HIT

全国优秀数学教师专著系列

To Discover the Mathematical Essence With Inspiration

—National College Entrance Exam Mathematical Problems Study

数贝偶拾——高考数学题研究

蒋明斌 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国优秀数学教师专著系列

数贝偶拾——高考数学题研究

To Discover the Mathematical Essence With Inspiration

—National College Entrance Exam Mathematical Problems Study

蒋明斌 著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书汇集了有关高考数学题的解法、背景、推广等方面研究的论文25篇.这些高考数学试题构思独特、新颖别致、灵活深邃、内容广、内涵深.

本书适合于高中师生及广大数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高考数学题研究/蒋明斌著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.4

(数贝偶拾)

ISBN 978-7-5603-4555-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①蒋… Ⅲ.①中学数学课-高中-题解-升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第309939号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张9 字数168千字
版 次 2014年4月第1版 2014年4月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4555-0
定 价 28.00元

序言

中国社会科学院农村研究所研究员党国英认为:

> 冯小刚的电影《1942》触动了国人的神经.直到今天,集体饥饿的记忆还在严重地影响着国人的职业选择行为.人们把找工作叫找饭碗,把失业叫饭碗砸了.最好的工作不是自己认为最有趣的工作,而是最有保障的工作.相反,在农产品相对成本低,食物相对便宜的国家,例如美国,人们把吃饭不当一回事,便把兴趣作为职业选择的第一决定因素,如此创新潜力也就被更大地开发出来.

教师这个职业是一个相当古老的职业.这个职业中的很多人都是把它当作一个饭碗,但本书的作者蒋先生显然不是,他是把这项职业当成了一项事业来做,而且是很神圣的事业.微信中一位老农说得好:如果一件事,你今天做,明天还得做,那是工作;如果一件事,你今天做,明天还想做,那它就是事业.蒋先生做中学数学教育这件事,一做就是近30年,没有热爱,不视其为事业是很难坚持的.

在近30年的教学实践中，蒋先生边干边钻研发表了200多篇论文，而且大多发表在所谓的“核心期刊”上. 如北师大的《数学通报》，华中师大的《数学通讯》，华东师大的《数学教学》，天津师大的《中等数学》. 当然有些杂志现在早已停刊，如湖南教育出版社主办的由欧阳维城老先生担任主编的《数学竞赛》杂志，它是我国迄今为止，唯一一本专门刊登数学竞赛高端文章的杂志，因故停刊，着实可惜.

作家于坚曾说过：

> 专业首先要有量. 如果到今天还是“一本书主义”，这一百年就白过了. 专业精神正是资本主义最基本的一种精神. 这不是你愿不愿意接受的问题，它是你的命运，如果你不是一个工匠式专业的写作，那你的写作会被淘汰.

对于初等数学论文的写作来说：质和量缺一不可，没有一定的量就不会达到一定的质. 值得耐人寻味的是，如此高产的作者的知名度并不大，且仅限于圈内.

歌手朴树的父亲是北大教授叫濮祖荫，前些年他去做一次空间物理的讲座，主办方介绍，“这是朴树的爸爸.”下面二三十位研究生齐刷刷鼓掌. 这种事不只一次发生.

空间物理界的同行说：你现在没有你儿子出名了. 其实朴树的学历仅是高中毕业.

这就是中国目前的现状，中国年青人对周杰伦的喜爱和熟悉程度远远超过了华罗庚、陈省身、丘成桐. 虽然在大多数人的眼中这再正常不过了，但这绝对是中国的不幸. 不过对于热爱初数研究的蒋先生来说这可能倒是一件幸事. 在没有关注的环境中往往能研究出一点真正有价值的东西，自己认为自己成功就可以，或圈内同行认可就够了，何必再苛求社会的认可.

高晓松在2011年3月27日21:55发了一条微博：

> 其实没几个孩子长大真成功了，而且成功是命，无法教育. 所以最需要最实用的教育是：如何在没能成功的人生里随遇而安，心安理得地混过漫长的岁月而不怨天尤人. 这时候，那些“没用”的东西就变得弥足珍贵.

高晓松这里所说的“没用”的东西当然是指音乐，亦或还包括文学和艺术，对于痴迷数学的人来说，也包括数学(非应试类).

蒋先生的初数研究面很宽，题材很多，但笔者认为不等式是其中的精华，不等式的本质是排序. 相信许多人都听到过这样的说法：泼洗澡水时不要把婴儿一起泼了出去(Don't throw the baby out with the bath water). 老实讲我们最初听到这种表述时，就觉得疑点甚多. 婴儿怎么会如此之脏？洗澡水会混浊得连

孩子在里面也看不清吗？天下竟有这么粗心大意的家长？留美经济学博士，中央电视台女播音员李瑞英之夫张宇燕研究员给出了一个专业解释，他认为：此“典”不仅有出处，而且从“逻辑上”推测，恐怕还有相当多的经验基础呢！

据说在1 500年以前，绝大多数的英国人一年之中只是在5月洗一次澡．那时候洗澡这项相当奢侈的“服务”，是一家人在盛满热水的大盆里按“长幼尊卑”的顺序共同享用的．入浴时家中的男性长者为先，其次是成年男子，接下来为妇女，然后才轮到孩子们．依此次序，最后一位洗澡的应是家中年龄最小的成员，而且很可能就是一两岁的婴儿．当时的欧洲家庭规模都不小，经过一年时间人的肮脏程度不难想象，根据分工给婴儿洗澡的活儿大多由妇女承担，而倒水这样的重体力活则由家中的壮劳力干．“能见度”很低的洗澡水恰好又赶上天色较暗，即使不太粗心的父亲或叔伯，都完全有可能在泼洗澡水时“犯错误”．

不等式的研究属于顶天立地型，下可接中学数学之地气，上可攀世界现代数学研究之高峰．

本书的文章发表的时间跨度很大，早期的发表于20世纪80年代，近期的发表于近几年．笔者也是从那时开始数学论文写作的，那个时代中学数学教学研究十分红火．上海教育出版社还专门出版了一套《初等数学论丛》丛书，像莫绍奎、常庚哲、单墫、蒋生、苏淳等大家都积极投稿，但后来也夭折了．

20世纪80年代理想主义的盛行，除了压抑后的政治清明，还有“现代化”这么一个让人兴奋的东西．它似乎言之凿凿地会在未来的某个时候出现．其在政治、社会、经济方面的伟大抱负，给了人们明确的心理预期．不需要心理防御，活在这种魅化的理想中，人是幸福的，人能够超越世俗生活，是因为既可以赋予现在的生活以意义，又可以相信会有更好的生活．

但它很快烟消云散．20世纪90年代，马上对这种理想主义进行了祛魅．被确定的未来，其确定性开始暗淡，而“现代化”被还原成世俗的物质主义，以及阶层的博弈进程．这样的政治社会背景，不再适合20世纪80年代的那种理想的存在，它已显得是多么的天真可笑．

此后的社会演化过程，不过是加剧了20世纪90年代露出历史地表的那些东西：越来越物质主义；越来越功利、浮躁；越来越短视．

蒋先生早年在农村学校，那种耕读生活令人向往．据浙大的一位生物学家回忆：1940年，浙大理学院迁至离遵义75公里的湄潭县，苏步青老师一家十口（那时他还带着一位从平阳家乡来的女亲戚，他家里人都称她为表姐）住在湄潭南门外的破庙中（朝贺寺）．庙很小，搬走了四大天王和弥勒佛等一批神像才能入住．苏先生对这位生物学家说：

> 白天忙着教课和家务，里里外外，马不停蹄，夜里先要张罗家务，等到一家人陆续入睡后，夜阑人静，万籁俱寂，他才开始专心写研究论文．钢笔

在纸上写着算式，笔尖接触白纸，发出一些微动的声响，好像音弦演奏的乐曲，对自己既是一种陶冶，也是一种慰籍，心情也十分舒畅了.

在山水之间耕读，是一种有着高度文化抱负和理想追求的农耕生活方式，是中国传统文化的价值取向，是士阶层的精神寄托. 清高、怀远、超脱，淡然是士人格的理想境界. 古代士人的山水情怀与耕读生活的结合，士人的精神移民与士人的大同理想的文化移植，造就了一个农业文明中充满诗意的乡村自治的文化形态.

近日有一本叫《自由》的小说热卖，它的作者是美国一个当红的作家叫乔纳森·弗兰岑，他应该40多岁，为了写作，他从闹市搬到一个悬崖旁边住，写作的时候把自己的耳朵捂上，眼睛也蒙上，在完全的寂静和黑暗当中写作，他写的《自由》这本书有600多页. 中国美女作家蒋方舟评价说：我个人觉得最理想的写作环境应该是平静，能够拒绝得了诱惑的.

本书的书名是笔者给起的，源自于笔者中学时读过的一本秦牧的《艺海拾贝》印象深刻，颇觉贴切，但愿作者和读者都能接受！

刘培杰

2013年12月17日

于哈工大

前言

20世纪80年代第四个年头,作者从四川一所师范学院数学系毕业,分配到一所农村中学任教,为了尽快熟悉中学数学教学工作,作者阅读了大量的参考书,订阅了十多种数学期刊.通过研读,结合自己的教学,尝试着将一些研究成果撰写成论文,投稿到有关刊物,自1985年第一篇论文在《中学理科参考》上发表,至今二十多年中,在《数学通报》、《数学教学》、《中等数学》、《数学通讯》、《中学数学》、《中学教研》、《中学数学研究》、《数学传播》(中国台湾)、《数学教育》(中国香港)、《数学竞赛》、《数学奥林匹克与数学文化》等书刊上发表了论文200多篇,现从中选出120篇编成本书.

本书包括奥数题研究、高考数学题研究和初等数学研究共三卷,第一卷收录了对奥数题的解法、背景、推广、加强等方面研究的论文41篇;第二卷收录了对高考数学题的解法、背景、推广等方面研究的论文25篇;第三卷收录了涉及函数、数列、不等式、圆锥曲线等初等数学研究论文54篇.这些都是作者随机研究的成果,所谓随机研究就是从教学中自己找问题进行研究.教师天天在课堂,天天和学生打交道,可供研究的

问题很多,只要我们处处留心,多思善想,定会发现问题,再想办法解决问题,这一过程就是研究.新课程理念中有一个观点就是教师要做研究者,把教学过程作为研究过程,教师在教学及研究过程中实现自我发展.在第三卷书末有一篇作者的体会"谈谈如何撰写数学教研论文"可供参考.研究初等数学也是作者的业余爱好,这些成果是作者在数学大海中偶尔拾得的几个小小贝壳.作者原打算将"奥数题.高考题.初等数学研究"作为书名,刘培杰先生建议将三卷书名分别改为"数贝偶拾——奥数题研究、数贝偶拾——高考数学题研究、数贝偶拾——初等数学研究",作者正暗合此意,欣然采纳.

值本书出版之际,作者对多年来在教学及初等数学研究中给予支持关心的领导、老师及同行表示衷心的感谢!特别要感谢我的老师——西华师范大学康纪权教授的帮助与鼓励,感谢天津宝坻的杨世明先生的指导,还要感谢哈尔滨工业大学出版社的刘培杰先生和其他编辑们,刘培杰先生为本书的出版付出了很多心血,百忙之中为本书作序,其他编辑老师,为本书的出版也付出了辛勤的劳动.

因本人水平有限,书中可能有许多错误与不足,敬请同行不吝赐教,有关意见或建议发至 scpajmb@ tom. com.

蒋明斌

2011 年 10 月

目录

2011 年高考数学四川卷(理科)后三题评析

1. 第 22 题:已知函数$f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$,$h(x)=\sqrt{x}$.

(1) 设函数 $F(x)=f(x)-h(x)$,求 $F(x)$ 的单调区间与极值;

(2) 设 $a\in\mathbf{R}$,解关于 x 的方程$\log_4\left[\frac{3}{2}f(x-1)-\frac{3}{4}\right]=\log_2 h(a-x)-\log_2 h(4-x)$;

(3) 试比较$f(100)h(100)-\sum\limits_{k=1}^{100}h(k)$ 与$\frac{1}{6}$ 的大小.

评析 这就是传说中的压轴题,压轴题出这样的题有点莫明其妙,严格说来不算综合题,三个小题各不相干,唯一的联系是函数符号$f(x)$,$g(x)$,实际上就是把三个不相干的问题硬捆在一起.

(1) 题,导数应用的基本问题,简单.

(2) 也不太难,方程两边化为同底的对数,去掉对数,转化为

$$\begin{cases}(x-1)(4-x)=a-x\\1\leqslant x\leqslant 4\\x\leqslant a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-(x-3)^2+5=a\\1\leqslant x\leqslant 4\\x\leqslant a\end{cases}$$

然后利用图像,按线段 $y=a(1\leqslant x\leqslant 4,x\geqslant a)$ 与抛物线的一段 $y=-(x-3)^2+5(1\leqslant x\leqslant 4,x\leqslant a)$ 的交点个数分情况即可得出结论.

(3) 题稍难,解它的关键是,先一般化,把 100 换成 n,即解更一般的问题:

当 $n\in\mathbf{N},n\geqslant 1$,比较$f(n)h(n)-\sum\limits_{k=1}^{n}h(k)$ 与$\frac{1}{6}$ 的大小.

令

$$g(n)=f(n)h(n)-\sum_{k=1}^{n}h(k)-\frac{1}{6}=\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})-\frac{1}{6}$$

试算

$$g(1)=0$$

$$g(2)=\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}-(\sqrt{1}+\sqrt{2})-\frac{1}{6}=\frac{5\sqrt{2}-7}{6}>0$$

$$g(3)=\left(\frac{6}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}-(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3})-\frac{1}{6}=$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{11\sqrt{2}}{6} + \frac{5\sqrt{2}-7}{6} =$$

$$\frac{\sqrt{243}-\sqrt{242}}{6} + \frac{5\sqrt{2}-7}{6} > 0$$

可以猜测,当 $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$ 时

$$g(n) = \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} - (\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}) - \frac{1}{6} > 0 \qquad (1)$$

参考答案是先将$\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-\frac{1}{6}$化为一个数列$\{a_n\}$的前$n$项和,然后再比较$a_n$与$\sqrt{n}$,由$a_n-\sqrt{n}>0$证得式(1),这是一般考生难以想到的.

实际上按常规方法,证明式(1)首先想到的应该是数学归纳法,况且用数学归纳法证式(1)并不难.

证明1 用数学归纳法.

1) 当 $n=2$ 时,$g(2)=\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}-(\sqrt{1}+\sqrt{2})-\frac{1}{6}=\frac{5\sqrt{2}-7}{6}>0$.

2) 假设当 $n=k$ 时,$g(k)>0$,即

$$-(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k})-\frac{1}{6} > \left(\frac{2k}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{k} = \frac{4k+3}{6}\sqrt{k}$$

那么当 $n=k+1$ 时

$$g(k+1)=\left[\frac{2(k+1)}{3}+\frac{1}{2}\right]\sqrt{k+1}-(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1})-\frac{1}{6}=$$

$$\left(\frac{4k+7}{6}\right)\sqrt{k+1}-\sqrt{k+1}-(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k})-\frac{1}{6}>$$

$$\frac{4k+1}{6}\sqrt{k+1}-\frac{4k+3}{6}\sqrt{k}=$$

$$\frac{1}{6}\left[(4k+1)\sqrt{k+1}-(4k+3)\sqrt{k}\right]>0$$

后一不等号成立,是因为

$$(4k+1)^2(k+1)-k(4k+3)^2=$$
$$(4k+1)^2+k[(4k+1)^2-(4k+3)^2]=$$
$$16k^2+8k+1+k(8k+4)(-2)=1>0$$

即 $g(k+1)>0$,故当 $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$ 时

$$g(n)=\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})-\frac{1}{6}>0$$

如果觉得用数学归纳法写起来有点啰嗦,也可以直接证明$\{g(n)\}$是单调递增数列.

证明2 因为,当 $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$ 时

$$g(n+1)-g(n)=\frac{4n+7}{6}\sqrt{n+1}-\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=$$

$$\frac{1}{6}[(4n+1)\sqrt{n+1}-(4n+3)\sqrt{n}]>0$$

后一不等号成立,是因为

$$(4n+1)^2(n+1)-n(4n+3)^2=$$
$$(4n+1)^2+n[(4n+1)^2-(4n+3)^2]=$$
$$16n^2+8n+1+n(8n+4)(-2)=1>0$$

所以,当 $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 3$ 时

$$g(n)>g(n-1)>\cdots>g(3)>g(2)$$

且

$$g(2)=\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}-(\sqrt{1}+\sqrt{2})-\frac{1}{6}=\frac{5\sqrt{2}-7}{6}>0$$

故当 $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$ 时,$g(n) \geqslant g(2)>0$.

取 $n=100$,即得 $f(100)h(100)-\sum\limits_{k=1}^{100} h(k)>\frac{1}{6}$.

2. 第20题:设 d 为非零实数,有

$$a_n=\frac{1}{n}[\mathrm{C}_n^1 d+2\mathrm{C}_n^2 d^2+\cdots+(n-1)\mathrm{C}_n^{n-1}d^{n-1}+n\mathrm{C}_n^n d^n](n \in \mathbf{N}^*)$$

(1)写出 a_1, a_2, a_3 并判断 $\{a_n\}$ 是否为等比数列,若是,给出证明;若不是,说明理由;

(2)设 $b_n=nda_n(n \in \mathbf{N}^*)$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

分析 (1)容易得出

$$a_1=d, a_2=d(1+d), a_3=d(1+d)^2, \cdots$$

由此,可猜测 $a_n=d(1+d)^{n-1}$.

要证明这个结果需用到 $k\mathrm{C}_n^k=n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$,很多考生由于没记住这公式,到此就止步了.

实际上,这公式推导并不难

$$k\mathrm{C}_n^k=k\frac{n!}{k!\ (n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\ (n-k)!}=n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$$

在教材中有道习题:$1 \cdot \mathrm{C}_n^1+2 \cdot \mathrm{C}_n^2+\cdots+n\mathrm{C}_n^n=n \cdot 2^{n-1}$,证明它就要用这个公式.

(2)属于求一等差数列与一等比数列相应项的积的和的问题,一般用错位相减法求.

如果注意到由二项式定理

$$(1+d)^n = C_n^0 + C_n^1 d + C_n^2 d^2 + \cdots + C_n^{n-1} d^{n-1} + C_n^n d^n$$

及幂函数的导数$(x^n)' = nx^{n-1}$,则(1),(2)都可以用导数求解.

解 (1)注意到

$$a_n = \frac{d}{n}[C_n^1 + 2C_n^2 d + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} d^{n-2} + nC_n^n d^{n-1}]$$

记$f(d) = (1+d)^n$,由二项式定理有

$$f(d) = (1+d)^n = C_n^0 + C_n^1 d + C_n^2 d^2 + \cdots + C_n^{n-1} d^{n-1} + C_n^n d^n$$

所以

$$f'(d) = n(1+d)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 d + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} d^{n-2} + nC_n^n d^{n-1}$$

代入得

$$a_n = \frac{d}{n} \cdot n(1+d)^{n-1} = d(1+d)^{n-1}$$

所以,当$d=-1$时,$a_1 = d, a_n = 0(n \geqslant 2)$,$\{a_n\}$不成等比数列;当$d \neq -1$时,$\{a_n\}$是首项为$d$,公比为$1+d$的等比数列.

(2)当$d=-1$时,$S_n = b_1 = 1$;当$d \neq -1$时

$$S_n = d^2[1 + 2(1+d) + 3(1+d)^2 + \cdots + n(1+d)^{n-1}]$$

令$g(d) = (1+d) + (1+d)^2 + \cdots + (1+d)^n$,注意到$d \neq 0$,则$d+1 \neq 1$,有

$$g(d) = \frac{(1+d)[(1+d)^n - 1]}{(1+d) - 1} = d^{-1}(1+d)^{n+1} - d^{-1} - 1 \Leftrightarrow$$

$$g(d) = (1+d) + (1+d)^2 + \cdots + (1+d)^n = d^{-1}(1+d)^{n+1} - d^{-1} - 1$$

求导,得

$$g'(d) = 1 + 2(1+d) + \cdots + n(1+d)^{n-1} = \\ -d^{-2}(1+d)^{n+1} + d^{-1}(n+1)(1+d)^n + d^{-2}$$

所以

$$S_n = d^2[-d^{-2}(1+d)^{n+1} + d^{-1}(n+1)(1+d)^n + d^{-2}] = \\ -(1+d)^{n+1} + d(n+1)(1+d)^n + 1$$

注 数列$\{(kn+b)q^n\}$的前n项和都可以用导数求得.

3. 第21题:椭圆有两顶点$A(-1,0)$,$B(1,0)$,过其焦点$F(0,1)$的直线l与椭圆交于C,D两点,并与x轴交于点P,直线AC与直线BD交于点Q(如图1).

(1)当$|CD| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$时,求直线$l$的方程;

(2)当点P异于A,B两点时,求证:$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$为定值.

分析 (1)容易求解.

(2)的结论可以推广到有心圆锥曲线(椭圆、圆和双曲线),我们有:

命题 设有心圆锥曲线(椭圆、圆和双曲线)K 的中心为 O,其一对称轴 X 与 K 交于 A,B 两点,$|AB|=2r$,直线 L 与 K 交于 C,D 两点,与直线 AB 交于点 P(点 P 异于 A,B),直线 AC 与直线 BD 交于点 Q,则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值.

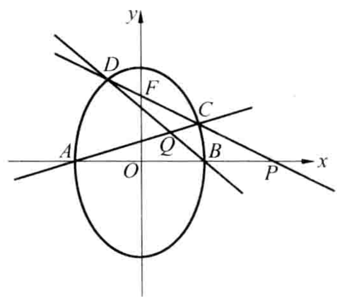

图 1

证明 (1)当K为椭圆或圆时,以K的中心为原点,对称轴X所在直线为x轴建立平面直角坐标系,设K的方程为$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{s^2}=1$,则$A(-r,0)$,$B(r,0)$,设$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,则:

1)当直线 L 的斜率存在时,设 L 的方程为 $y=kx+m$,显然 $k\neq 0$,则 $P\left(-\frac{m}{k},0\right)$,$(x_1,y_1)$,$(x_2,y_2)$ 是方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{s^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$$

的解,消去 y,并整理得

$$(s^2+k^2r^2)x^2+2r^2kmx+r^2(m^2-s^2)=0$$

则

$$x_1+x_2=-\frac{2r^2km}{s^2+k^2r^2},x_1x_2=\frac{r^2(m^2-s^2)}{s^2+k^2r^2} \tag{2}$$

直线 AC,BD 的方程分别为 $y=\frac{y_1}{x_1+r}(x+r)$,$y=\frac{y_2}{x_2-r}(x-r)$,点 Q 的坐标(x,y) 是方程组

$$\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+r}(x+r)\\ y=\frac{y_2}{x_2-r}(x-r)\end{cases}$$

的解,消去 y 得

$$\frac{x+r}{x-r}=\frac{x_1+r}{x_2-r}\cdot\frac{y_2}{y_1}$$

由 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$ 在椭圆 K 上,则

$$y_1^2=\frac{s^2}{r^2}(r^2-x_1^2),y_2^2=\frac{s^2}{r^2}(r^2-x_2^2)$$

因此

$$\left(\frac{x+r}{x-r}\right)^2=\left(\frac{x_1+r}{x_2-r}\right)^2\cdot\frac{r^2-x_2^2}{r^2-x_1^2}=$$

$$\frac{(x_1+r)(x_2+r)}{(x_1-r)(x_2-r)}=\frac{x_1x_2+r(x_1+x_2)+r^2}{x_1x_2-r(x_1+x_2)+r^2}=$$

$$\frac{\frac{r^2(m^2-s^2)}{s^2+k^2r^2}+r\left(-\frac{2r^2km}{s^2+k^2r^2}\right)+r^2}{\frac{r^2(m^2-s^2)}{s^2+k^2r^2}-r\left(-\frac{2r^2km}{s^2+k^2r^2}\right)+r^2}=\left(\frac{m-kr}{m+kr}\right)^2$$

注意到 $-r<x_1,x_2<r$,有$\frac{x_1+r}{x_2-r}<0$,由$\frac{x+r}{x-r}=\frac{x_1+r}{x_2-r}\cdot\frac{y_2}{y_1}$,知$\frac{x+r}{x-r}$与$\frac{y_2}{y_1}$异号. 而

$$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=$$

$$k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=$$

$$k^2\frac{r^2(m^2-s^2)}{s^2+k^2r^2}+km\left(-\frac{2r^2km}{s^2+k^2r^2}\right)+m^2=$$

$$\frac{s^2(m^2-k^2r^2)}{s^2+k^2r^2}=\frac{s^2(m+kr)^2}{s^2+k^2r^2}\cdot\frac{m-kr}{m+kr}$$

知 y_1y_2 与$\frac{m-kr}{m+kr}$同号,而$\frac{x+r}{x-r}$与$\frac{y_2}{y_1}$异号,所以$\frac{x+r}{x-r}$与$\frac{kr-m}{kr+m}$同号,那么

$$\frac{x+r}{x-r}=\frac{kr-m}{kr+m}\Leftrightarrow x=-\frac{k}{m}r^2$$

即 $Q\left(-\frac{k}{m}r^2,y\right)$,那么

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{m}{k}\left(-\frac{k}{m}r^2\right)=r^2$$

2)当直线 L 的斜率不存在时,设 L 的方程为 $x=m$,显然 $m\neq0$,则 $P(m,0)$,$x_1=x_2=m,y_2=-y_1$,与1)类似可得

$$\frac{x+r}{x-r}=\frac{x_1+r}{x_2-r}\cdot\frac{y_2}{y_1}=-\frac{m+r}{m-r}\Leftrightarrow x=\frac{r^2}{m}$$

即 $Q\left(\frac{r^2}{m},y\right)$,那么$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=m\cdot\frac{r^2}{m}=r^2$.

综上有$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=r^2$(定值).

(2)当 K 为双曲线时,以 K 的中心为原点,AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,设 K 的方程为$\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{s^2}=1$,则 $A(-r,0)$,$B(r,0)$,设 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$.