地位。爱因斯坦曾说过：“单纯的专业知识灌输，只能产生机器，而不可能造就一个和谐发展的人才。”因此在深化教学改革的今天，培养学生的数学思维能力已迫在眉睫。为了研究中学数学思维与数学教学的有关问题，我们首先对思维和数学思维的有关基本问题作简单的回顾和分析，以此作为我们进一步研究的基础。

1.1 思维的概念及本质

科学发展史是一部人类思维的发展史。近几年来，随着知识经济的发展，信息符号的大量增加，对人脑能力的要求也更高了。于是，思维科学便应运而生。如今，思维问题已渗透到心理学、哲学、逻辑学等诸多学科。然而，思维究竟是什么？

1.1.1 思维的概念

思维对人来说既熟悉又神秘：熟悉是因为能意识到自己的思维；神秘是因为人的思维各不相同。它对人的生活有着重要的影响，人也难以捕捉别人的思维活动。

对于思维的概念，科学家们从科学理论的不同层次和不同水平作了深入的

研究。下面 6 种结论对于正确理解思维的含义有着非常重要的意义。

1. 从哲学的认识论角度来看,思维过程不是认识过程的全部,而是它的一部分,即在人脑中展开的、对事物理性研究的过程。因此,思维是指理性认识,是感性认识的概括和上升。

2. 从思维科学的角度分析来看,作为理性认识的思维可以分成三种,即抽象(逻辑)思维、形象(直感)思维和特异思维(包括灵感思维、特异感知和特异致动中的思维);或者分为逻辑思维、形象思维和直觉思维三种类型。

3. 从心理学的角度研究来看,认为思维是人意识活动的产物,意识是人脑对客观存在的物质世界的能动反映。而思维和语言是意识的核心。意识又可分为显意识与潜意识。直感是显意识,而灵感是潜意识。

4. 从人类认识发展的历史来看,形象思维先于语言,也先于抽象思维;只是抽象思维靠语言,形象思维不靠语言;形象的感知是只可意会,不可言传的。

5. 现代脑科学研究的最新成果表明,人的大脑左右两半球各有不同的功能:左半球是语言中枢,主管语言和抽象思维;右半球则主管音乐、绘画等形象思维材料的综合活动。美国加利福尼亚理工学院的斯佩里教授等关于“割裂脑”的研究,证实两个半球可以分别进行相当独立的思维活动。这就为形象思维理论提供了坚实的科学依据。

6. 现代认知心理学认为,思维是人的信息加工过程(如图 1-1)。



图 1-1

信息加工的基本过程有三类:问题解决、模式识别和学习(即信息的获取和存储)。

综上所述,思维是具有意识的人脑对客观事物的本质属性和内部规律性进行概括的间接反映。思维以感知为基础而又超越于感知的界限,是认识过程的高级阶段。思维以场的形式存在,通过复杂的中介和不同的方式进行信息加工,以获得关于客观事物的特性、联系和关系的知识。它既是高级的神经生理活动,也是复杂的心理操作,是一个动态的关联系统。

例如，一个人早晨起来，望到外面的地湿了，草木的叶子也湿了，他就能得到“昨天晚上下雨了”的论断。他并未直接看到雨，而是依据他看到的地面、草木变湿的事实，作出推理，得出结论。这就是人通过思维活动间接地认识到雨。

从上面的论述可知，不同层次、不同方面的研究得出思维的概念是不同的。从心理学角度来看，思维就是人脑对客观事物的本质、相互关系及内在规律性的概括和间接反映。它概括为两个方面：一是能反映，即反映事物的个别属性、个别事物及其外部联系，属于感性认识；二是有意识，即在反映客观世界的过程中，人脑具有主动性和能动性。

1.1.2 思维的本质

人类能够认识世界，掌握事物发展的本质及规律，从而改造世界。这与人类的思维是分不开的。人脑可产生意识，而动物没有意识。所以说，用意识武装起来的头脑能反映事物共同的本质属性和事物内在的必然联系，属于理性认识。这就是思维的直接本质。

思维的本质是人的意识对客观事物的特性、联系和关系的概括的和间接的反映。这种反映包括两个侧面，即纵向反映和横向反映：纵向反映是指对同一事物或同一过程的特性的反映；横向反映是指对事物之间或过程之间的联系和关系的反映。

例如，在对三角形的认识中，人们感知到的是三角形的形状和大小，而思维则舍弃它的形状和大小等特征，而把任何三角形理解为“都具有的三条边和三个角”这一共同的本质特征概括出来。因此，人的思维实现着从现象到本质、从感性到理性的转化，使之达到对客观规律、事物的理性认识，从而构成人类认识的高级阶段。

1.2 思维规律在数学教学中的表现

思维规律是客观世界的数量关系与空间形式的规律在人们头脑中的反映，也是人类在实践过程中认识的，又在实践中反复验证过的结果。所以，我们的思维过程，必须遵循思维的基本规律。虽然思维的基本规律已是大家所熟知的知识，但它在数学中却有着特殊的表现形式。下面具体说明四个思维规律在数学教学中的表现。

1.2.1 同一律

同一律的基本形式是“ A 就是 A ”。也就是说，人们在思考某一对象的过程中对象必须始终保持一致，不能用另外的对象来代替。在数学中存在大量概念的隐含发展，使同一律的应用产生困难。

同一律对数学教学中的思维有一定的指导意义，一是思维的对象必须保持同一性；二是表示同一事物的数学概念必须同一。即在思维过程中，所考察的数学对象必须确定，并始终如一，不能中途变更；以同一的数学概念表示同一个思维对象，不能用不同的数学概念表示同一个事物，也不能把不同事物混同起来用同一个数学概念表示。

在数学思维过程中，如果违反同一律的逻辑错误，就会造成思维混乱，前后不一。具体表现在：

1. 同一思维过程中，概念不确定的逻辑错误。所谓概念不确定是指概念的内涵、外延不同一。也就是说，在同一思维过程中，不加说明地用一个完全不同的概念去代替原有的概念进行推理和证明，或者用一个相近、类似的概念去代替原有的概念进行推理和证明。

2. 同一思维过程中，判断不确定的逻辑错误。判断不确定是指判断的组成部分不同一，即在同一思维过程中，不加说明地用一个完全不同的判断去代替原有的判断。

下面我们用一个例子来说明违反同一律而造成错误结论。

例如，“整除”的概念是说，“整数 a 除以整数 b ，除得的商正好是整数而没有余数，就说 a 能被 b 整除”。这一概念的组成是：①被整数是整数；②除数是整数；③商是整数；④余数是 0。

因此，由 $45 \div 9 = 5$ ，商是整数，余数是 0，从而可以判定 45 能被 9 整除。

但是由 $4.5 \div 0.9 = 5$, 商是整数, 余数是 0, 也断定 4.5 能被 0.9 整除就错了.

这是由于前一个判断与其组成部分是同一的, 而后一个判断与其组成部分不同一, 即被除数和除数不是整数和自然数. 因此, 后者是错误的判断, 其根本原因是混淆了“整除”与“除尽”这两个不同的概念.

同一律要求的同一是对象、时间、关系三者的同一. 在思维中, 一方面要求数学关系必须如实反映客观事物关系, 受到实践的检验; 另一方面要求思维过程对于同一事物保持同一认识.

1.2.2 矛盾律

矛盾律的形成是“ A 不是非 A ”. 也就是说, 在思考某一对象的整个过程中, 这个对象不应该被看做与它本身不同的其他对象. 它要求一种思想不能自相矛盾, 违反这个要求的逻辑错误就叫自相矛盾. 在数学中, 大量的对立统一的知识使矛盾律呈现出丰富多彩的形式.

例如, “ a 是正数”和“ a 是负数”, 它们是不相容的. 如果其中一个判断是对的, 那么另一个判断一定是错的. 但是, 反之, 假如其中有一个判断是错的, 却不能由此肯定另一个判断必然是对的(或许也是错的). 如 $a=0$. 它既不是正数, 又不是负数, 而是中性数. 因此, 矛盾律要求我们在同一时间内和同一关系下, 不能既肯定又否定同一个对象. 也就是说, 不允许互相矛盾的两个判断同时存在. 至于互相矛盾的两个判断, 哪一个是错误的; 矛盾律本身并不能解决这个问题. 所以矛盾律只能指出互相矛盾的两个判断不能相容, 但不能指出哪个判断是正确的, 哪个判断是错误的.

可以看出, 矛盾律是同一律的否定形式, 它们是互相联系在一起的. 同一律的意义在于保证我们思维的确定性, 而矛盾律的意义在于使同一律所表现的思想进一步展开, 并得到反证. 这就是说, 矛盾律是从否定的方面加强同一律的意义. 如果我们认为同一律是一切肯定判断的逻辑基础, 那么矛盾律就是所有否定判断的逻辑基础.

1.2.3 排中律

排中律的形式是“ A 或者是 B , 或者非 B ”. 就是说, 对于同一对象在同一时间和同一关系下, 或者肯定某一判断, 或者否定某一判断, 二者之中必有一个是正确, 没有第三种情况存在. 排中律是反证法的逻辑基础. 当直接证明某一判断的真实性有困难时, 根据排中律, 只要证明其矛盾判断为假就可以了.

数学中的灵活性有时会使排中律力不从心. 例如, 模糊数学的发展, 打破了非此即彼的教条, 从更高的层次说明了排中律.

例如, 在同一平面内不重合的两条直线, 不是相交就是平行, 二者必有一个成立, 没有其他居中情况.

根据排中律, 两个对立的矛盾判断, 必有一个是正确的, 一个是错误的, 既不能两个都正确, 也不能两个都错误. 因此, 可由其中一个是正确的, 便可断言另一个是错误的; 反之, 由其中一个是错误的, 便可断言另一个是正确的. 排中律强调“非此即彼”, 保证了思维的清晰性. 但是, 究竟哪个判断正确, 哪个判断错误, 排中律本身并不能解决. 违反排中律就会混淆其词, 模棱两可.

由此可知, 排中律和矛盾律的基本作用是相同的. 也就是说, 都是排除矛盾. 不同的是, 矛盾律在对立性或对抗性的矛盾以及对照性或对比性矛盾中都起作用, 而排中律只在对立性或对抗性矛盾中起用. 对照性或对比性矛盾的特点是: 两个互相矛盾的性质的总和, 并不包括某一对象的某种属性的全部, 而可能存在第三种情形.

排中律和矛盾律除了上述区别外, 还有一点不同. 根据排中律, 在两个对立性或对抗性的矛盾判断中, 不仅可以由其中一个判断的正确确定另一个判断的错误(即由真推假), 而且反过来, 也可以由一个判断的错误确信另一个判断的正确(即由假推真). 但是, 矛盾律就不具有这种特性. 根据矛盾律, 在两个对照性或者对比性的矛盾判断中, 只能由真推假, 而不能由假推真.

1.2.4 充足理由律

充足理由律的形式是“所以有 B 是因为有 A ”, 其中 A 叫做理由, B 叫做结论. 任何一个判断, 前提必须真实, 推理必须符合逻辑规律. 这样, 结论才能符合客观实际. 虽然数学中的所有结论就是根据已知条件和若干定理进行论证的结果, 但合情推理是在不满足充足理由律基础上的.

在数学学科中, 充足理由律要求我们必须以数学的已知概念和公理以及由此推导出来的定理、公式作为依据进行推理判断. 解答数学问题进行正确判断也必须有充足的理由, 否则造成错误. 违反充足理由律的逻辑错误是“理由不充分”或“虚假理由”.

在数学里, 我们学过的公理、定义、定理、公式等都可作为论证的依据. 例如, “对顶角相等”的理由是“同角的补角相等”. 可是, “同角的补角相等”的

理由是“凡平角都相等”，而它的理由是“凡平角都能叠合”，而“平角能叠合”的理由又是“过两点能引且只能引一条直线”。这个最后的理由是来自客观世界中空间形式的抽象，也就是公理，即数学论证中最原始的理由。可以作为判断和论证的充足理由有三个来源：一是明显的事实，例如“四边形有四条边”；二是公理，例如几何中平行公理、或数中的等量和不等量公理等；三是规律，例如数学中已被证明的定理、公式等。

充足理由律是客观事物因果关系的反映，一切事物或现象的发生，都有其客观原因，绝不是偶然的。因此，在思维过程中，应当遵守充足理由律。每当我们对某一对象作出正确的判断，或者根据已有的判断作出新的判断时，必须以因果关系的原则为基础，找出充足的理由，作出论证的根据。由此可见，充足理由律是正确判断和正确论证的逻辑基础。

1.2.5 思维规律之间的关系

思维的四条基本规律之间有着相互密切的联系，都是保证思维正确的必要条件，它们在同一思维过程中对同一事物分别从不同角度来要求人们的思维具有相对的稳定性。

排中律与矛盾律既有区别又有联系。矛盾律不容许有逻辑矛盾存在，指出互为否定的判断不同真；排中律则进一步指出在相互矛盾的判断中必有一是真。因此，排中律可看成是矛盾律的继续。

客观世界是矛盾的世界，我们的思维如实地反映客观事物的矛盾，并不违反矛盾律与排中律。矛盾律与排中律只排除思维中的逻辑矛盾，并不否认客观事物自身的矛盾性。

充足理由律与前面三个规律也有着密切的关系。前面三个规律是为了保持一个判断(或概念)本身的确定性和无矛盾性，充足理由律则是为了保持判断之间的联系有充分根据。如果违反了同一律、排中律和矛盾律，那么就必然违反充足理由律。

综上所述，四种基本规律无疑是思维的根本准则，但在数学科学的发展和学习中，从不同的侧面表现出了数学教学中思维过程的特性。数学并不是违反思维规律，而是可以为逻辑思维提供更加丰富的表现和更高层次的逻辑回归。

1.3 数学思维的概念及特性

数学的内容一般是对现实的抽象,包括空间形式、数量关系、结构关系等。人的思维用于数学上就是数学思维。在生活中的思维一般可以用语言或图形的形式来表达,也有时候是只可意会,不可言传的;数学思维用语言表达有时候也很困难的,但一般可以用数学的语言进行表达,语言也是数学思维的最重要的媒介。

1.3.1 数学思维的概念

数学思维是人脑和数学对象(空间形式、数量关系、结构关系)交互作用并按照一般思维规律认识数学内容的内在理性活动。它具有一般思维的根本特征,但又有自己的个性。主要表现在思维活动方面,是按照客观存在的数学规律的表现方式进行的,即具有数学的特点和操作方式,特别是作为思维载体的数学语言的简练、准确和数学形式的符号化、抽象化、结构化倾向。

1.3.2 数学思维的特性

数学学习或研究应该看成是数学思维过程和数学思维结果这二者的综合,因而可以说,数学知识是数学思维活动的产物。作为数学知识体现,数学成果具有内容和表现形式的抽象性、结构的精确性、推理和结构严谨的逻辑性,以及其结果在生产、生活和科研文化领域中应用的广泛性等特征。数学思维的主要特性可以概括为思维的概括性、问题性、相似性。

1. 数学思维的概括性

数学思维的概括是由于数学思维能揭示事物之间抽象的形式结构和数量关系这些本质特征和规律,能够把握一类事物共有的数学属性。思维的概括性还在于它的迁移性,就是使主体不仅能从部分事物相互联系的事实中推知普遍的与必然的联系,而且能将这种联系推广到同类现象中去,即应用已知的数学关系去解决有关问题。数学思维的概括性与数学知识的抽象性是互为表里、互为因果的。概括水平能够反映思维活动的速度、广度、深度、灵活性迁移的程度及创造程度,因此,提高主体的数学概括水平是发展数学思维能力的重要策略。数学思维模式的形成、数学思维方法的获得是数学思维概括性的表现。

2. 数学思维的问题性

数学思维的问题是与数学知识的问题性相联结的。数学的起源和发展是由

问题引起的. 古代结绳计数是为了解决生产与生活用品的多少问题, 我国秦汉时期的数学著作《周髀算经》和《九章算术》就是当时的数学家解决实际问题成果的汇集. 萌芽于古埃及的几何学, 也是从解决尼罗河流域的土地测量问题而产生、以后在古希腊发展起来的. 由于数学思维就是解决数学问题的心智活动, 数学思维总是指向于问题的变换, 表现为不断的提出问题、分析问题和解决问题, 而使数学思维的结果形成问题的系统和定理的序列, 达到掌握问题对象数学特征的关系结构的目的, 进而形成数学文化. 因此, 问题性是数学思维目的性的体现, 解决问题的活动是数学思维活动的中心. 数学解题的思维过程是数学问题的变换过程; 数学问题的推广、引申和应用过程是新的数学问题发现、解决的过程, 也是数学思维的深化过程和数学知识、数学文化的发展过程.

3. 数学思维的相似性

数学思维的相似性是思维相似律在数学思维活动中的反映. 数学思维的相似性是普遍存在的一个重要特性, 特别是在创造性思维活动中发挥着积极促进作用. 在数学科学发展史上, 数学知识的发现存在着相似现象. 例如, 我国数学家秦九韶和外国数学家海伦先后独立地发现了三角形面积公式, 数学家牛顿和莱布尼茨几乎同时独立地发现了微分方法. 数学的发展就其思维活动的规律而言, 是对各种数学模式的探求. 解决数学问题的根本思想在于寻求客观事物的数学关系和结构模式, 从已解决的问题中概括出思维模式, 再用模式去处理类似问题, 并进而形成新模式, 构成相似系列, 即各种概念、命题与方法的相似链. 数学思维的相似性是对数学问题以及问题本身的条件和结论之间同与异这些矛盾的分析和转化.

数学思维的三个特性是相互联结的. 概括性、相似性寓于问题性之中, 概括性是问题性和相似性的基础, 相似性是概括性和问题性本身及相互间的联系. 在数学教学中我们应自觉地加以运用, 提高学生的解决问题能力.