ADVANCED MATHEMATICS

高等数学［上］

主　编　朱士信　唐　烁
副主编　宁荣健　任　蓓　殷志祥

高等教育出版社

高等数学［上］

GAODENG SHUXUE

主　编　朱士信　唐　烁
副主编　宁荣健　任　蓓　殷志祥

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书分为上、下两册。上册主要内容为函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数微分学的应用、一元函数积分学、一元函数积分学的应用、常微分方程。本书结构严谨、条理清晰、语言通俗易懂、论述简明扼要、例题与习题难度适中且题型丰富。全书纸质内容与数字化资源一体化设计，紧密配合。数字课程按照“重基础、强练习、拓视野”的原则设计资源，涵盖课程介绍、教学大纲、电子教案、微视频、概念解析、典型例题解析、归纳总结、自测题、数学家小传等板块，在提升课程教学效果的同时，为学生学习提供思维与探索的空间，便于学生自主学习。

本书可作为高等学校非数学专业的高等数学教材，也可作为科技工作者学习微积分知识的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 朱士信，唐烁主编. — 北京：高等教育出版社，2014.8

ISBN 978-7-04-039681-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… ②唐… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第112927号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 李晓鹏　封面设计 张雨微　版式设计 张雨微
插图绘制 尹文军　责任校对 陈 杨　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	20.5	版 次	2014年8月第1版
字 数	490千字	印 次	2014年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	38.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 39681-00
封面图片出处于『(c)IMAGEMORE Co., Ltd.』

前 言

随着社会的进步和科学技术的迅猛发展，数学已渗透到自然科学、工程、经济、金融、社会等各个领域，正日益成为各学科进行科学研究的重要手段和工具。高等数学（又称微积分）是近代数学的基础，是理工类、经济管理类等各专业的必修课。而信息技术在课堂教学中的广泛应用，不仅给传统的教学模式带来了一场革命，也对教育工作者的教学理念、学生的学习方法产生了革命性的影响，故建设一本满足高等教育教学需求，适应课程改革发展趋势的高等数学教材迫在眉睫。

在本书的编写过程中，编者结合多年的教学经验，吸收了国内外优秀教材的特点，结合学生学习方式改变的新趋势，与数字化媒体进行有机结合，以“纸质教材 + 数字课程”的方式对教材的内容和形式进行了整体设计。在教材的整体设计方面，主要体现以下思想：

1. 采用“纸质教材 + 数字课程”的出版形式。纸质教材与丰富的数字教学资源一体化设计，纸质内容精炼适当，通过正文设置旁白的方式，对教材内容进行补充说明、拓展讨论和归纳总结，以新颖的版式设计和内容编排，方便学生学习和使用。数字课程对纸质内容起到巩固、补充和拓展作用，形成以纸质教材为核心，数字教学资源配合的综合知识体系。

2. 创新教学理念，引导混合式教学和个性化自主学习。通过适当教学设计，鼓励教师将课堂教学和数字课程教学进行有机融合，鼓励学生拓展知识面和针对某些重要问题进行深入探讨，增加其独立获取知识的意识和能力，为教师创新教学方法和满足学生自主学习提供支持。

纸质教材的主要内容是根据教育部大学数学课程教学指导委员会制定的高等数学教学基本要求，并参照近年来《全国硕士研究生入学统一考试大纲》中高等数学部分进行编写的。纸质教材遵循创新、实用、通俗和满足不同层次学生需要的原则，具有以下特点：

1. 强化对学生直觉思维的培养，突出微积分中重要概念产生的实际背景，如几何背景、物理背景等，以便学生在学习过程中比较自然地接受这些重要概念，并加以深刻理解。

2. 将高等数学内容进行优化，如将不定积分与定积分糅合在一起，将微分方程与级数部分内容进行重新组合等，使整个内容安排紧凑、自然、简洁，使学生在学习过程中更好地了解各部分内容的内在联系。

3. 尽可能按照微积分历史发展的原貌介绍相关概念与理论，而不是严格按照各部分内容的逻辑体系来建立，这更加符合人们认识世界的客观规律。

4. 积极将教学研究成果吸收进来，如多元函数极值部分增加了判断多元函数极值与条件极值的充分条件，又如某些定理或公式采用与以往教材不同的证法。将教学与研究的新成果应用于教学，以便培养学生的创新能力。

5. 在每章结束设置了“本章概述”这一环节，目的是通过宏观的描述，使学生能够认清内容的实质，培养学生“既埋头拉车，又抬头看路”的意识。通过对本章内容的归纳与总结，突出数学思想和数学方法，培养学生的自学能力。

6. 注重与中学知识的衔接与后续课程的联系，如增加了极坐标，以例题方式介绍广义二重积分。

7. 注重用高等数学的基本思想与方法分析问题和解决问题，培养学生应用高等数学知识思维并处理实际问题的能力。

8. 适应不同教学时数的教学要求。书中对部分内容加 * 号，教师可以根据教学时数选择讲或不讲，有些内容用特殊字体标出，可供学生自学。

数字课程的教学资源以知识点为基础，紧密结合纸质教材内容，按照“重基础、强练习、拓视野”的原则，设置了课程介绍、教学大纲、电子教案、微视频、概念解析、典型例题解析、归纳总结、自测题、数学家小传等栏目，与正文相关知识点对应的数字资源类型及编号用标出。期望通过以上资源的设计和支持，帮助学生扎实数学基础、提高学习效率和学习能力、拓宽视野，同时帮助教师创新教学方法和教学活动，具体表现为：

1. 通过知识点的视频讲解、重要概念解析、典型例题分析、解题方法归纳总结等栏目，不断加强学生对基本概念、基本理论和基本方法的理解，提高学生分析和解决问题的能力，引导学生对知识进行独立的思考和总结。

2. 自测题包含选择、填空、判断三种题型，具有自动判解功能。通过在线自测，帮助学生适时了解自己对知识的掌握情况，进行有针对性的攻关学习，提高学习的效率。

3. 通过数学家小传等内容让学生在学习之余了解微积分的发展历史，了解数学家的研究工作和对数学的杰出贡献，增加学习的趣味性，拓宽学生的视野。

需要说明的是，我们在编写教材的过程中，特别注重继承与改革的关系。我们参考了大量的高等

数学和微积分教材以及相应的参考书，渴望将这些优秀教材长期形成的传统发扬光大，同时也将一些教学改革的成果吸收进来。在此谨向相关参考文献的作者表示深深的谢意！

我们真诚地感谢西安交通大学徐宗本院士对本书的认真审阅，徐院士对本书的编写提出了指导性的意见和大量宝贵的建议，使我们受益匪浅。

本书是在合肥工业大学全体数学教师的支持下编写完成的，其中数字课程的教学资源由唐烁、宁荣健、任蓓、刘植、吴磊、彭凯军、孙琳建设完成。本书的编写还得到了安徽工业大学、安徽理工大学数学教师的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中还有许多不足甚至错误之处，渴望得到广大专家、同行和读者的批评与指正。

编　者

2013.12

目 录

— 001 第 1 章 函数

001 1.1 函数的概念

007 1.2 函数的几种特性

010 1.3 初等函数

015 1.4 一些常用不等式和等式

018 1.5 极坐标简介

022 本章概述

023 总复习题一

— 025 第 2 章 极限与连续

025 2.1 数列的极限

031 2.2 函数的极限

036 2.3 极限的性质

041 2.4 无穷小、无穷大

047 2.5 极限的存在准则

054 2.6 函数的连续性

068 本章概述

069 总复习题二

— 071 第 3 章 一元函数微分学
071 3.1 导数的概念
081 3.2 求导的运算法则
089 3.3 高阶导数
093 3.4 隐函数与参数方程确定的函数的求导方法
100 3.5 函数的微分
107 本章概述
110 总复习题三

— 113 第 4 章 一元函数微分学的应用
113 4.1 微分中值定理
123 4.2 洛必达(L'Hospital)法则
132 4.3 泰勒中值定理
141 4.4 函数的单调性与极值
151 4.5 曲线的凹凸性与拐点
156 4.6 函数图形的描绘
160 4.7 导数在不等式证明中的应用
166 4.8 组合恒等式与相关变化率
169 本章概述
172 总复习题四

— 175 第 5 章 一元函数积分学
175 5.1 定积分的概念及性质
186 5.2 微积分基本定理与牛顿 - 莱布尼茨公式
195 5.3 不定积分的概念与性质
198 5.4 换元积分法
212 5.5 分部积分法
219 5.6 几种特殊类型函数的积分
228 5.7 反常积分

240 本章概述
241 总复习题五

— 245 第 6 章 一元函数积分学的应用
245 6.1 定积分的微元法
247 6.2 几何学中的应用
261 6.3 物理学中的应用
267 本章概述
267 总复习题六

— 269 第 7 章 常微分方程
269 7.1 常微分方程的基本概念
272 7.2 一阶微分方程的常见类型及解法
287 7.3 二阶线性微分方程理论及解法
301 7.4 其他若干类型的高阶微分方程及解法
311 本章概述
312 总复习题七

— 314 部分习题参考答案
314 附录 1 积分表
314 附录 2 高等数学第一学期期末考试卷
315 参考文献

第 1 章 函 数

在自然界中，有着许多变量，各种变量之间存在着千丝万缕的相互依存关系，函数就是对这些相互依存关系的一种抽象.在自然科学、工程技术，甚至社会科学中，函数都是被广泛应用的重要概念.高等数学是通过对函数的研究，揭示变量之间的内在联系.

本章主要介绍函数的基础知识及函数的特性，并根据课程的需要，介绍几个常用的不等式或等式.

1.1 函数的概念

1.1.1 函数的定义

定义 1.1.1 设 x 和 y 为两个变量，D 为一非空的数集，如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时，按照一定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，就称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量或函数. 函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数的值域.

微视频 1－1
函数的定义

函数概念的几个补充说明：

（1）函数 $y=f(x)$ 可比喻为一部“数值变换器”. 将 $x\in D$ 输入到数值变换器中，通过 f 的“作用”，输出来的就是 y 或 $f(x)$，不同的函数就是不同的变换器. 例如，对于函数 $y=x^2$，f 表示对 x 作平方运算，即将 x 输入到数值变换器中，通过 f 的“作用”，输出来的就是 x^2（图 1－1－1）.

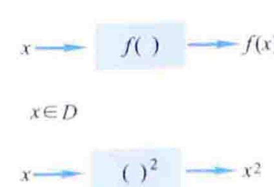

图 1－1－1

（2）函数的定义域是指使得函数有意义的自变量的取值范围. 确定函数的定义域，一般可分为两种情况：

其一，对于给出数学表达式的函数，可根据函数的表达式确定出其定义域. 例如函数 $y=\ln(1-x^2)$ 的定义域为 $(-1,1)$；又如，设函数 $y=f(x)$，

$x\in[a,b]$，表明 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$.

典型例题解析 1-1
求函数的定义域

其二，对于实际问题中遇到的函数，应根据问题的实际意义来确定其定义域. 例如，设某质点受外力作用，作加速运动，其运动方程为 $s=t^2$，其中 s 为运动路程，t 为运动时间. 由于在实际问题中，时间 t 总是非负的，故有 $t\geqslant 0$，因此 $s=t^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$.

(3) 如果两个函数的定义域相等，对应法则相同，就称此两个函数为同一函数. 例如，记正方形的边长为 x，其面积为 y，则有 $y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$. 由同一函数的概念，此函数与 $s=t^2$，$t\in[0,+\infty)$ 为同一函数. 由此可见，在同一函数中，自变量和因变量的符号表示可以不同，此情况在以后内容中会经常遇到.

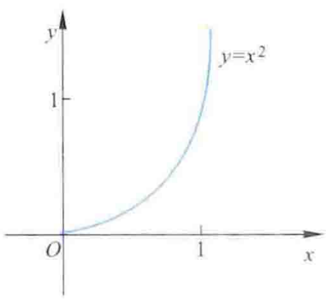

图 1-1-2

(4) 称平面点集 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形，$y=f(x)$ 称为 C 的方程. 例如，函数 $y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$ 的图形如图 1-1-2 所示，该图形为一条平面曲线.

(5) 在定义 1.1.1 中，由于对于定义域 D 中的每个元素 x，按照对应法则 f，只对应 y 的唯一一个数值，故此时函数 $y=f(x)$ 也称为单值函数. 例如函数 $y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$ 和 $y=\ln(1-x^2)$，$x\in(-1,1)$ 均为单值函数.

典型例题解析 1-2
求函数表达式

但是有时会出现这样的情况，按照某个对应法则 f，变量 x 的一个值对应变量 y 的多个值，此时函数 $y=f(x)$ 称为多值函数. 例如在 xOy 坐标面上，圆心在原点，半径为 1 的圆周方程为 $x^2+y^2=1$. 如果将"满足方程 $x^2+y^2=1$"作为变量 x 与变量 y 之间的对应法则 f，那么当 x 取 -1 或 1 时，对应 y 的取值为 0；但是当 x 在 $(-1,1)$ 内任取一个值时，y 就有 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 两个值与之对应，因此函数 $y=f(x)$，亦即 $x^2+y^2=1$ 为多值函数，其中 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$ 称为 $x^2+y^2=1$ 的两个单值分支.

1.1.2 几种常用的函数表示

函数可以用表格法、图形法、解析法(即算式表示法)等多种形式表示. 在本教材中，主要运用解析法表示函数.

下面给出几种常见类型的函数.

微视频 1-2
几种常见类型的函数

1. 分段函数

设 D_1, D_2 是两个互不相交的实数集合，$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是两个不同的表达式，称定义在集合 $D_1\cup D_2$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in D_1,\\ \psi(x), & x\in D_2\end{cases}$$

为分段函数.

分段函数体现了在 x 的不同取值范围，函数 $f(x)$ 有不同的对应法则. 事实上，分段表示还可以分成任意有限段，甚至无穷多段.

例 1.1.1　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$. 它的图形如图 1-1-3 所示.

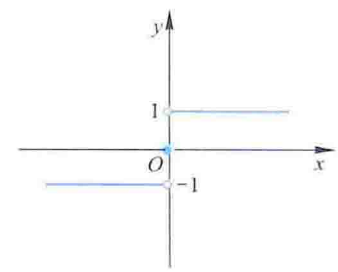

图 1-1-3

对于绝对值函数，我们有 $|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0\end{cases}=x\operatorname{sgn}(x)$，它的图形如图 1-1-4 所示.

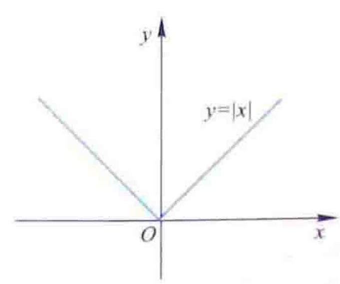

图 1-1-4

例 1.1.2　取整函数. 对于任意的实数 x，记 $[x]$ 表示取不超过 x 的最大整数，从而得到定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的分段函数

$$y=[x],$$

称此函数为取整函数，如

$$[2.1]=2,\quad [\pi]=3,\quad [-1]=-1,\quad [-1.5]=-2.$$

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是整数集 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，其图形如图 1-1-5 所示.

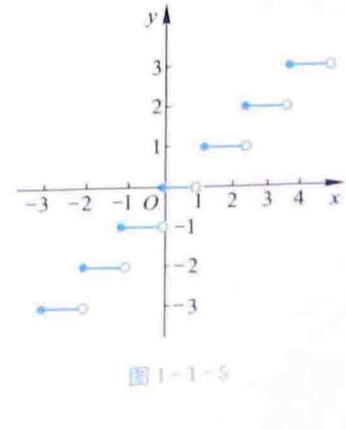

图 1-1-5

2. 隐函数

上述函数中，如 $y=x^2$, $x\in[0,+\infty)$, $y=\operatorname{sgn}(x)$, $y=[x]$ 等，有一个共同的特点：因变量 y 在等式的左边，而右边是自变量的表达式，这类函数称为显函数.

所谓隐函数，是指通过一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来确定变量 y 与 x

数学家小传 1-1
开普勒

之间的函数关系，其中 $F(x,y)$ 为 x,y 的一个表达式. 例如，圆心在原点，半径为 1 的圆周方程 $x^2+y^2=1$ 就确定了 y 是 x 的隐函数. 又如天体力学中著名的开普勒(Kepler)方程

$$y=x+\varepsilon\sin y \quad (其中\ \varepsilon\in(0,1)是常数)$$

就反映了变量 x 与 y 之间的特定关系. 虽然无法将 y 用 x 的表达式表出，但是以后会知道，y 是 x 的函数，因此开普勒方程就是这一函数关系的隐式表示形式，即 y 是 x 隐函数.

3. 参变量函数

在表示变量 x 与 y 的函数关系时，常常需要引入第三个变量(例如 t)，通过分别建立 x 与 t 和 y 与 t 之间的函数关系 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$，表达 y 与 x 的函数关系，这类函数称为参变量函数，其中 t 称为参数，即

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in I(I\ 为非空数集).$$

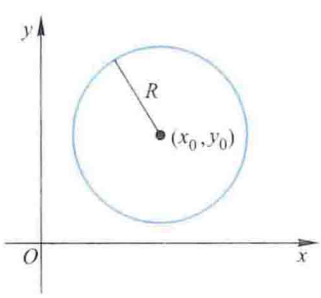

图 1-1-6

下面介绍高等数学中经常用到的几种曲线的参数方程及图形.

(1) 圆(图 1-1-6)

圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=x_0+R\cos t, \\ y=y_0+R\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$.

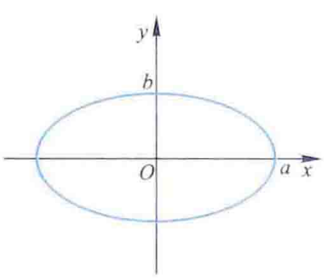

图 1-1-7

(2) 椭圆(图 1-1-7)

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$.

(3) 摆线(图 1-1-8)

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} \quad a>0, t\in[0,+\infty).$$

(4) 星形线(图 1-1-9)

$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta, \end{cases} \quad \theta\in[0,2\pi], \quad 或\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}, \quad 其中\ a>0.$$

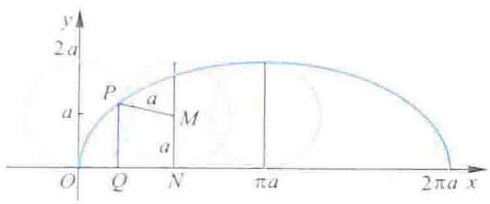

图 1-1-8

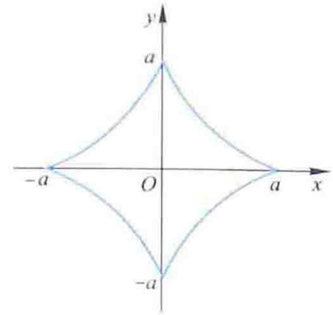

图 1-1-9

1.1.3 复合函数与反函数

在实际问题中，变量之间的关系是多样的. 通过函数的运算，可以从简单的函数来讨论复杂的函数. 函数的运算主要包括函数的四则运算、复合运算和反函数运算，其中函数的四则运算是大家已经熟知的了，因而在此仅讨论函数的复合运算和反函数运算.

1. 复合函数

在自由落体运动中，质点的运动速度 v 与时间 t 的关系是 $v=gt$，而质点的动能为 $M=\frac{1}{2}mv^2$，将 $v=gt$ 代入 $M=\frac{1}{2}mv^2$ 中，得

$$M=\frac{1}{2}mg^2t^2.$$

可见速度 v 在这里是起着桥梁的作用，称 v 是中间变量. 通过中间变量 v，建立了动能 M 和时间 t 的关系 $M=\frac{1}{2}mg^2t^2$，将两个函数复合为一个函数.

定义 1.1.2 设函数 $y=f(u)$的定义域为 U，函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D，且其值域是 U 的子集，因而 $y=f[\varphi(x)]$是定义在 D 上的函数，称之为以 $y=f(u)$为外函数，以 $u=\varphi(x)$为内函数的复合函数，变量 u 称为中间变量.

定义 1.1.2 中要求 $u=\varphi(x)$的值域是 U 的子集，其目的在于能确保 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$可以进行复合，否则就不能构成复合函数. 例如 $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合，因为表达式 $\ln(-x^2)$对任何实数 x 都没有意义.

例 1.1.3 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x>1, \\ x^2, & x\leqslant 1, \end{cases} \quad \varphi(x)=x-1,$$

求 $f[\varphi(x)]$和 $\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}\varphi(x)+1, & \varphi(x)>1,\\ \varphi^2(x), & \varphi(x)\leqslant 1,\end{cases}$ 而 $\varphi(x)=x-1>1$ 当且仅当 $x>2$,故有

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}x, & x>2,\\ (x-1)^2 & x\leqslant 2.\end{cases}$$

$$\varphi[f(x)]=f(x)-1=\begin{cases}x, & x>1,\\ x^2-1, & x\leqslant 1.\end{cases}$$

我们不仅要能够将若干个简单函数复合成一个复杂的函数，而且还要善于将复合函数“分解”为若干个简单函数，这一点在以后的求导数运算和求积分运算时将得到充分的体现. 例如，复合函数

$$y=2^{\cos(x^2+1)}$$

是由三个简单函数 $y=2^u$，$u=\cos v$，$v=x^2+1$ 复合而成的.

以上介绍的是两个函数产生的复合函数. 不难将复合函数概念推广到有限个函数产生的复合函数上去. 例如,三个函数

$$y=\sin u,\quad u=\sqrt{v},\quad v=2^x+1$$

产生的复合函数是

$$y=\sin\sqrt{2^x+1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

典型例题解析 1-3
函数的反函数

2. 反函数

在函数 $y=f(x)$ 中,x 是自变量,y 是因变量. 然而在同一过程中,两个变量之中哪个是自变量,哪个是因变量,并非绝对的,甚至有时根据需要,将对应关系反过来考察.

例如,设函数 $y=x+1$,其中 x 为自变量,y 为因变量. 如果从中解出 x,则有 $x=y-1$,此处 y 为自变量,x 为因变量,且对于每一个值 y,都有唯一的一个 x 与之对应,我们称 $x=y-1$ 为 $y=x+1$ 的反函数.

要注意的是，并不是所有的函数都有反函数. 由定义 1.1.3 知，函数 $y=f(x)$ 存在反函数的条件是 f 在 D 与 Y 之间建立了一个一一对应的关系. 例如，对于函数 $y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 中的每一个 $y(>0)$，均可得到 x 的两个值 $x=\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$ 满足 $y=x^2$，表明不具备一一对应关系，因此函数 $y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 没有反函数.

定义 1.1.3 设 $y=f(x)$ 为给定的一个函数,如果对其值域 Y 中的任一值 y,都可以通过关系式 $y=f(x)$ 在其定义域 D 中确定唯一的一个 x 与它对应,便得到一个定义在 Y 上的以 y 为自变量,x 为因变量的函数,称此函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$.

由同一函数的概念,也将 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$. 事实上,$x=f^{-1}(y)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 为同一函数. 需要注意的是,由于 $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y 具有相同的含义,因而它们的图形是同一条曲线. 而 $y=f^{-1}(x)$ 可视为是将 $x=f^{-1}(y)$ 中 x,y 交换后得到的,因此 $y=f^{-1}(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的(图 1-1-10).

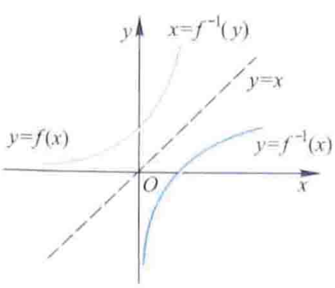

图 1-1-10

如果函数 $y=f(x)$ 有反函数 $x=f^{-1}(y)$,那么

$$f^{-1}[f(x)]=x, x\in D;\quad f[f^{-1}(y)]=y, y\in Y.$$

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$；　　(2) $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$；

(3) $f(x)=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}-\sqrt{1-x^2}$.

2. 下列各对函数是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}, g(x)=x^2-x+1$；　　(2) $f(x)=x\sqrt[3]{1-x}, g(x)=\sqrt[3]{x^3-x^4}$；

(3) $f(x)=1, g(x)=\csc^2 x-\cot^2 x$.

3. (1) 设 $f(x-1)=e^{x^2}$，求 $f(x)$；

(2) 设 $f(x)=\dfrac{2x-1}{3x+2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\varphi(x)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=2-x^2$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

网上更多…… 自测题 教学 PPT

1.2 函数的几种特性

1.2.1 有界函数

典型例题解析 1-4
函数的有界性

定义 1.2.1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，非空数集 $X\subset D$，如果 $\exists M>0$，使得对于 $\forall x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，就称函数 $f(x)$ 在 X 上(内)**有界**，或称 $f(x)$ 是 X 上(内)的**有界函数**.

如果上述 M 不存在，就称 $f(x)$ 是 X 上(内)的**无界函数**. 换言之，如果对于 $\forall M>0$(不论 M 多么大)，总 $\exists x_0\in X$，使得 $|f(x_0)|>M$，就称

$f(x)$在X上(内)无界,或称$f(x)$是X上(内)的无界函数.

例 1.2.1 证明$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

证 对$\forall M>0$,取$x_0=\frac{1}{M+1}\in(0,1)$,则有

$$|f(x_0)|=\frac{1}{x_0}=M+1>M,$$

故$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

注意,如果函数$f(x)$在X上(内)有上界(或有下界),则函数$f(x)$在X上(内)的上界(或下界)不唯一.

由定义1.2.1和定义1.2.2知,函数$f(x)$在X上(内)有界的充分必要条件为函数$f(x)$在X上(内)既有上界,又有下界.

定义 1.2.2 设函数$f(x)$的定义域为D,非空数集$X\subset D$,如果$\exists M$(或m),使得对于$\forall x\in X$,都有

$$f(x)\leqslant M \quad (\text{或 } f(x)\geqslant m),$$

就称函数$f(x)$在X上(内)有上界(或有下界),并称M(或m)为函数$f(x)$在X上(内)的一个上界(或下界).

1.2.2 单调函数

典型例题解析 1-5 函数的单调性

定义 1.2.3 设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I\subset D$,如果对于$\forall x_1$,$x_2\in I$,当$x_1<x_2$时,总有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

就称$f(x)$是区间I上(内)的单调增加函数(或单调递增函数),也称$f(x)$在I上(内)单调增加(或单调递增).如果对于$\forall x_1,x_2\in I$,当$x_1<x_2$时,总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

就称$f(x)$在I上(内)单调不减(或单调不增).

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

定理 1.2.1 单调函数必有反函数,其反函数也是单调函数,且具有相同的单调性.

证 只证明函数$y=f(x)$在I上(内)单调增加的情况.

设函数$y=f(x)$在I上(内)单调增加,因此f在I与$Y=\{y|y=f(x),x\in I\}$之间建立了一一对应关系,所以$y=f(x)$存在反函数$x=f^{-1}(y)$.